

Análisis Matemático I

Clase 22: Series numéricas: serie geométrica y criterios de convergencia. Introducción a series de Taylor.

Pablo Ochoa

**Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.**

Mayo, 2025

Serie geométrica

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

La serie geométrica es muy importante, veremos algunas aplicaciones más adelante en la teoría de aproximación de funciones.

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Sea la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

Entonces la suma parcial n -ésima es:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por r obtenemos:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}.$$

Luego:

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1} = a(1 - r^{n+1}),$$

así, si $r \neq 1$:

$$s_n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^{n+1}}{1 - r}.$$

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Si $|r| < 1$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}.$$

Luego, si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie diverge.

Pregunta para el estudiante: ¿Qué sucede cuando $r = 1$ o $r = -1$? Debe convencerse que en esos casos también diverge (excepto cuando $a = 0$).

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Solución: observar que la serie es una serie geométrica con $a = 1/3$ y razón

$$r = \frac{1}{5}.$$

Como $|r| < 1$, la serie dada converge y, de hecho, converge a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{12}.$$

Combinación de series

Volviendo al contexto general de series, tenemos el siguiente resultado.

Teorema

Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ dos series convergentes. Entonces:

- La serie $\sum_n (a_n + b_n)$ converge a $\sum_n a_n + \sum_n b_n$.
- La serie $\sum_n (a_n - b_n)$ converge a $\sum_n a_n - \sum_n b_n$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_n (ka_n)$ converge a $k \sum_n a_n$.

Ejemplo: estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right).$$

Criterios de Convergencia

En muy pocos casos es posible hallar una expresión de las sumas parciales de una serie. En vista de lo estudiado anteriormente, la serie geométrica es uno de esos casos.

Para la gran mayoría de las series, la convergencia se analiza mediante criterios. En este curso veremos los siguientes:

- ① Criterio del término n -ésimo.
- ② Criterio de la integral.
- ③ Criterio del cociente.
- ④ Criterio de Leibnitz para series alternantes.

Los criterios nos ayudan a decidir si una serie converge o no, pero no nos dice cuál es el valor de la suma.

Criterio del término n -ésimo

Comenzamos con la siguiente observación: supongamos que la serie

$$\sum_n a_n$$

converge. Entonces se espera que a medida que n aumenta, los términos a_n que se están sumando sean cada vez más chicos (si no, no tendríamos suma finita). De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Criterio del término n -ésimo

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

Observación: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces no podemos emplear el criterio para decir que la serie dada converge o diverge. es necesario aplicar un criterio diferente.

Criterio de la integral

Sea a_n una sucesión de términos positivos. Supongamos que:

$$a_n = f(n),$$

donde $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva, decreciente y continua para todo $x \geq 1$. Entonces:

- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Ejemplo: analizar la convergencia de la serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ejemplo (lo harán en las prácticas): series p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

Criterio de la razón

Cuando los términos de una serie contienen potencias $n^{\text{-ésimas}}$ o factoriales, el siguiente criterio es muy útil.

Criterio de la razón

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide.

Mostrar por qué el criterio no decide en el último caso.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{5^n}$.

Criterio de Leibniz

Cuando la serie considerada tiene términos que alternan en signos, el siguiente criterio es de gran utilidad.

Criterio de Leibniz

Sea la siguiente serie alterante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

Entonces esta serie converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Todos los términos u_n son positivos.
- u_n es una sucesión decreciente.
- $u_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Criterio de Leibniz

El criterio de Leibniz también se aplica si la serie está escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n., \quad o \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n.$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f , se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a .

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f , se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a .

Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a . Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a . Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f , se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a .

Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a . Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a . Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de f aumentando el grado del polinomio de aproximación?

Series de Taylor

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Series de Taylor

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1.

Series de Taylor

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

Series de Taylor

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.

Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$

:

Series de Taylor

En general, la suma parcial n -ésima será:

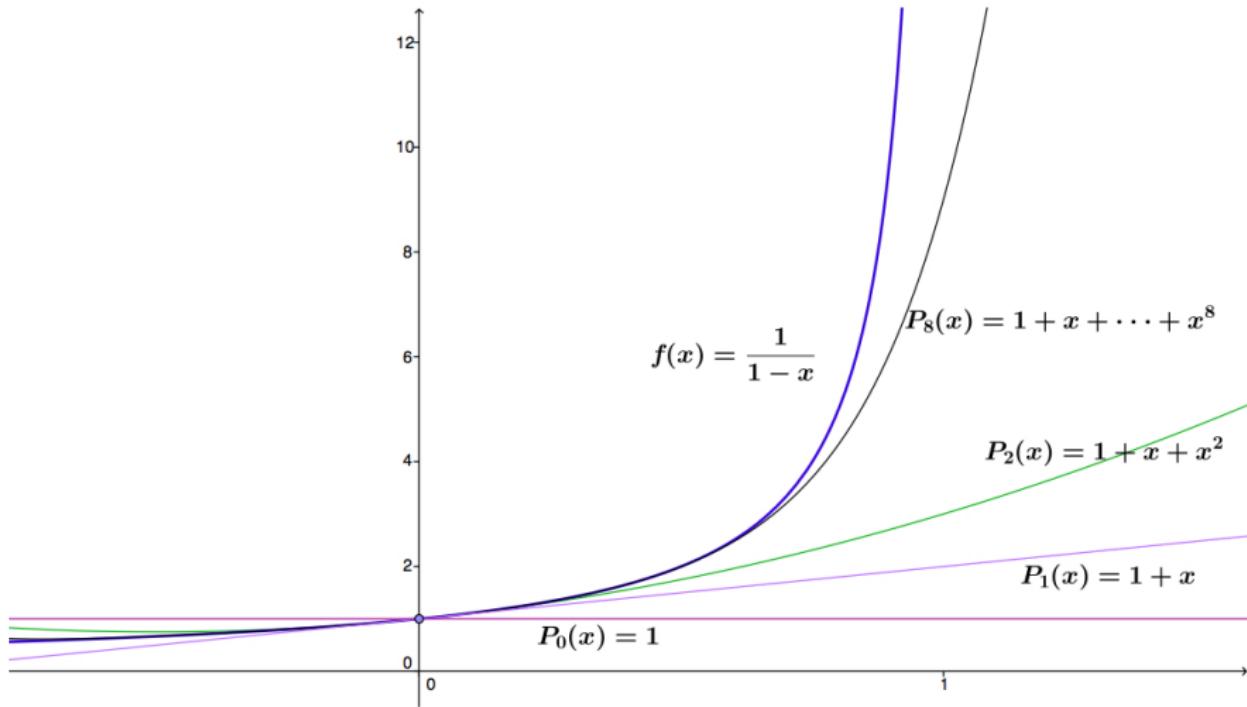
$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad |x| < 1.$$

Así, a medida que n es mayor, el polinomio P_n aproxima mejor a f cerca de $a = 0$.

Series de Taylor



Series de Taylor

A lo largo de la siguiente clase vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f .

Series de Taylor

A lo largo de la siguiente clase vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f .
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en a hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de f cerca del punto a .

Repaso: aplicaciones de la integral y funciones trascendentales. Integrales impropias

- Una región en el primer cuadrante está acotada por arriba por $y = \cosh(x)$, por abajo por $y = \operatorname{senh}(x)$ y por izquierda y derecha por el eje y y la recta $x = 2$, respectivamente. Calcular el volumen que esa región genera al girar alrededor del eje x.
- Obtenga la integral

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx =$$

- Calcular

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} =$$

- Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx =$$