Análisis Matemático I
Clase 14: Integral definida

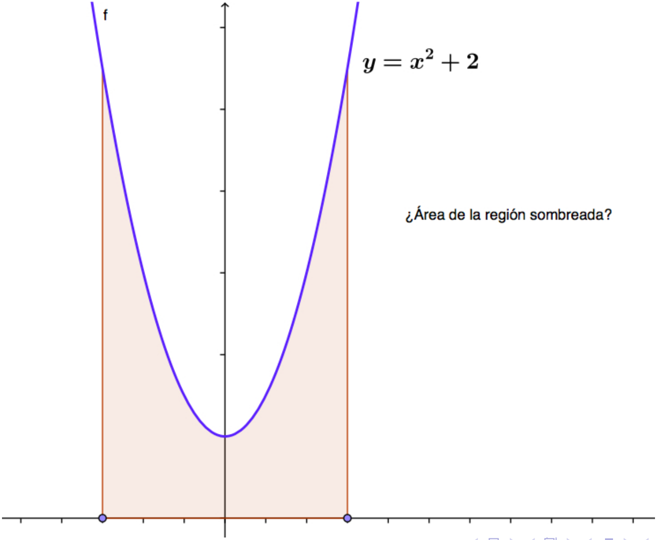
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2024

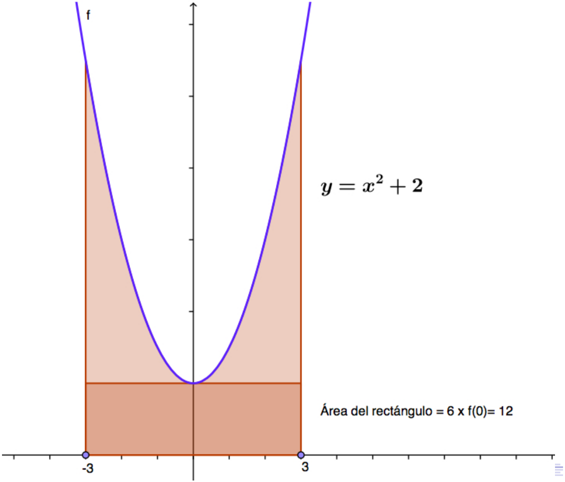
Motivación geométrica de la integral

Problema. Determine el área de la región sombreada:

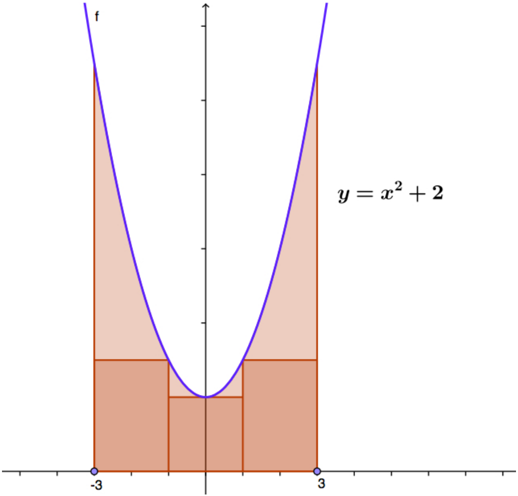


Motivación geométrica de la integral

Como primera aproximación, tomamos un rectángulo de base igual al intervalo considerado y altura igual al valor de la función en $x = 0$, en este caso $f(0) = 2$.

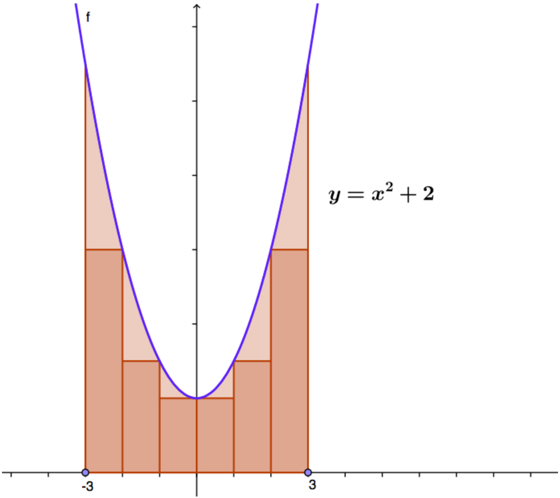


Una mejor aproximación se obtiene tomando más rectángulos:



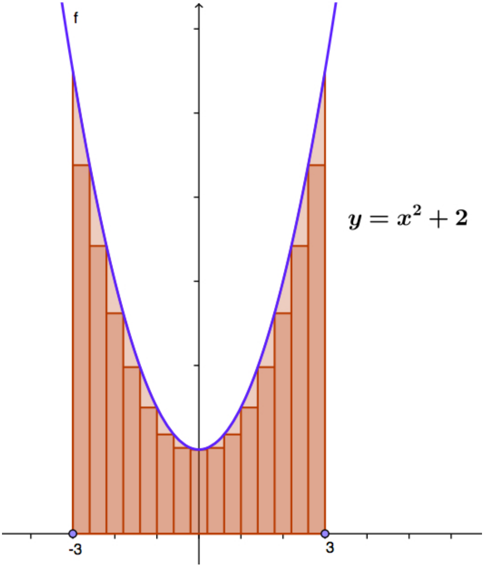
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -1, 0 y 1. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos. Suma de las áreas de rectángulos: 16.

