4.1 VALORES Y VECTORES PROPIOS

INGENIERÍA Y LCC

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

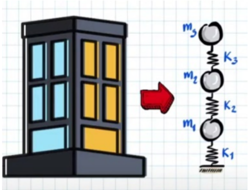
FACULTAD DE INGENIERÍA

IMPORTANTE

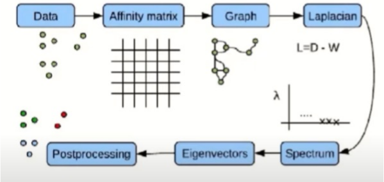
El presente material es sólo una *guía de los contenidos abordados en Álgebra*, utilizada por el docente en sus clases.
Puede resultar de apoyo para estudiar, pero de ninguna forma es la bibliografía principal de la materia ni abarca todos los contenidos a estudiar.

¿En qué contexto se hacen necesarios?

Sistemas masa-resorte

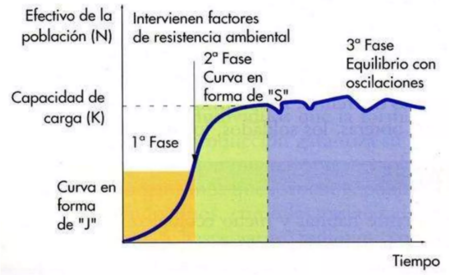


Reconocimiento facial



Diseño de videojuegos

Estudio de crecimiento poblacional



CONTENIDOS PREVIOS

- U2.1: Matrices
- U2.2: Función determinante
- U2.3: Sistemas de ecuaciones lineales
- U3.1: Transformaciones lineales
- U3.2: Matriz asociada a una transformación lineal
- Unidad 4: Valores y vectores propios. Diagonalización

Contenidos previos

Teorema: Aplicación lineal definida por una matriz

Sea A una matriz $m \times n$. La transformación T definida por:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

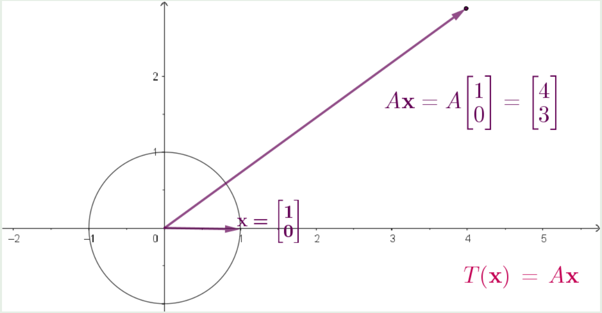
Observaciones:

1. El recíproco de este teorema también es válido.
2. Si A es $n \times n$, la transformación lineal es de $\mathbb{R}^n$, en sí mismo (y la llamamos **endomorfismo**).
3. Si se transforman los puntos de toda una recta (segmento o semirrecta) su imagen será otra recta (segmento o semirrecta).

Ejemplo

Ejemplo

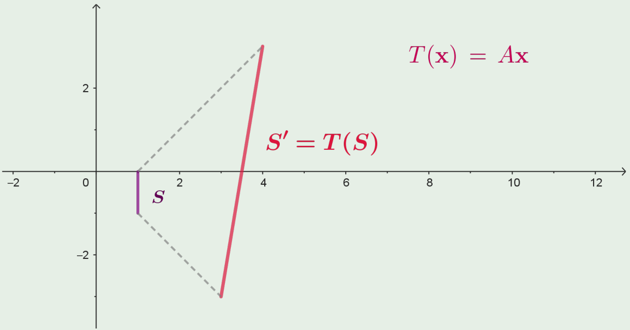
Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ tiene la propiedad de ser lineal.



Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ tiene la propiedad de ser lineal.



Definiciones

Definición (Valor y Vector Propio)

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Un vector $\mathbf{x}$ no nulo de $\mathbb{R}^n$, es vector propio de A, si existe un escalar λ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

El escalar λ que verifica esta igualdad es valor propio de A y se dice que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

En la bibliografía se encuentra este tema con distintos nombres:

- Valor característico y vector característico.
- Autovalor y autovector.
- Eigenvalor y eigenvector.

