# Trabajo Práctico 4: Valores y vectores propios. Diagonalización

## PARTE A

1. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y los vectores $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $y\, v = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$:

   *a*) Grafique $u$ y $Au$, determinando a partir de la gráfica si $u$ es vector característico de $A$. Realice el mismo análisis para $v$ y $Av$.

   *b*) Corrobore utilizando el link `https://www.geogebra.org/m/w55zgqf`.

   *c*) Evalúe la misma situación en forma analítica y determine el valor característico.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal "proyección ortogonal sobre el plano $xz$".

   *a*) Grafique y conjeture cuáles son los espacios característicos asociados a $T$.

   *b*) Encuentre en forma analítica los espacios característicos de la matriz asociada a $T$.

3. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre:

   *a*) Los espacios característicos y determine su dimensión.

   *b*) Una matriz diagonal semejante a $A$.

   *c*) Otra matriz semejante a $A$.

4. Sea $C$ la matriz asociada estándar al operador lineal en $\mathbb{R}^2$, rotación en sentido antihorario, con ángulo $\pi$.

   *a*) Determine si $C$ es diagonalizable. En caso afirmativo escriba la matriz $P$ que diagonaliza a $C$. ¿$P$ es única?

   *b*) Verifique la existencia de una matriz diagonal, semejante a $C$.

5. Sea $T$ el operador lineal nulo en $\mathbb{R}^2$.

   *a*) Escriba el esquema de la transformación lineal.

   *b*) Encuentre los valores y vectores característicos de la matriz asociada a la transformación.

   *c*) Halle el/los espacios característicos de la matriz asociada al operador lineal, su base y dimensión.

   *d*) ¿La matriz asociada a $T$, es diagonalizable?

6. Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

   *a*) Determine espacios característicos y dé dos vectores característicos de cada subespacio y dos que no lo sean.

*b*) Justifique si $B$ es diagonalizable.

7. Dado el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T((x, y)) = (3x - 2y, -2x)$:

   *a*) Sin realizar cálculos, determine si la matriz asociada a $T$ es invertible, simétrica, diagonalizable.

   *b*) Calcule los valores y vectores característicos.

   *c*) En caso de que sea posible, obtén una matriz ortonormal que diagonalice a la matriz asociada a $T$.

Investigue los siguientes links, a fin de verificar cálculos:

- `https://www.youtube.com/watch?v=QNHKYPOhm7E`
- `https://www.youtube.com/watch?v=KEX-WL5xBJo`
- `https://matrixcalc.org/es`

8. Sea $P(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz $A$, $P(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{2})^3(\lambda - 5)$. Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas:

   *a*) El orden de la matriz $A$ es ..........................................................

   *b*) ¿Qué puede asegurar acerca de $\det(A - 3I)$? ..............................

   *c*) Los valores característicos de $B = 5A$ son ........................

   *d*) Los valores característicos de $A^T$ son ................................

   *e*) $\det(A^T)$ es ......................................

   *f*) Si $M$ es una matriz semejante a $A$, entonces los valores característicos de $M$ son ........

   *g*) ¿A es inversible? Justifique su respuesta.

   *h*) En caso de serlo, los valores característicos de $A^{-1}$ son ...............

   *i*) Una condición necesaria pero no suficiente para que $A$ sea *diagonalizable*, es ..................

   *j*) Los valores característicos de $A^4$ son ........................

9. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

   *a*) El espacio característico de $A$ es el espacio nulo de la transformación lineal cuya matriz asociada es $(A - \lambda I)$.

   *b*) La matriz $A$ y una matriz escalonada de $A$ tienen los mismos valores característicos.

   *c*) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores característicos linealmente independientes, entonces corresponden a valores característicos distintos.

10. *Actividad grupal* (trabajar en grupos de 3 o 4 alumnos)

    Si $A$ de orden $n$, es una matriz triangular superior o inferior, entonces los valores característicos son los elementos de la diagonal principal.

    a) Dé un ejemplo.

    b) Demuestre la propiedad.

**Ejercicio Nº 11:** Demuestre que:

a) La transformación semejanza $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que $T(A) = C^{-1}AC$ es una transformación lineal, siendo $C$ una matriz fija de orden $n \times n$.

b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de la matriz $A$, asociados al valor propio $\lambda$, entonces $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es vector propio de $A$ asociado a $\lambda$, siendo $\alpha$, $\beta$ y $\lambda$ escalares.

## Parte B

**Ejercicio 1:** Investigue y determine los valores y vectores característicos del operador lineal rotación en $\mathbb{R}^2$.

**Ejercicio 2:** En la matriz $A$ del Ejercicio 3 de la Parte A: demuestre que los espacios característicos son subespacios de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto usual.

**Ejercicio 3:** Calcule $A^5$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

utilizando propiedades de matrices semejantes a una matriz diagonal.

**Ejercicio 4:** Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

a) Los vectores columna de una matriz $P$ que diagonaliza a una matriz $A$ son vectores linealmente independientes.

b) Si $P^{-1}AP = D$, entonces $A^3 = PD^3P^{-1}$. Siendo $A$, $P$ y $D$ matrices de orden $n \times n$.

article [utf8]inputenc amsmath, amssymb graphicx enumitem

[leftmargin=*]

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

siendo las proposiciones:

c)
- $p$: "A es simétrica"
- $q$: "A es diagonalizable ortogonalmente"

d) Si $A$ es una matriz **inversible** y ortogonalmente **diagonalizable**, entonces $A^{-1}$ es ortogonalmente **diagonalizable**.

**Ejercicio 5:** Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) Entonces la solución de la ecuación característica es

$$\lambda = \frac{1}{2}\left((\ldots) \pm \sqrt{(\ldots)^2 + \ldots}\right)$$

*Complete para que el enunciado resulte verdadero.*

b) Asigne valores a los elementos de $A$ para que tenga:
- Valores característicos reales distintos
- Valores característicos iguales

**Ejercicio 6:** Complete el siguiente enunciado de manera tal que resulte verdadero:

Sean $A$ y $C$ matrices semejantes y $\lambda = -2$ es valor característico de una matriz $C$ de $2 \times 2$, entonces

$$\ldots \text{ es un valor característico de la matriz } \left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$$

**Ejercicio 8:** Si los pares de valores y vectores característicos de una matriz $A$ son:

$$(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}), \quad (4, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Entonces:

a) Escriba la ley de la transformación cuya matriz asociada es $A$.

b) Determine los **subespacios** característicos.