Análisis Matemático I
Clase 21: Método de integración por fracciones simples. Sucesiones. Introducción a Series numéricas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2025

Método de descomposición de fracciones simples

Objetivo: calcular integrales de funciones racionales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde P y Q no tiene raíces en común y donde Q sólo tiene raíces reales distintas (los casos de raíces múltiples o complejas no se verán pero se pueden trabajar en forma similar). Además se asume que el grado de P es menor al de Q. Si esto no fuera así, se divide P entre Q y se aplica la descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el cociente y R el resto. Entonces se aplica el método a $R(x)/Q(x)$.

Ejemplo 1: calcular:

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx.$$

Solución: observar que el grado del numerador es menor al del denominador. No es necesario dividir los polinomios.
El primer paso es factorizar el denominador. En este caso, el denominador ya está factorizado. Ahora vamos a descomponer la función racional en fracciones simples. Como los factores del denominador son todos distintos (el denominador tiene todas raíces distintas), planteamos la siguiente descomposición:

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}. \tag{1}$$

Buscamos los valores de A, B y C. Si sumamos las fracciones anteriores obtenemos:

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

Eliminando denominadores, se llega a:

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1).$$

- Si $x = 1$ en la igualdad anterior, se obtiene:

$$6 = A.2.4$$

  Así:

$$A = \frac{3}{4}.$$

- Si hacemos $x = -1$:

$$-2 = B.(-2).2$$

  y entonces:

$$B = \frac{1}{2}.$$

- Finalmente, si hacemos $x = -3$:

$$-2 = C.(-4)(-2)$$

y:

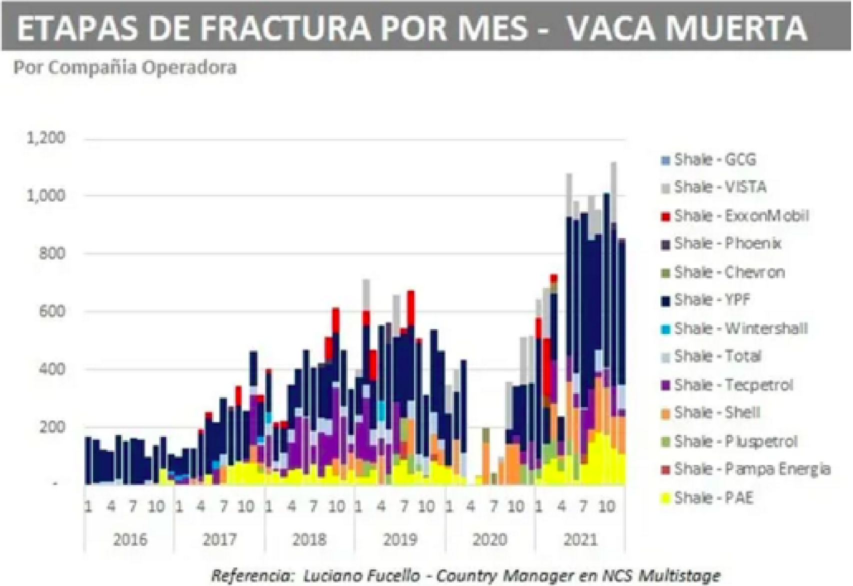
$$C = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, (1) implica:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

Las integrales resultantes se obtiene fácilmente.

Sucesiones


ETAPAS DE FRACTURA POR MES - VACA MUERTA
Por Compañia Operadora
1,200
1,000
800
600
400
200
-
1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10 1 4 7 10
2016
2017
2018
2019
2020
2021
Shale - GCG
Shale - VISTA
Shale - ExxonMobil
Shale - Phoenix
Shale - Chevron
Shale - YPF
Shale - Wintershall
Shale - Total
Shale - Tecpetrol
Shale - Shell
Shale - Pluspetrol
Shale - Pampa Energia
Shale - PAE
Referencia: Luciano Fucello - Country Manager en NCS Multistage

Intuitivamente, una sucesión es una lista *infinita* de números:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Observar que al hacer un listado se está ordenando la colección de números. Cada uno de los números a_1, a_2, ... representa un término de la sucesión.
Por ejemplo, la lista de números

$$2, 4, 6, ..., 2n, ...$$

es una sucesión. De forma genérica, la sucesión puede representarse por su término $n-$ésimo

$$a_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, para distintos valores de n obtenemos

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2$$

$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 4$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 6.$$

$$\vdots$$

Observar que una sucesión puede verse como una función que a cada número natural n le asigna un número a_n.

