Análisis Matemático I
Clase 20: Técnicas de integración: integración por partes. Integrales impropias.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2025

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Por ejemplo, vamos a utilizarla para calcular:

$$\int x.cos(x)dx, \int ln(x)dx, \int e^x sen(x)dx, etc.$$

Integración por partes

Idea: sean f y g funciones derivables. Entonces la regla del producto para derivadas implica:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x).$$

Así, la función $f \cdot g$ es una antiderivada de $f' \cdot g + f \cdot g'$. Luego:

$$\int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) dx = f \cdot g + C.$$

Obtenemos entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Cuando calculemos $\int f'(x)g(x)dx$ colocaremos una constante C, luego podemos reescribir la igualdad anterior en la forma:

Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Para recordar mejor la fórmula anterior, se suele llamar:

$$u = f(x), \qquad v = g(x)$$

así:

$$du = f'(x)dx, \qquad dv = g'(x)dx$$

y entonces la fórmula de integración por partes se puede escribir:

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.
Ejemplos:

- $$\int x.cos(x)dx =$$

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.
Ejemplos:

- $$\int x.cos(x)dx =$$

  Solución: tenemos dos posibilidades para u y para dv. Para u elegimos la que es fácil de derivar y cuya derivada es más simple que u. Y para dv la que es fácil de integrar y cuya antiderivada no es mucho más compleja que v. Así:

  $$u = x \Rightarrow du = 1\, dx.$$

  $$dv = cos(x)\, dx \Rightarrow v = sen(x).$$

Integración por partes

Reemplazando en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int x.cos(x)\,dx = x.sen(x) - \int sen(x)\,dx = x.sen(x) + cos(x) + C.$$

Integración por partes para integrales definidas

Sean f y g funciones derivables en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Cuidado: la variable de integración sigue siendo x (de hecho, u y v son funciones de x), así que no hay que cambiar los extremos de integración.

Integración por partes

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

  Solución: en este caso no podemos elegir $dv = ln(x)dx$ pues deberíamos integrar $ln(x)$ que es justamente lo que se quiere hacer. Entonces tomamos:

  $$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

  $$dv = 1\,dx \Rightarrow v = x$$

  Luego:

  $$\int_1^2 ln(x)dx = x.ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}\,dx = 2ln(2) - 1.$$

Integrales impropias

Hasta ahora hemos calculado integrales de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde:

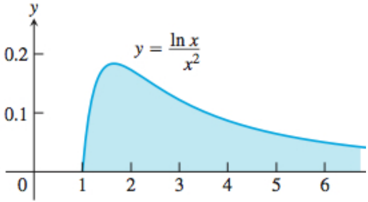
- el intervalo $[a, b]$ es acotado,
- el integrando f es continuo en $[a, b]$ (y por ende acotado en $[a, b]$).

Vamos a considerar integrales en donde al menos una de estas propiedades no se cumple. Es decir, calcularemos integrales donde:

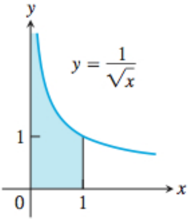
1. El intervalo $[a, b]$ no es acotado (va a ser de la forma: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.)
2. La función f presenta discontinuidades esenciales en el intervalo de integración.

Integrales impropias

Integrales del primer tipo:



Integrales del segundo tipo:



Integrales impropias de tipo I

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotados se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. Entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Sea f una función continua en $(-\infty, b]$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Integrales impropias de tipo I (continuación)

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotado se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

  donde $c \in \mathbb{R}$.

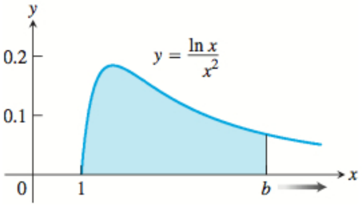
En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia es convergente. Si el límite no existe, entonces decimos que la integral impropia diverge.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.



Ejemplos:

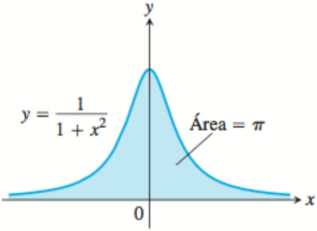
1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Ejemplos:

1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$



Integrales impropias de tipo II

Las siguientes integrales con integrandos que tienen discontinuidades en el intervalo de integración se denominan integrales impropias de tipo II:

- Sea f una función continua en $(a, b]$ y discontinua en $x = a$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

- Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en $x = b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Integrales impropias de tipo II (continuación)

- Si $c \in (a, b)$ y f es discontinua en c y continua en $[a, c) \cap (c, b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia converge y que el valor de la integral es el valor del límite. Si el límite no existe, decimos que la integral diverge.

Ejemplo:

- Estudie el comportamiento de:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

- Evalúe (sólo plantear):

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Información del segundo parcial: Lunes 2 de Junio

- En teoría, desde tasas relacionadas hasta clase 20 inclusive. En práctica, TP3-TP4-TP5-TP6 (excepto Sección 2: descomposición en funciones simples).
- El turno mañana rendirá de 9 a 10:45 h y el turno tarde de 17 a 18:45 h. Cada comisión rinde en el aula donde cursa habitualmente, excepto los recursantes del turno mañana que rendirán en el aula 17.
- Se podrá usar calculadora. Se pide a los alumnos que ingresen al aula donde rinden y que no esperen al docente para hacerlo.

Repaso: linealización y diferenciales

- Defina linealización de f en $x = a$ y mencione para qué se utiliza. Interpretaer geométricamente.
- Defina diferencial de f en a y explique para qué se utiliza.Interpretaer geométricamente.
- Estime

$$\sqrt{16.5}.$$

- La cáscara esférica que se ilustra tiene un espesor de 0.2 cm. Utilizando diferenciales, estime el volumen de dicha cáscara.

Área máxima Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?