Análisis Matemático I
Clase 13: Problemas de Optimización. Criterio de la derivada segunda para extremos. Antiderivadas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

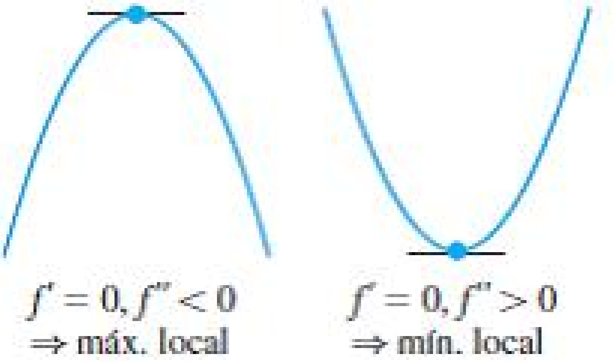
Abril, 2025

Problemas de Optimización: una de las grandes aplicaciones de la teoría de derivadas es a problemas en donde se desea maximizar o minimizar una determinada función, sujeta a determinadas condiciones o circunstancias.

En esta parte del curso, aplicaremos frecuentemente la teoría de derivadas para localizar extremos de funciones. Cuando se resuelven problemas de optimización se pueden emplear el criterio de la derivada segunda para obtener extremos locales. Dicho criterio se estudiará a continuación.

Criterio de la derivada segunda para extremos

Observe las siguientes figuras:



La función tiene un punto crítico donde f' es cero y el signo de f'' determina el tipo de extremo que tendremos.

Criterio de la derivada segunda para extremos

Supongamos que f es una función tal que f'' es continua en (a, b) y que $f'(c) = 0$ para algún c en (a, b). Entonces:

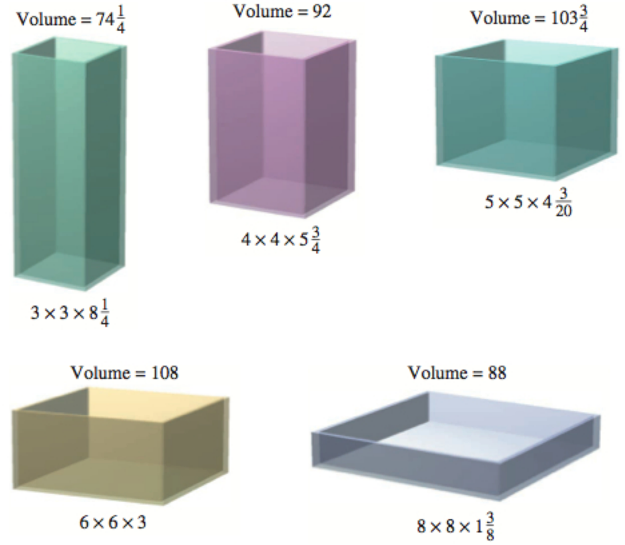
- Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
- Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
- Si $f''(c) = 0$, entonces f puede tener un máximo local en c, un mínimo local en c, o ninguno de éstos.

El criterio de la derivada segunda para extremos se ejemplificará en el contexto de problemas de optimización.

Problema 1: determinación de volumen máximo. Un fabricante desea diseñar una caja sin tapa que tenga base cuadrada y un área superficial de 108 pulg^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para tener volumen máximo?

Problema 1: determinación de volumen máximo. Un fabricante desea diseñar una caja sin tapa que tenga base cuadrada y un área superficial de 108 pulg^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para tener volumen máximo?

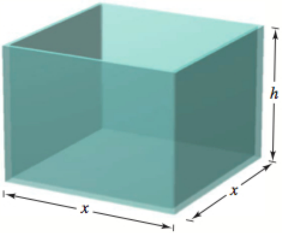
Solución: en la siguiente figura, se pueden observar distintas opciones de cajas que posee la misma área superficial (108 pulgadas^2) pero diferentes volúmenes.



Pregunta: ¿Cómo determinar las dimensiones de la caja que generen el mayor volumen y que posea área superficial de 108 pulg^2?

Solución del Problema 1:

1. Hacemos un dibujo y asignamos un nombre a las variables de interés:



Recordar que la caja tiene base cuadrada.

2. Planteamos la función que se desea maximizar, en este caso, la función volumen de la caja:

$$\mathbf{V} = x^2 h.$$

Observar que V depende de dos variables.

