Análisis Matemático I
Clase 19: Funciones trascendentes (parte 2). Regla de L'Hopital

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2025

Función Exponencial

Función exponencial

Definimos la función exponencial, *exp*, como la inversa de la función logaritmo. Es decir, $exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dada por:

$$exp(x) = ln^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observar: $exp(x) := e^x$,

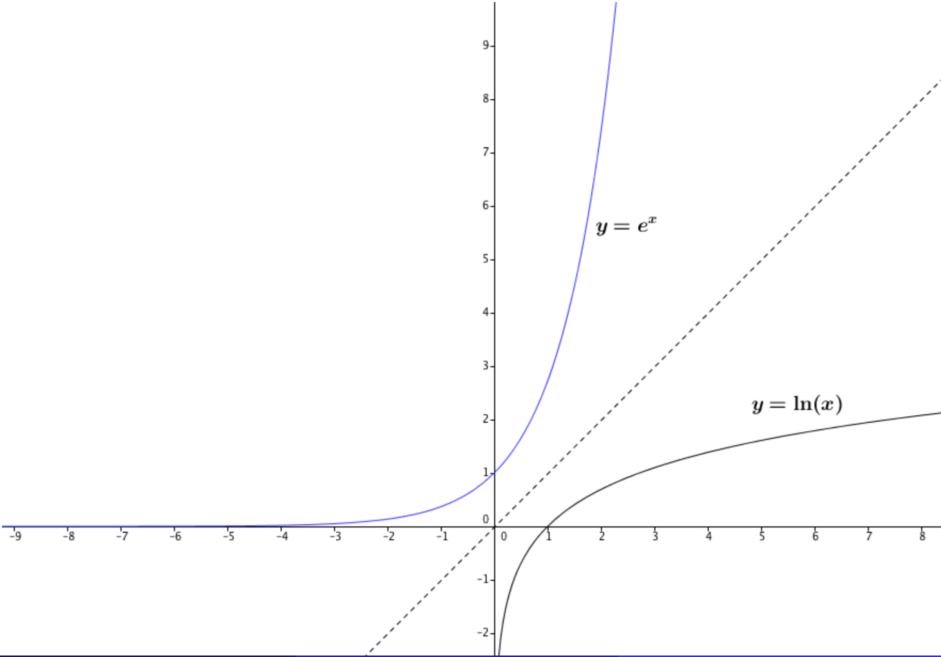
$$ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{ln(y)} = y \quad (y > 0)$$

Además, si $y = e^x$, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Así:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$



9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
$y = e^x$
$y = \ln(x)$

Función Exponenciales generales

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x ln(a)}.$$

Observaciones generales:

- La función $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.
- Denotamos por $g(x) = log_a(x)$ a la función inversa de a^x.

Derivada de exponenciales generales

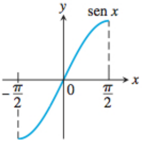
Si $a > 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx} a^x = ln(a) a^x.$$

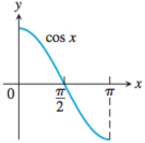
Tarea en casa para el alumno: Usar regla de la cadena en la definición de a^x.

Funciones trigonométricas

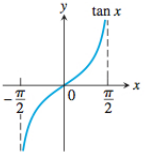
Las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas:



$y = \operatorname{sen} x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$



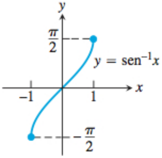
$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

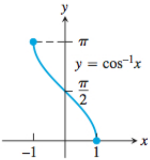
Y sus inversas son:

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$
Rango: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



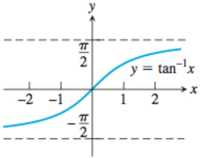
(a)

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$
Rango: $0 \leq y \leq \pi$



(b)

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



(c)

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De forma similar se puede probar que:

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$
$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De forma similar se puede probar que:

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$
$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx =$$

Funciones hiperbólicas

La utilidad principal de las funciones hiperbólicas en ingeniería radica en representar de forma concisa expresiones complejas obtenidas en el análisis de vibraciones. También, hay casos de estructuras donde se han usado funciones hiperbólicas para su diseño, como es el caso del Arco Gateway en E.E.U.U. donse se usó el coseno hiperbólico.