Definiciones

Definición (Valor y Vector Propio)

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Un vector $\mathbf{x}$ no nulo de $\mathbb{R}^n$, es vector propio de A, si existe un escalar λ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

El escalar λ que verifica esta igualdad es valor propio de A y se dice que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

Ovservaciones:

- A es la matriz asociada estándar del operador lineal T sobre $\mathbb{R}^n$.
- La ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ tiene dos incógnitas, λ y $\mathbf{x}$.

Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A. ¿Cuál es el valor propio al que está asociado?
2. ¿$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$, es vector propio de A?¿Qué conjetura se puede hacer?¿Puede demostrarla?
3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ NO es un vector propio de A.

Revisamos geométricamente cuántos vectores porpios (linealmente independientes tiene la matriz A, en el siguiente gif

Interpretación geométrica

En la definición pedimos que el vector propio verifique:

$$\underbrace{A\mathbf{x}}_{T(\mathbf{x})} \qquad = \qquad \underbrace{\lambda\mathbf{x}}_{\text{múltiplo del vector } \mathbf{x}}$$

Es decir, que los vectores propios son aquellos cuya dirección permanece invariante bajo la transformación lineal de matriz asociada A.

¿Cómo se calculan los valores y vectores propios?

Por definición, un vector propio $\mathbf{x}$ de una matriz A_n, es un vector de $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{aligned}
&A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} && \text{para algún escalar } \lambda \\
&A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&A\mathbf{x} - \lambda(I_n\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
&(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{x}$ fuera un vector propio de A, el sistema homogéneo que queda planteado tendría al menos una solución no trivial (el vector propio $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), y por lo tanto, infinitas soluciones.
Luego:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Propiedad

Teorema

Teorema Sea A una matriz de orden n.

1. *Si un escalar λ es valor propio de A entonces*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

2. *Los vectores propios de A asociados a λ son las soluciones no nulas del sistema*

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Demostrar 1: Hecho en la diapositiva anterior.

Ecuación característica

Definición

La ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se llama **ecuación característica** de A. Cuando se desarrolla en forma de polinomio, se llama **polinomio característico**:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

- Que el sistema homogéneo de ecuaciones tenga soluciones diferentes de cero es equivalente a que la matriz de coeficientes $A - \lambda I_n$ no sea inversible, por eso $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Los valores propios de A, de orden n, son las raíces de su polinomio característico. Como este polinomio siempre es de grado n, tiene n raíces. Entonces A tiene n valores propios que pueden ser todos diferentes, repetidos o, inclusive, complejos.
- El sistema $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones, siendo todas sus soluciones no nulas vectores propios de A asociados al valor propio λ.

Ejemplo 1

Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Primero hallamos el polinomio característico de A

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(6-\lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 21 \;=\; (\lambda - 7)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica de A es

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

De donde se obtienen los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$.Ambos tienen multiplicidad algebraica 1:

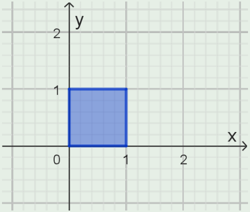
$$m_{a_7} = 1 \qquad \text{y} \qquad m_{a_3} = 1$$

Ejemplo 2

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tiene como matriz asociada a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Hallar la imagen del cuadrado de la figura y graficarla:



2. De ser posible clasificar geométricamente a T.
3. A partir de la observación de las gráficas, ¿puede encontrar algún vector propio de A?
4. Si encontró algún vector propio, encuentre el valor propio λ que le corresponde.

Ejemplo 3

Ejemplo

Dadas las matrices:

$$a)\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}\qquad b)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\qquad c)\begin{bmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{bmatrix}\qquad d)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la euación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Indique, si es que corresponde, cuál de los siguientes es vector propio de alguna/s matriz/ces del inciso (1) y a cuál de sus valores propios corresponde:

$$I)\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\qquad II)\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}\qquad III)\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Ejemplo

Dadas las matrices: $a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

1. Encontrar el polinomio característico de cada matriz.
2. Plantear la euación característica de cada una.
3. Encontrar los valores propios de las matrices dadas.
4. Analizar si los siguientes vectores son o no vectores propios de la matriz correspondiente:

$$a) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definiciones

Definición

Si un valor propio λ_i aparece como una raíz múltiple (repetida k veces) del polinomio característico, entonces se dice que λ tiene **multiplicidad algebraica** k. Esto se escribe: $\mathbf{m}_{a_\lambda} = k$

Definición

Espacio propio de un valor propio El Espacio Propio de un valor propio λ, de una matriz A de orden n, es el conjunto de los vectores propios correspondientes a λ, junto con el vector nulo.

