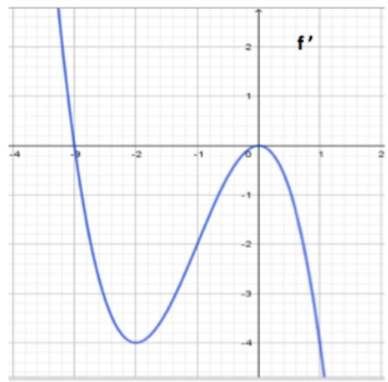
Respuestas a Autoevaluación 2
Análisis Matemático I
Dr. Pablo Ochoa

Dada la gráfica de f', entonces podemos afirmar:



a) f es cóncava hacia arriba en (- ∞; 0)

b) f es cóncava hacia arriba en (- ∞; -1)

c) f es cóncava hacia arriba en (-2; 0)

d) f es cóncava hacia abajo en (-1; ∞)

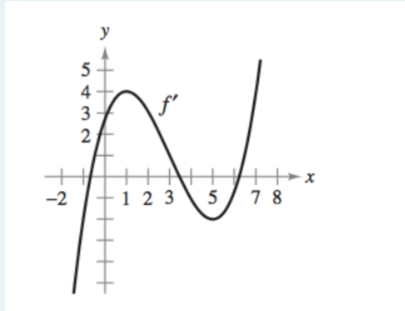
e) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Seleccione una:

- (x) A. Opción c
- ( ) B. Opción a
- ( ) C. Opción e
- ( ) D. Opción b
- ( ) E. Opción d

Para analizar la concavidad de f, vemos dónde es creciente o decreciente su derivada f'. En este caso, f' crece en el intervalo $(-2, 0)$ con lo que la respuesta C es correcta. Todas las demas opciones son incorrectas.

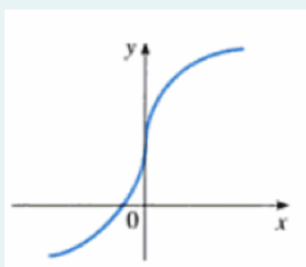
Dado el gráfico de la derivada de f



- [x] A. un intervalo donde f es creciente es (1, 3)
- [ ] B. un intervalo donde f es creciente es (5, 7)
- [ ] C. un intervalo donde f es creciente es (-1, 1)
- [ ] D. f tiene un máximo local en x=1
- [x] E. un intervalo donde f es cóncava hacia abajo en (1, 3)

Observar que donde f' sea positiva, f será creciente. Así, la opción A es correcta. B y C son incorrectas. D es incorrecta (pues f' no es cero, además no cambia de signo). Finalmente, en el intervalo $(1, 3)$ la derivada decrece por lo que f es cóncava hacia abajo allí (opción E correcta también).

Considere la siguiente gráfica de una función f y seleccione las opciones correctas (puede haber más de una):



- [ ] a. f no presenta cambio de concavidad
- [ ] b. la derivada en x=0 no existe y por ende no puede trazarse la recta tangente en (0, f(0))
- [x] c. se puede trazar la recta tangente en el punto (0, f(0)).
- [ ] d. f presenta cambio de concavidad en x=0 pero no es punto de inflexión.
- [x] e. f tiene un punto de inflexión en (0, f(0)).

Observar que f sí presenta cambio de concavidad (opción a incorrecta). Si bien la derivada en $x = 0$ no existe, sí puede trazarse la recta tangente (es vertical) por lo que la opción b es incorrecta. La opción c es correcta por lo explicado anteriormente. Finalmente, dado que en $(0, f(0))$ se puede trazar la recta tangente, hay cambio de concavidad y $x = 0$ está en el dominio de f, se concluye que d es incorrecta y e es correcta.

Dada la curva:

y=2+(x-4)$^{1/3}$

Responda:

Seleccione una:

- ○ a. No se produce el cambio de concavidad alrededor de x=4, por ende la curva no tiene punto de inflexión de abscisa x=4
- ○ b. Como la primera derivada no existe en x=4, la curva no tiene punto de inflexión con abscisa x=4
- ○ c. La deriva segunda de y no existe en x=4, por lo tanto la curva no tiene punto d einflexión de abscisa x=4.
- ◉ d. La primera y la segunda derivada de y no existen en x=4, sin embargo la curva tiene un punto de inflexión (4, 2).