Solución del Problema 1:

1. Para expresar V como una función de una variable, debemos encontrar una relación entre h y x. Esta relación surge de las condiciones planteadas por el problema. En este caso, el área superficial de la caja, sin tapa, es 108 pulg^2. Así:

$$x^2 + 4hx = 108.$$

Por ende:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}.$$

2. Reemplazamos ahora en la función volumen:

$$V = x^2 h = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) = \frac{108x - x^3}{4}.$$

Ahora, V es función solamente de x.

Solución del Problema 1:

1. Determinamos el máximo de V. Hallamos primero los puntos críticos $V'(x) = 0$. Así:
$$x = 6 \text{ o bien } x = -6.$$
El último valor debe descartarse pues $x \geq 0$. Observe que V es siempre derivable. Así, el único punto crítico es $x = 6$.

Solución del Problema 1:

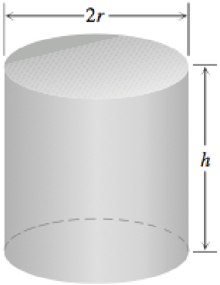
1. Determinamos el máximo de V. Hallamos primero los puntos críticos $V'(x) = 0$. Así:
$$x = 6 \text{ o bien } x = -6.$$
El último valor debe descartarse pues $x \geq 0$. Observe que V es siempre derivable. Así, el único punto crítico es $x = 6$.
2. Calculamos ahora el signo de la derivada segunda en $x = 6$:
$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$
y entonces $V''(6) < 0$, por lo que V alcanza un máximo local en $x = 6$. La altura correspondiente es:
$$h = \frac{108 - 6^2}{4.6} = 3.$$
Las dimensiones de la caja con máximo volumen y área superficial 108 pulg^2 son: $x = 6$ pulg. y $h = 3$ pulg.

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Solución al problema 2:

- Dibujo y variables: $r =$ radio, $h =$ altura. Ambos en centímetros.



- Función a minimizar: área superficial A.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Solución al problema 2:

- Relación entre r y h: utilizamos los datos del problema sobre el volumen de 1 litro$= 1000\text{cm}^3$:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

de donde se obtiene:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Reemplazando en la función A se obtiene:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Observe que r tiene que ser positivo.

Solución al problema 2:

- Buscamos dónde A alcanza su mínimo: encontramos primero los puntos críticos.
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}.$$
Observar que A' existe para todo $r > 0$. Buscamos r tal que $A'(r) = 0$. Obtenemos:
$$r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3},$$
es el único punto crítico.
- Para determinar si A tiene un mínimo local en el punto crítico, determinamos la segunda derivada y vemos qué signo tiene en el punto crítico (es decir, usamos el criterio de la derivada segunda para extremos relativos). Se obtiene:
$$A''\left[\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}\right] > 0.$$

Solución al problema 2:

Luego, A tiene un mínimo local en $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}$. La altura correspondiente es:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Antiderivadas

Definición de antiderivada

Decimos que una función F es una antiderivada de f en (a, b) si:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Dar ejemplos.

Observación: si F es una antiderivada de f en (a, b), entonces:

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es cualquier constante, es también una antiderivada de f.

Recordar la siguiente consecuencia del teorema del valor medio:

Teorema

Si F y G son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

$$F'(x) = G'(x)$$

para toda x de (a, b), entonces existe una constante C tal que:

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo x en $[a, b]$.

Así, dos antiderivadas de una función difieren en una constante.

Notación

Sea f una función definida en (a, b). El símbolo:

$$\int f(x)dx$$

representa una antiderivada general de f en (a, b) y se denomina integral indefinida de f.

Ejemplos:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$.
- $\int cos(x)dx = sen(x) + C$
- $\int sen(x)dx = -cos(x) + C$

Propiedades de la integral indefinida

Sean f y g funciones definidas en (a,b), y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
- $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

Ejemplos:

- $\int (x^4+5x-1)dx = \int x^4 dx + 5\int xdx - \int 1dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^2}{2} - x + C.$
- $\int (sen(x) - 4cos(x))dx = -cos(x) - 4sen(x) + C$

Preparación para la integral definida: notación para sumas finitas

Sea la siguiente suma finita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Utilizamos la notación sigma para representar la suma finita:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

Finalmente, una fórmula útil es la siguiente:

$$\text{suma de los primeros } n \text{ números naturales } = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$