Este espacio vectorial es siempre un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y se denota con E_λ:

$$E_\lambda = \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ es vector propio de } \lambda\}$$

La dimensión de este subespacio se llama **multiplicidad geométrica de** λ y se designa con $\mathbf{m}_{g_\lambda}$

Ejemplo 1

Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$.Para obtener sus vectores propios, debe resolver dos veces el sistema lineal homogéneo de matriz a $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, una vez para $\lambda_1 = 7$ y otra para $\lambda_2 = 3$.

Para $\lambda_1 = 7$, la matriz aumentada asociada al sistema $(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ resulta $\begin{bmatrix} -3 & 1 & : & 0 \\ 3 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$De su solución, se deduce que cada vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$ es de la forma $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, con $t \neq 0$.

Con esto, $E_7 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

(resulta $\lambda_1 = 7$ con $\mathbf{m}_{g_7} = \mathbf{m}_{a_7} = 1$)

Ejemplo 1

Ejemplo

Encontrar los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Los valores propios de A: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 3$.

Repita el procedimiento anterior para hallar E_3.
El espacio propio de $\lambda_2 = 3$ es

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta $\lambda_2 = 3$ con $\mathbf{m}_{g_3} = \mathbf{m}_{a_3} = 1$)

Ejemplo especial

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\left[P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \;=\; \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^3 \right]$ Así,
la ecuación característica de A es $(4-\lambda)^3 = 0$.
De donde, el único valor propio de A es $\lambda = 4$.
Al buscar los vectores propios de 4 como soluciones no nulas del sistema $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } t \neq 0$$

Ejemplo especial

Ejemplo

El espacio propio de $\lambda = 4$ es

$$E_4 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(resulta $\lambda = 4$ multiplicidad geométrica igual a 1)

En este ejemplo,

- $\mathbf{m}_{a_4} = 3$
- $\mathbf{m}_{g_4} = 1$

¿Casualidad? NO

Propiedades

Teorema

Si A es una matriz de orden n, entonces:
La multiplicidad geométrica de un valor propio λ de A, verifica la siguiente desigualdad:

$$1 \leq \mathbf{m}_{g_\lambda} \leq \mathbf{m}_{a_\lambda} \leq n.$$

Observación: Del teorema anterior se desprende que si la multiplicidad algebraica de λ es 1, entonces la multiplicidad geométrica también es necesariamente 1.

Teorema

Sea A una matriz de orden n.
Si A tiene n valores propios distintos, entonces A tiene un conjunto de n vectores propios LI.

Propiedades

Teorema

Sea A una matriz de orden n.

1. *La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de dicha matriz.*
2. *El producto de los valores propios de una matriz A es igual $\det(A)$.*

Teorema (Valores propios de matrices especiales)

1. *A es inversible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.*
2. *Si λ es un valor propio de la matriz inversible A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.*
3. *Si A es una matriz triangular (superior, inferior o diagonal) los elementos de su diagonal principal son sus valores propios.*
4. *Si A es matriz simétrica, entonces sus valores propios son reales y los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.*

Demostrar 2, 3

Propiedades

Propiedad

Se cumplen las siguientes propiedades para una matriz A de orden n

1. *Si λ es valor propio de A entonces λ es valor propio de A^T.*
2. *Si λ es valor propio de A entonces $k\lambda$ ($k \neq 0$) es valor propio de kA.*
3. *Sea A una matriz de orden n. Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{x}$ y sea k un entero positivo. Entonces λ^k es un valor propio de A^k y $\mathbf{x}$ es un vector propio correspondiente.*

Demostrar 1, 2 y 3 para $k = 2$ y $k = 3$