Sucesiones

Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales. En símbolos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotamos una sucesón por los símbolos

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o también} \qquad a_n.$$

Un ejemplo de sucesión es

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que puede escribirse también en la forma:

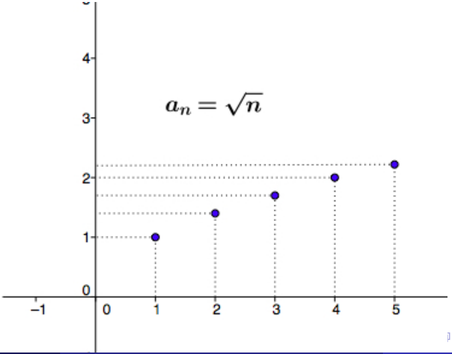
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}.$$

Gráfica de una sucesión

Dado que las sucesiones son funciones, es posible graficarlas. Sin embargo, a diferencia de las funciones que hemos estudiado, los gráficos de las sucesiones no constituyen curvas sino solamente una colección discreta de puntos. Por ejemplo, para la sucesión

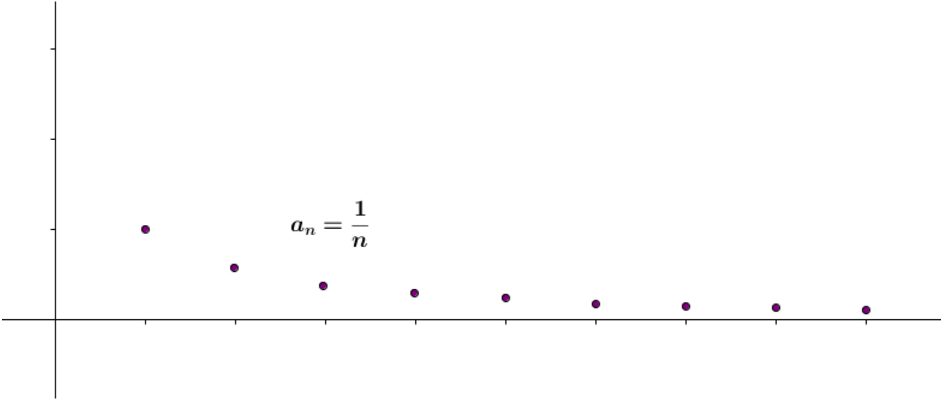
$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

obtenemos el siguiente gráfico

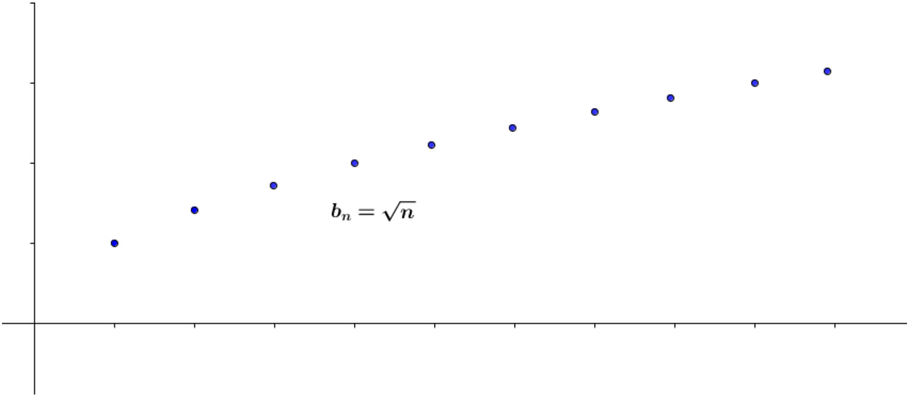


Convergencia de sucesiones

Consideremos los siguientes gráficos de sucesiones



Convergencia de sucesiones



Convergencia de sucesiones

En el primer caso diríamos: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mientras que en el segundo $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Si bien es posible definir el límite de sucesiones formalmente, no lo haremos en este curso. Definiremos a continuación la noción de convergencia de sucesiones.