En la siguiente figura se han tomado $n = 6$ rectángulos:



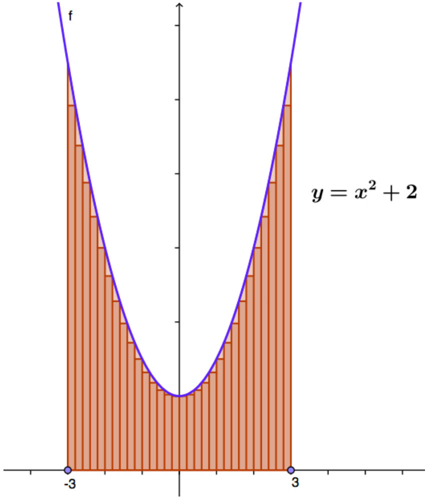
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -2,-1, 0, 1 y 2. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos.Suma de las áreas de rectángulos: 22.

En la siguiente figura se han tomado $n = 15$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 26.5.

En la siguiente figura se han tomado $n = 30$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 28.5. Se espera que a medida que se tomen **todos** los rectángulos cada vez más finos, la aproximación mejore. De hecho, el área buscada es 30.

En las próximas diapostivas vamos a formalizar el proceso de aproximación mediante rectángulos de una región **delimitada por el gráfico de una función** $f \geq 0$:

- Primero, formalizaremos el proceso de división de un intervalo en otros más pequeños (que constituyen las bases de los rectángulos) introduciendo el concepto de **Partición**.
- Luego, introduciremos una medida que nos dirá que tan finos son los rectángulo utilizados, definiendo la noción de **Norma de una partición**.
- Se formalizará la idea de sumas de áreas de rectángulos a través de la definición de **sumas de Riemann**.
- Finalmente, mediante un proceso de límite se obtendrá el área buscada a través del concepto de **Integral Definida**.

Noción de Partición

Partición de un intervalo: si $I = [a, b]$ es un intervalo, una partición P de I es una colección de puntos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n,$ con la propiedad:

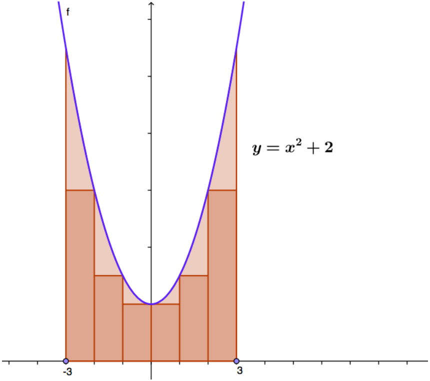
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Escribimos: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Así, una partición P se utiliza para dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, b].$$

Noción de Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



hemos tomado la partición:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

del intervalo $[-3, 3]$.

Noción de Norma de una Partición

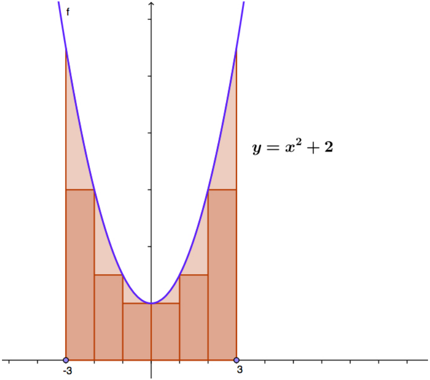
Norma de una partición: si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de I, entonces la norma de P es:

$$||P|| = \max\left\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\right\} = \max\left\{\Delta x_k : k = 1, ..., n\right\}$$

donde: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Noción de Norma de una Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



donde:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

se tiene $||P|| = 1$.

Noción de Norma de una Partición: más ejemplos

Ejemplo: sea $I = [0, 1]$, entonces podemos formar las siguientes particiones:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \qquad ||P|| = 1/2.$$

$$P' = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}, \qquad ||P'|| = 1/2.$$

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \qquad ||P_n|| = 1/n.$$

Observación: en el último caso:

$$\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0.$$

En la próxima diapositiva vamos a formalizar la idea de sumas de áreas de rectángulos.

Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Tomemos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

una partición del intervalo $[a,b]$. Seleccionamos puntos c_1, c_2, c_3, ..., c_n:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

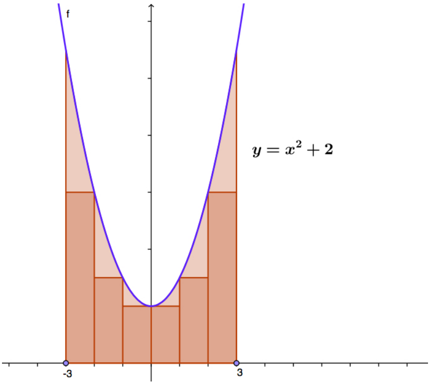
$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

La suma:

$$S(f,P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

se denomina **suma de Riemann** de f en $[a,b]$ con respecto a P.

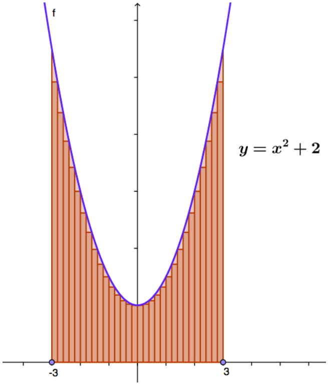
Sumas de Riemann: ejemplo



se tomaron: $c_1 = -2 \in [-3, -2]$, $c_2 = -1 \in [-2, -1]$, $c_3 = 0 \in [-1, 0]$, $c_4 = 0 \in [0, 1]$, $c_5 = 1 \in [1, 2]$ y $c_6 = 2 \in [2, 3]$. La suma $S(f, P)$ asociada es:

$$S(f, P) = f(-2).1 + f(-1).1 + f(0).1 + f(0).1 + f(1).1 + f(2).1$$

Se mencionó anteriormente que si se toman todos los rectángulos cada vez más finos se obtiene una mejor aproximáción a la región considerada. Por ejemplo:



Observar que lo que se busca es hacer que las longitudes de los subintervalos en los que se dividió el intervalo $[-3, 3]$ sean *simultáneamente* cada vez menores. La forma de lograr esto es haciendo que la norma de las particiones de $[-3, 3]$ tiendan a cero.

Así, se espera que el área A de la región considerada sea:

$$A = \lim_{||P|| \to 0} S(f, P).$$

Además, dicho límite recibirá un nombre especial.

Integral Definida

Definición de integral definida

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Decimos que la función f es **integrable** en $[a, b]$ si el límite:

$$\lim_{||P|| \to 0} S(f, P) = A$$

existe. El número A se denomina integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ y escribimos:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

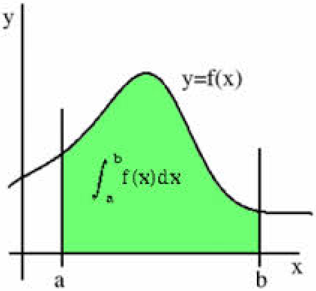
En la próxima clase veremos ejemplos explícitos de aplicación de esta definición.

Cálculo de áreas para funciones no-negativas

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre el gráfico de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (\textbf{siempre que la integral exista})}.$$



Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:** ¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:** ¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observar:

$$f \text{ derivable } \Rightarrow f \text{ continua } \Rightarrow f \text{ integrable.}$$

Así, si una función f es continua en $[a, b]$, entonces sabemos que es integrable y por ende para calcular

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx$$

podemos usar particiones específicas P que cumplan $\|P\| \to 0$. También podemos elegir los puntos c_k en las sumas de Riemann de la forma más apropiada posible.

En este curso, el estudiante resolverá integrales por definición solamente para funciones polinómicas simples en $[0, 1]$. Para ellos, usará las particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Integrales más complejas serán calculadas con otros métodos.

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

Ejemplo: calculemos

$$\int_0^1 2xdx.$$

La función $f(x) = 2x$ es continua en $[0, 1]$, luego es integrable. Para cada número natural n, tomemos la colección de particiones:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\},$$

y tomemos $c_1 = 0$, $c_2 = 1/n$, $c_3 = 2/n$,...,$c_k = (k-1)/n$,...,
$c_n = (n-1)/n$. Entonces $||P_n|| = 1/n$, la cual tiende a cero cuando n tiende a infinito. Así:

$$\int_0^1 2xdx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

Resta calcular $S(f, P_n)$ y hacer $n \to \infty$:

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2c_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad (\text{se usó que } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2})$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x\,dx = 1.$$

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$
\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2c_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}\\
&= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad (\text{se usó que } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2})
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x dx = 1.$$

Tarea para el alumno: tomar c_k como el extremo derecho de cada intervalo.