

3.0 BREVE INTRODUCCIÓN A ESPACIOS VECTORIALES

LCC



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

Definición

Sea $V \neq \emptyset$, con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar de $\mathbb{R}$. V es un **ESPACIO VECTORIAL REAL** si

1. La adición en V , verifica las propiedades:
 - Asociativa
 - Conmutativa
 - Existencia de elemento neutro para la suma
 - Existencia de elementos opuestos para la suma
2. La multiplicación por un escalar, verifica las propiedades:
 - Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la adición
 - Distributiva de la adición de escalares respecto de la multiplicación por un elemento de V
 - Asociatividad mixta
 - Propiedad modular.

Ejemplo

- $V = \mathbb{R}^2$ con la suma de vectores definida componente a componente y la multiplicación por escalar de $\mathbb{R}$ (el escalar multiplica a cada componente del vector).
- V el conjunto de las funciones reales continuas en su dominio $[a, b]$, con la suma usual de funciones y la multiplicación por un escalar (que en este caso puede ser pensado como una función constante definida en el mismo dominio).
- V es el conjunto de $\mathcal{M}$, de matrices 5×7 , con la adición usual de matrices y multiplicación por un escalar.

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial y $S \neq \emptyset$, un subconjunto de V . Se dice que S es subespacio (vectorial) de V si:

- $0 \in S$, siendo 0 el elemento identidad de la adición en V .
- Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ están en S entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$.
- Si $\mathbf{u} \in S$ y k es un escalar real cualquiera, entonces $k\mathbf{u} \in S$.

Observaciones:

- La primera condición de la lista anterior está implícita en la última, pero la enunciamos separada por practicidad en el análisis.
- Las tres condiciones pueden sintetizarse en:

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son de S y k_1, k_2 son de $\mathbb{R}$, entonces $(k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}) \in S$.

- Algunos textos definen al subespacio como un subconjunto no vacío de un EV que es espacio vectorial por sí mismo. Es equivalente a la definición dada.

Combinación lineal (CL)

Definición

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial V y $c_1, c_2, \dots, c_n$ son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

es **una combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1 = (2, 3, -5)$ y $\mathbf{v}_2 = (-4, 0, 2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$:

- $2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2$ es una CL de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que da el vector $(8, 6, -12)$.
- $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una CL de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que da el vector $(0, 0, 0)$.

Conjunto Generador y Conjunto Linealmente Independiente

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama **conjunto generador** de V si cada vector de V se puede escribir como CL de los vectores de V .

Observación: Que cada vector de V se pueda escribir como CL de vectores de B quiere decir que para cada vector $\mathbf{w} \in V$ existen coeficientes que hagan que se cumpla la igualdad:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}.$$

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo lo comprobaría?

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, genera a $\mathbb{R}^2$.

Conjunto Generador y Conjunto Linealmente Independiente

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama **conjunto linealmente independiente** de V si la única CL que es igual al vector nulo de V es la que tiene todos los coeficientes 0.

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$ es LI. ¿Cómo lo comprobaría?

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, es LI.

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama **base de V** si cumple

1. B genera a V .
2. B es LI.

Observación: Trabajaremos con espacios vectoriales que tienen una cantidad finita de vectores en la base. Estos espacios se llaman *Espacios vectoriales de dimensión finita*.

Ejemplo

1. El conjunto $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
2. El conjunto $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

- Las bases de los ejemplos 2 y 3 se denominan **base canónica o base estándar** de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- Este resultado puede generalizarse a los espacios vectoriales n -dimensionales.

Definición

Los vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

forman una base denominada *base canónica o base estándar* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

1. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

es la base canónica para las matrices de orden 2, $M_{2,2}$.

- La base canónica para las matrices de tamaño $m \times n$, $M_{m,n}$, es el conjunto de las distintas matrices de tamaño $m \times n$ que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos igual a 0.
- El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado 3, P_3 .
- El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado n , P_n .

Teorema

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un EV V , entonces todo vector en V puede escribirse de una y sólo de una forma como CL de vectores de B .

Teorema

- *Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un EV V , entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en V es LD.*
- *Si un EV tiene una base con n vectores, entonces toda base de V tiene n vectores.*

DIMENSIÓN

Definición

Sea V un EV que tiene una base con n vectores, el número n se denomina dimensión de V y se denota como $\dim(V) = n$.

Si $V = \{0\}$, entonces $\dim(V) = 0$.

Ejemplo

1. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar es n .
2. La dimensión de P_n con las operaciones estándar es $n + 1$.
3. La dimensión de $M_{m,n}$ con las operaciones estándar es $m \cdot n$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B \in V$.

- Si B tiene n vectores linealmente independientes, entonces B es una base de V .
- Si B tiene n vectores que generan a V , entonces B es una base de V .