La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-4)^{-2/3}$$

y la derivada segunda es

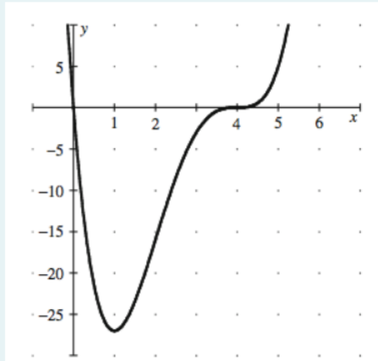
$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-4)^{-5/3}.$$

Así, ni f' ni f'' están definidas en $x = 4$, aunque dicho punto está en el dominio de f. Además, como la derivada primera tiende a $+\infty$ cuando $x \to 4^+$ y $x \to 4^-$, se puede trazar la recta tangente en $(4, f(4))$. Si construimos la tabla para f'' tenemos (observar que no hay puntos donde f'' sea cero ni puntos de discontinuidad de f ni extremos del dominio):

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
Valor de prueba	0	5
signo de f''	+	-
Conclusión	f conc. hacia arriba	f conc. hacia abajo

Por lo tanto, $(4, f(4))$ es punto de inflexión y la opción correcta es d.

Dada la siguiente gráfica de una función f:



Seleccione una:

- a. f es cóncava hacia arriba en $(0,2)$ y en $(4,5)$, f es creciente en $(1,5)$, f es decreciente en $(0,1)$, y f presenta un mínimo local en x=1.
- b. f es cóncava hacia abajo en $(0,2)$ y hacia arriba en $(4,5)$, f es creciente en $(1,5)$, f es decreciente en $(0,1)$, y f presenta un mínimo local en x=1.
- c. f es cóncava hacia arriba en $(0,2)$ y en $(4,5)$, f es creciente en $(1,5)$, f es decreciente en $(0,1)$, y f presenta un mínimo local en x=4.

Observar que f no es cóncava hacia abajo en $(0,2)$, por lo que se descarta b. f no presenta un mínimo local en $x=4$, pues hay valores a la izquierda de 4 donde f es menor a $f(4)=0$ y valores a la derecha donde f es mayor. Sí f cumple todas las condiciones del ítem a.

Un intervalo donde la función:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+3}$$

es cóncava hacia arriba es:

Seleccione una:

- a. $(1,\infty)$
- b. $(-1,\infty)$
- c. (-1, 0)
- d. (0, 1)

Calculamos la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

y ña derivada segunda

$$f''(x)=\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}.$$

Los puntos a considerar en el análisis de concavidad son 1 y -1 (son puntos donde f'' es cero. La derivada segunda existe para todo x y la función f no presenta discontinuidades). Construyendo la tabla se obtiene que en el intervalo $(1,\infty)$ la derivada segunda es positiva y por ende la opción correcta es la a.

Si $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$, entonces podemos afirmar:

a) f es creciente en x = 2

b) f presenta un máximo relativo en x = 2

c) f presenta un mínimo relativo en x = 2

d) f es contínua en x = 2

eleccione una:

- (•) A. Opción d
- ( ) B. Ninguna de las demás opciones es correcta
- ( ) C. Opción b
- ( ) D. Opción a
- ( ) E. Opción c

Que el límite dado sea 0 significa que la derivada de f en $x = 2$ es 0 (por definición alternativa de derivada). Luego, la función es continua allí. No sabemos si hay máximo o mínimo allí pues no tenemos información del signo de f' alrededor de $x = 2$. La condición de ser creciente es siempre sobre intervalos, no puntos.

Encontrar los extremos relativos de

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}.$$

Seleccione una:

- ( ) a. Ninguna de las otras respuestas es correcta
- ( ) b. f tiene mínimos relativos en x=2 y en x=0 y máximo relativo en x=-2.
- ( ) c. f tiene mínimos relativos en x=0 y en x=-2 y máximo relativo en x=2.
- (•) d. f tiene mínimos relativos en x=2 y en x=-2 y máximo relativo en x=0.

La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3} 2x.$$

Luego, f' no está definida en 2 y -2, y se anula en $x = 0$. Además, f no presenta discontinuidades y su dominio es $\mathbb{R}$.

•	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba	-3	-1	1	3
signo de f'	-	+	-	+
conclusión	f decrece	f crece	f decrece	f crece

Así, la opción correcta es la d.

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Seleccione una:

- ( ) a. f crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$
- ( ) b. f es siempre creciente
- (•) c. f crece en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$, y decrece en $(0, 1)$
- ( ) d. f es siempre decreciente

La derivada de f es:

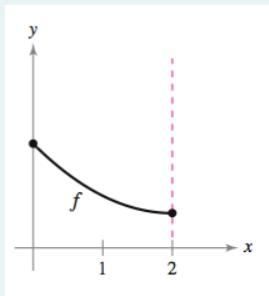
$$f'(x) = 3x^2 - 3x$$

existe en todo número real y se anula en 1 y en 0. Luego,

•	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
valor de prueba	-1	0.5	2
signo de f'	+	-	+
conclusión	f crece	f decrece	f crece

La opción correcta es la c.

