3.0 BREVE INTRODUCCIÓN A ESPACIOS VECTORIALES

LCC

Operaciones: Adición y Multiplicación por escalar

Definición

Sea V un conjunto no vacío y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Se definen las operaciones:

- Adición: $+ : V \times V \to V \quad / \quad +(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- Multiplicación por escalar: $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \quad / \quad \cdot\,(k, \mathbf{v}) = \mathbf{w} = k \cdot \mathbf{v}$

Los "vectores" son los elementos de V y los escalares son números reales.

Propiedades de la adición

Propiedad

Si en el conjunto V se ha definido la operación adición, dicha operación puede cumplir las siguientes propiedades:

- *Asociativa: Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son elementos cualesquiera de V entonces*

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

- *Conmutativa: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos cualesquiera de V entonces:*

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

- *Identidad: Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{v} \in V$ se cumple que:*

$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\ =\mathbf{v}$$

- *Opuestos: Para todo $\mathbf{v} \in V$ existe $-\mathbf{v} \in V$ tal que:*

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=(-\mathbf{v})+\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

Propiedades de la multiplicación por un escalar

Propiedad

Si en el conjunto V se ha definido la operación multiplicación por un escalar $\mathbb{R}$, dicha operación puede cumplir las siguientes propiedades:

- *Distributiva: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ elementos cualesquiera de V y k un escalar, entonces:*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

- *Para todo k_1 y k_2 de $\mathbb{R}$ y cualquier $\mathbf{u}$ de V entonces:*

$$(k_1 + k_2) \cdot \mathbf{u} = k_1 \cdot \mathbf{u} + k_2 \cdot \mathbf{u}$$

- *Asociatividad mixta: Para todo k_1 y k_2 de $\mathbb{R}$ y cualquier $\mathbf{u}$ de V entonces:*

$$(k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbf{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{u}) = k_2 \cdot (k_1 \cdot \mathbf{u})$$

- *Propiedad modular: Existe $1 \in \mathbb{R}$ que para todo $\mathbf{u} \in V$ cumple:*

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Espacio Vectorial real

Definición

Sea $V \neq \varnothing$, con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar de $\mathbb{R}$. V es un ESPACIO VECTORIAL REAL si

1. La adición en V, verifica las propiedades:
   - Asociativa
   - Conmutativa
   - Existencia de elemento neutro para la suma
   - Existencia de elementos opuestos para la suma
2. La multiplicación por un escalar, verifica las propiedades:
   - Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la adición
   - Distributiva de la adición de escalares respecto de la multiplicación por un elemento de V
   - Asociatividad mixta
   - Propiedad modular.

Ejemplos de Espacios Vectoriales

Ejemplo

- $V = \mathbb{R}^2$ con la suma de vectores definida componente a componente y la multiplicación por escalar de $\mathbb{R}$ (el escalar multiplica a cada componente del vector.
- V el conjunto de las funciones reales continuas en su dominio $[a, b]$, con la suma usual de funciones y la multiplicación por un escalar (que en este caso puede ser pensado como una función constante definida en el mismo dominio).
- V es el conjunto de $\mathcal{M}$, de matrices 5×7, con la adición usual de matrices y multiplicación por un escalar.

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial y $S \neq \varnothing$, un subconjunto de V. Se dice que S es subespacio (vectorial) de V si:

- $0 \in S$, siendo 0 el elemento identidad de la adición en V.
- Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ están en S entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$.
- Si $\mathbf{u} \in S$ y k es un escalar real cualquiera, entonces $k\mathbf{u} \in S$.

Observaciones:

- La primera condición de la lista anterior está implícita en la última, pero la enunciamos separada por practicidad en el análisis.
- Las tres condiciones pueden sintetizarse en:

  Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son de S y $k_1,\ k_2$ son de $\mathbb{R}$, entonces $(k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}) \in S$.

- Algunos textos definen al subespacio como un subconjunto no vacío de un EV que es espacio vectorial por sí mismo. Es equivalente a la definición dada.

Combinación lineal (CL)

Definición

Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial V y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

es **una** combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$.

Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1 = \big(2, 3, -5\big)$ y $\mathbf{v}_2 = \big(-4, 0, 2\big)$ vectores de $\mathbb{R}$:

- $2\,\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2$ es una CL de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_1$ que da el vector $\big(8, 6, -12\big)$.
- $0\,\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una CL de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_1$que da el vector $\big(0, 0, 0\big)$.

Conjunto Generador y Conjunto Linealmente Independiente

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama conjunto generador de V si cada vector de V se puede escribir como CL de los vectores de V.

Observación: Que cada vector de V se pueda escribir como CL de vectores de B quiere decir que para cada vector $\mathbf{w} \in V$ existen coeficientes que hagan que se cumpla la igualdad:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}.$$

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,2),(3,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo lo comprobaría?

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,0),(0,1)\}$, genera a $\mathbb{R}^2$.

Conjunto Generador y Conjunto Linealmente Independiente

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama conjunto linealmente independiente de V si la única CL que es igual al vector nulo de V es la que tiene todos los coeficientes 0.

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,2),(3,1)\}$ es LI. ¿Cómo lo comprobaría?

Ejemplo

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,0),(0,1)\}$, es LI.

Definición

Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se llama base de V si cumple

1. B genera a V.
2. B es LI.

Observación: Trabajaremos con espacios vectoriales que tienen una cantidad finita de vectores en la base. Estos espacios se llaman *Espacios vectoriales de dimensión finita.*

Ejemplo

1. El conjunto $B = \{(1,2),(3,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
2. El conjunto $B = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Bases famosas

- Las bases de los ejemplos 2 y 3 se denominan base canónica o base estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- Este resultado puede generalizarse a los espacios vectoriales $n-$dimensionales.

Definición

Los vectores

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

forman una base denominada *base canónica o base estándar* de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLOS de bases canónicas

Ejemplo

1. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   es la base canónica para las matrices de orden 2, $M_{2,2}$.

2. La base canónica para las matrices de tamaño $m \times n$, $M_{m,n}$, es el conjunto de las distintas matrices de tamaño $m \times n$ que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos igual a 0.
3. El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado 3, P_3.
4. El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado n, P_n.

Teorema

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es una base de un EV* V*, entonces todo vector en* V *puede escribirse de una y sólo de una forma como CL de vectores de* B.

Teorema

- *Si* $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es una base de un EV* V*, entonces todo conjunto que contiene más de* n *vectores en* V *es LD.*
- *Si un EV tiene una base con* n *vectores, entonces toda base de* V *tiene* n *vectores.*

DIMENSIÓN

Definición

Sea V un EV que tiene una base con n vectores, el número n se denomina dimensión de V y se denota como $dim(V) = n$.
Si $V = \{0\}$, entonces $dim(V) = 0$.

Ejemplo

1. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar es n.
2. La dimensión de P_n con las operaciones estándar es $n + 1$.
3. La dimensión de $M_{m,n}$ con las operaciones estándar es $m \cdot n$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B \in V$.

- *Si B tiene n vectores linealmente independientes, entonces B es una base de V.*
- *Si B tiene n vectores que generan a V, entonces B es una base de V.*