Convergencia de sucesiones

Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

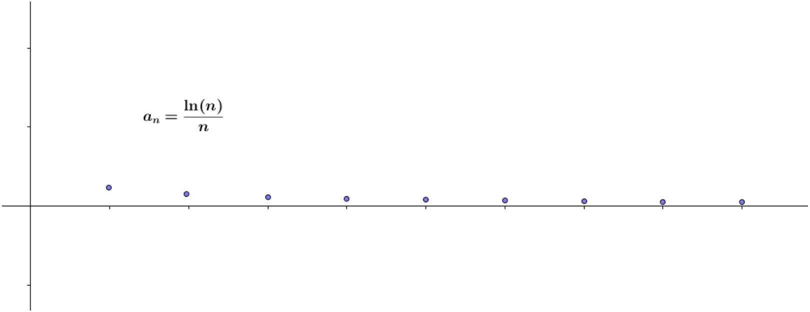
existe y es igual a L, entonces decimos que la sucesión a_n converge a L. Si el límite no existe, decimos que la sucesión diverge.

Todas las propiedades de límites de funciones se aplican a los límites de sucesiones (reglas de suma, productos, cocientes, etc).

Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{ln(n)}{n}.$$

Su gráfico es



Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

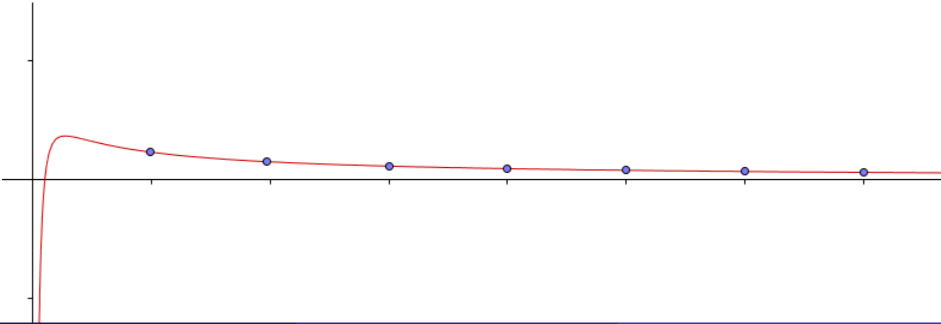
Para estudiar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n},$$

se puede introducir la función

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x}.$$

Observando el gráfico



podemos concluir que si el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$$

existe, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}.$$

La ventaja de introducir la función f es que podemos usar regla de L'Hopital.

De hecho en el ejemplo anteriore tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

y entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0.$$

Ejemplo: calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1}.$$

Para resolver el ejemplo, primero introducimos la función

$$f(x) = \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1}.$$

Cuando $x \to \infty$, el denominador tiende a infinito y estamos en la situación (2) de la regla de L'Hopital. Analizamos si el límite del cociente de las derivadas existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + cos(x)}{9x^2 + 2x} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1} = 0$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1} = 0$$

Introducción a Series Numéricas

Comenzamos con una sucesión de números reales

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Deseamos extender el concepto de suma finita de números a **sumas infinitas**.

Idea y definición de Serie: Consideramos las siguientes *sumas parciales*

1. $s_1 = a_1$
2. $s_2 = a_1 + a_2$
3. $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
4. $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5. $\vdots$
6. $s_N = a_1 + \cdots + a_N$
7. $\vdots$

Así, hemos construído una nueva sucesión

$$\{s_N\}_{N=1}^{\infty},$$

denominada sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se denomina **serie** y se simboliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si:

$$\lim_{N\to\infty} s_N$$

existe, entonces decimos que la **suma** de $\{a_n\}$ es el valor del límite y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

En este caso, decimos que la serie converge. Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces decimos que la serie diverge.

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

1. $s_1 = 1-\frac{1}{2}$
2. $s_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$
3. $s_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}$
4. $s_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{5}$
5. $\vdots$
6. $s_N = 1-\frac{1}{N+1}$
7. $\vdots$

Así

$$\lim_{N\to\infty} s_N = 1$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

converge y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Repaso: teorema fundamendal del cálculo. Sustitución. Área entre curvas.

- Enunciar el teorema fundamental del cálculo, segunda parte.
- Resolver:
$$\int_0^{\pi/6} (sec(x) + tan(x))^2 \, dx =$$
- Calcule
$$\int sen^2(3x).cos(3x) \, dx =$$
- Encuentre el área entre las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.