Funciones Hiperbólicas

Funciones Hiperbólicas

Seno hiperbólico:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

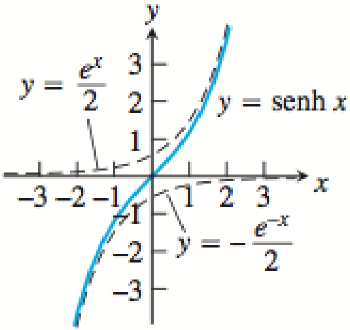
Coseno hiperbólico:

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

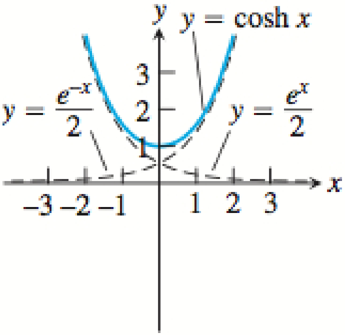
Tangente hiperbólica:

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Observar que el dominio de las funciones hiperbólicas anteriores es $\mathbb{R}$.



(a)



(b)

Seno hiperbólico:

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

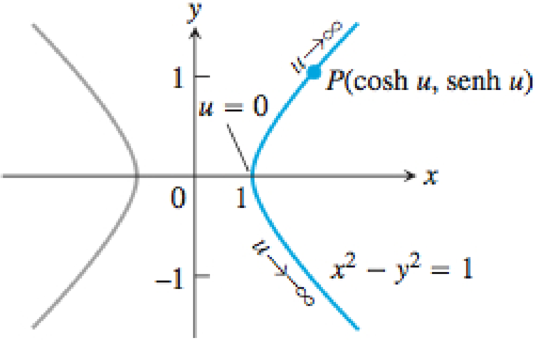
Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A partir de la relación:

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

se puede deducir que los puntos $x = cosh(u)$ y $y = senh(u)$ se encuentran en la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esta es la razón del nombre **funciones hiperbólicas**.



Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(senh)(x) = cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación $'0/0'$).

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación $'0/0'$). Sin embargo, si dividimos ambos miembros por $x - x_0$ se obtiene (usando teorema del valor medio):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}$$

donde c_x y d_x están entre x y x_0.

Esto sugiere que uno podría calcular un límite 'indeterminado' a través de un cociente de derivadas.

Regla de L'Hopital

Sean f y g funciones derivables en (a, b). Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b). Supongamos que el límite:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe o es $+\infty$ o $-\infty$. Entonces:

(1) Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) Si $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observaciones

- La regla de L'Hopital vale para cualquier tipo de límite: límites ordinarios (digamos $x \to a$), laterales , $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.
- Los enunciados análogos cuando $x \to b$ o $x \to b^-$ son también ciertos.

Regla de L'Hopital

Ejemplos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen(x)}{x}$$

Ejemplos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen(x)}{x}$$

Solución: sean $f(x) = x - sen(x)$ y $g(x) = x$ (ambas son funciones derivables). Observar que f y g tienden a 0 cuando $x \to 0$ (tenemos un límite indeterminado, estamos en la condición (1) de la regla de L'Hopital). Para aplicar la regla de L'Hopital, verificamos si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{1} = 0.$$

Luego, aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{1} = 0.$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

Ejemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.
Ejemplos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Solución: sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$ (ambas son funciones derivables). Observar que el denominador tiende a infinito cuando $x \to +\infty$ (estamos en el ítem (2) de la regla de L'Hopital). Sin embargo, el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}$$

vuelve a ser indeterminado (el denominador tiende a infinito). Intentamos aplicar la regla de L'Hopital a ese límite. Analizamos el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2, que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2, que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

El ejercicio anteror se realizó paso a paso. El estudiante puede hacerlo así directamente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

siempre y cuando diga que está usando la regla de L'Hopital y esté corroborando que en cada paso esté en las condiciones (1) o (2) de la regla. Veamos un ejemplo donde se aplica la regla de L'Hopital sin cuidado.

Supongamos que queremos calcular el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Observar que el denominador es cero en $x = 1$ por ende no podemos aplicar la regla del cociente de límites. Pero podemos factorizar y obtener:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x-2)} = -4.$$

Sin embargo, podríamos haber usado la regla de L'Hopital dado que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

¿Dónde está el error?

En otros casos, es necesario primero transformar el límite para que pueda expresarse en la forma de cociente. Por ejemplo:

- Para el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} ln(x)$$

hay dos alternativas:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

o:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

La mejor alternativa es la primera.

Ejercicio de repaso: tasas relacionadas

Volumen En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?