

Diagonalización

Se acostumbra hacer referencia a la diagonalización de una matriz cuadrada A o también a la diagonalización del operador lineal T de matriz asociada estándar A.

La diagonalización, si es posible, es una transformación de semejanza de una matriz A a su forma diagonal, conservando los valores propios de A.

La ventaja de la transformación, es la sencillez que tendría la matriz A en su forma diagonal. La mejor situación posible se logra cuando una matriz cuadrada es **semejante** a una matriz diagonal.

Definición Una matriz A de nxn es **diagonalizable**, si existe una matriz diagonal D tal que A sea semejante a D; es decir, si existe una matriz P inversible o no singular de nxn tal que

$$P^{-1}AP = D$$

Se dice que la matriz P **diagonaliza** a A.

Forma diagonal de una matriz o diagonalización de matrices

El teorema siguiente es una herramienta básica en el estudio de la diagonalización, pues revela la técnica para que algunas matrices se transformen en una matriz diagonal, conservando los autovalores.

Teorema Sea A una matriz de nxn con n vectores propios linealmente independientes. Si se colocan estos vectores como columnas de una matriz P, entonces

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con $i = 1, 2, \dots, n$ es autovalor de A.

Demostración

Sea P la matriz nxn cuyas columnas son los vectores propios v_1, v_2, \dots, v_n linealmente independientes de A, es decir

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

Luego, el producto AP es la matriz nxn cuyas columnas son Av_1, Av_2, \dots, Av_n ,

$$AP = [Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_n]$$

Por definición de vector propio, remplazamos Av_1, Av_2, \dots, Av_n por $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n$

$$AP = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_n v_n]$$

Escribiendo de manera conveniente

$$AP = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

Multiplicando por P^{-1} ambos miembros, se tiene

$$P^{-1}AP = D,$$

siendo D la matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal.

Observaciones

. La expresión $P^{-1}AP = D$ equivale a las expresiones $A = PDP^{-1}$ y también $AP = PD$, la ventaja de la última expresión es que no necesita del cálculo de la matriz inversa.

. La expresión $A = PDP^{-1}$ es una factorización de la matriz A muy útil en aplicaciones prácticas, como por ejemplo cuando se pretende calcular una potencia natural de A, es decir, si $r \in \mathbb{N}$, $A^r = (PDP^{-1})^r = P D^r P^{-1}$, siendo D^r un cálculo sencillo pues D es diagonal.

. La matriz P es inversible porque sus columnas (vectores propios de A) son linealmente independientes.

. La matriz P que diagonaliza a A no es única, porque un vector propio x puede multiplicarse por una constante no nula y seguir siendo vector propio y, en consecuencia, D tampoco es única.

. Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces los n vectores propios correspondientes a valores propios distintos son automáticamente linealmente independientes. Por lo tanto, cualquier matriz $n \times n$ con n valores propios distintos es diagonalizable.

. No todas las matrices cuadradas poseen n vectores propios linealmente independientes, por lo tanto, no todas las matrices son diagonalizables.

. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable se desprende del teorema anterior: la matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo Diagonalizar, si es posible, las matrices

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

a) La matriz P tiene como columnas los vectores propios de A calculados anteriormente, se acostumbra a colocar los vectores que están en las bases de los espacios característicos, es decir

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Matriz que diagonaliza a } A)$$

Luego, calculando P^{-1} y resolviendo el producto matricial indicado debajo, queda la matriz diagonal D con los valores propios de A en la diagonal, es decir

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Se dice que **A se ha diagonalizado** (es semejante a una matriz diagonal), en otras palabras, D es la forma diagonal de A conservando los valores propios de A . Observar que las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada λ son iguales, es decir

$$M_{\text{alg}}(\lambda_1 = 1) = M_{\text{geo}}(\lambda_1 = 1) = 1 \quad \text{y} \quad M_{\text{alg}}(\lambda' = 5) = M_{\text{geo}}(\lambda' = 5) = 2.$$

b) Para diagonalizar B , comenzamos calculando los valores propios. Como se trata de una matriz triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal, es decir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$$

La multiplicidad algebraica de λ es 2, $M_{\text{alg}}(\lambda = 0) = 2$. Además

$$\text{traza}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad \det(B) = \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

B es una matriz no inversible o singular.

Se observa que **cualquier matriz cuadrada con al menos un valor propio nulo, no es inversible y, recíprocamente.**

Para obtener los vectores propios, resolvemos el sistema $(B - \lambda I)x = \mathbf{0}$ con $\lambda = 0$, es decir, $Bx = 0$; su espacio propio es

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Se observa que la dimensión de este espacio es 1, o sea que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es 1, en símbolos

$$M_{\text{geo}}(\lambda = 0) = 1,$$

es decir, hay un sólo vector propio linealmente independiente para la matriz B , entonces la matriz P de 2×2 que diagonalizaría a B **no existe** (se deberían tener dos vectores propios linealmente independientes para formar las columnas de P). Luego, **B no es diagonalizable**.