Dada la gráfica de f:

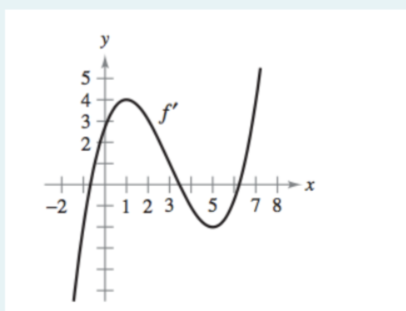


Seleccione una:

- a. f'' es menor o igual a cero en el intervalo (0, 2)
- b. f'' es mayor o igual a cero en el intervalo (0, 1) y menor o igual a cero en (1, 2)
- c. f'' es mayor o igual a cero en el intervalo (0, 2)

Observar que la función es cóncava hacia arriba en $(0, 2)$, por lo que f'' es mayor o igual a cero allí.

Considere el gráfico de f':



Entonces f tiene un máximo local en x=.... (coloque sólo el número. Si utiliza decimales, coloque puntos o comas)

Respuesta: 3,5

Gráficamente se observa que f' es cero en $x = 3.5$ y que la derivada pasa de positiva a negativa, por lo que hay un máx. local allí.

Determine los extremos locales de:

$y=2+12x+3x^2 \ -2x^3$

Coloque la abscisa del máximo local de y.

No coloque fracciones, sólo decimales con puntos o comas.

Respuesta: 2

La derivada de y es

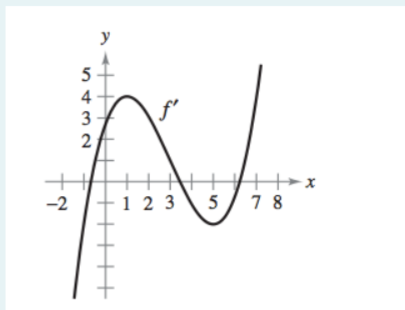
$$y'(x) = 12 + 6x - 6x^2.$$

La derivada existe para todo x y es cero en -1 y en 2. Luego,

•	$(\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
valor de prueba	-2	0	3
signo de y'	-	+	-
conclusión	y decrece	y crece	y decrece

Así, y tiene un máximo local en $x = 2$.

Dado el gráfico de la derivada de f



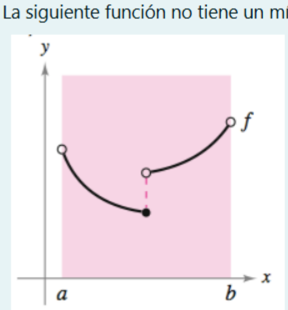
Se puede decir que f es cóncava hacia arriba en el intervalo (5, 7).

Seleccione una:

- (•) Verdadero
- ( ) Falso

En el intervalo dado f' es creciente por lo que la función f es cóncava hacia arriba allí.

La siguiente función no tiene un mínimo local en el intervalo (a, b):

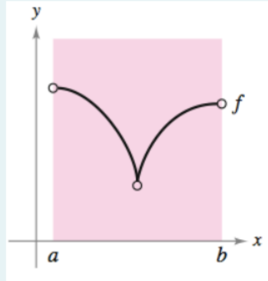


Seleccione una:

- ( ) Verdadero
- (•) Falso

Justo en el punto donde se produce una discontinuidad de salto hay un mínimo local, pues tanto a izquierda como a derecha de dicho punto la función asume valores mayores al del punto especificado. De hecho, es un mínimo absoluto.

La siguiente función no presenta extremos locales en (a, b):



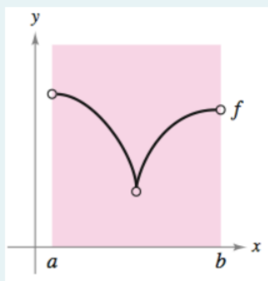
Seleccione una:

◉ Verdadero

○ Falso

No hay ningún punto en el intervalo que cumpla la definición de máximo o mínimo local.

La siguiente función cumple con todas las hipótesis del teorema del valor medio para derivadas en el intervalo [a, b]



Seleccione una:

○ Verdadero

◉ Falso

Observar que la función no es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Movimiento vertical La altura de una pelota t segundos después de que se lanzó hacia arriba a partir de una altura de 6 pies y con una velocidad inicial de 48 pies por segundo es $f(t) = -16t^2 + 48t + 6$.

Se puede afirmar que existe un instante entre t=1 s y t= 2 s en el que el cuerpo se detiene.

Seleccione una:

◉ Verdadero

○ Falso

Para que el cuerpo se detenga, la velocidad debe ser 0. Entonces

$$f'(t) = -32t + 48 = 0$$

nos da

$$t = 1.5\,s.$$