Observar que la multiplicidad geométrica de λ no coincide con su multiplicidad algebraica. Este hecho permite dar una **condición necesaria y suficiente** de diagonalización que se enuncia en el siguiente criterio.

Criterio de diagonalización de matrices

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio son números iguales.

Diagonalización ortogonal

Teorema espectral Si la matriz A de $n \times n$ es **simétrica**, entonces existe la matriz Q **ortogonal** de $n \times n$ cuyas columnas son los autovectores de A tal que

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con $i = 1, 2, \dots, n$ es autovalor de A y Q es la matriz que **diagonaliza ortogonalmente** a A .

Observaciones

- . Una matriz Q de $n \times n$ es **ortogonal** si sus columnas forman una base ortonormal del espacio \mathbb{R}^n .
- . Recordar que una interesante propiedad de las matrices ortogonales es que satisfacen: si Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^T$.
- . Una matriz simétrica A siempre es semejante a su forma diagonal D con los valores propios de A en la diagonal.
- . Toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente. En otras palabras, que una matriz cuadrada sea simétrica, es una condición necesaria y suficiente para que dicha matriz sea diagonalizable ortogonalmente. O bien, A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Ejemplo Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

Como la matriz es simétrica, se podrá diagonalizar ortogonalmente, es decir, existe la matriz Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A .

Resolviendo la ecuación característica, $\det(A - \lambda I) = 0$, se obtienen los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$ que verifican $\text{tr}(A) = 5$ y $\det(A) = 0$.

Los espacios característicos son $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ y $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2 \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ (observar que los

espacios propios son ortogonales, pues el producto escalar de los vectores propios es cero) y

las bases ortonormales son $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$, respectivamente. Luego, la matriz

Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A es

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 1 & 2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ (no es única).}$$

Por lo tanto,

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que la matriz A se ha diagonalizado ortogonalmente.

Observación

Una descomposición usada en las aplicaciones para la matriz A simétrica es

$$A = Q D Q^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i q_i q_i^T,$$

donde λ_i es valor propio de A y q_i es vector columna de Q para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Esta descomposición se conoce como teorema espectral y expresa que A es una combinación lineal de las proyecciones unidimensionales $q_i q_i^T$, que descomponen a cualquier vector w en sus proyecciones o componentes $p = q_i (q_i^T w)$ en las direcciones de los vectores propios unitarios q_i que constituyen un conjunto de ejes mutuamente ortogonales. Estas proyecciones individuales p están ponderadas por λ_i .

Ejemplo Realizar la descomposición espectral de $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

Solución

Resolviendo la ecuación característica de A simétrica, se obtienen los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 9$.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para cada λ , se obtiene la

$$\text{matriz ortogonal } Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T = 4 \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

que es la descomposición espectral de A.

Se verifica, realizando los cálculos que

$$4 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = A$$

Propiedad de matrices semejantes

Si A y B son dos matrices de $n \times n$ semejantes, entonces tienen los mismos valores propios o, equivalentemente tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \quad \text{pues } A \text{ y } B \text{ son matrices semejantes por hipótesis} \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) \quad \text{por álgebra de matrices} \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \quad \text{por álgebra matricial} \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \quad \text{por propiedad de determinantes} \\ &= \det(A - \lambda I) \quad \text{pues } \det(P^{-1}) \text{ es el inverso multiplicativo de } \det(P) \end{aligned}$$

Luego

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

Es decir, A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios. El enunciado recíproco es falso.

Teorema importante

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

- a) A es inversible.
- b) A es un producto de matrices elementales.
- c) A es equivalente por filas a la matriz identidad I .
- d) La forma escalonada reducida de A es la identidad I .
- e) $\text{rango}(A) = n$
- f) $\det(A) \neq 0$
- g) El sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible determinado para todo vector \mathbf{b} de \mathbb{R}^n .
- h) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.
- i) Los vectores fila de A son linealmente independientes.
- j) Los vectores columna de A son linealmente independientes.
- k) Los vectores fila de A generan \mathbb{R}^n .
- l) Los vectores columna de A generan \mathbb{R}^n .
- m) Los vectores fila de A forman una base de \mathbb{R}^n .
- n) Los vectores columna de A forman una base de \mathbb{R}^n .
- o) El operador T de matriz asociada estándar A es un isomorfismo.
- p) La nulidad del operador T es 0.
- q) El rango del operador T es n .
- r) 0 no es un autovalor de A .