Análisis Matemático I
Clase 24: Repaso series de Taylor. Teorema fundamental del Cálculo. Longitud de curva. Información adicional para el examen final.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2025

Recordar: el objetivo de estudiar series de Taylor es desarrollar una función f en series de potencias de x alrededor de un punto a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Vimos que los coeficientes eran:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, ...$$

De esta forma, las sumas paciales de la serie de Taylor (llamados polinomios de Taylor):

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

deben converger a la función, es decir,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Si esto ocurre, entonces podemos aproximar lo valores de f utilizando polinomios y mientras mayor sea el grado del mismo, mejor es la aproximación.

Además vimos el teorema de Taylor, que nos permite escribir

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde el residuo es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo c_n algún punto entre a y x. Así, para que la serie de Taylor converja a $f(x)$, se debe dar

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Esto sucede en el caso de la funciones e^x, $sen(x)$ y $cos(x)$. Para otras funciones f, se puede relacionar a f, su derivada o su integral con la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Ejemplo: desarrolle la siguiente función en serie de Taylor centrada en cero

$$f(x) = tan^{-1}(x).$$

Explicite el intervalo y el radio de convergencia. Finalmente, utilice el polinomio de Taylor de grado 5 para aproximar el valor de

$$\int_0^{1/2} tan^{-1}(x)\, dx.$$

Teorema del Valor Medio para integrales

Recordar:

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Sin demostración.

Observación: la conclusión del teorema también se puede escribir como:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Teorema fundamental del cálculo

Teorema Fundamental del cálculo: Primera Parte

Sea f una función continua en $[a, b]$. Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

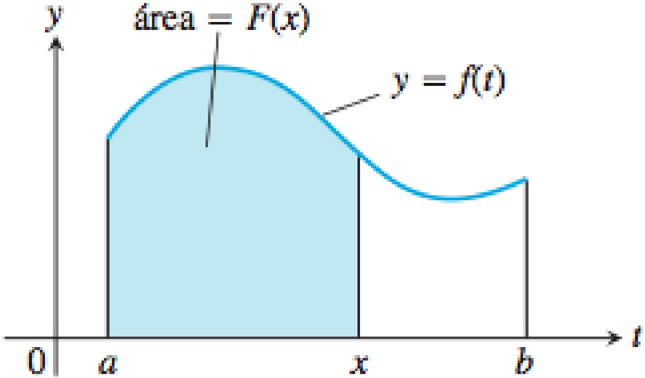
Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Observación: F es una antiderivada de f. El teorema permite construir antiderivadas o primitivas de funciones continuas a través de la integración.

Interpretación de la función F cuando $f \geq 0$.



Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Demostración. Sea $x \in [a, b)$ y $h > 0$ tal que $x + h \in [a, b)$. Luego:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^{x} f(t)\ dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^{x} f(t)\ dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt. \quad (1)$$

Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Demostración. Sea $x \in [a, b)$ y $h > 0$ tal que $x + h \in [a, b)$. Luego:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^{x} f(t)\ dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^{x} f(t)\ dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt. \quad (1)$$

Como f es continua en $[a, b]$, entonces es también continua en $[x, x + h]$, así por el *Teorema del valor medio para integrales*, existe $c_h \in [x, x + h]$ tal que:

$$f(c_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Luego, de (1) obtenemos que:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c_h). \quad (2)$$

Demostración del Teorema fundamental del cálculo: primera parte

Notemos que, cuando $h \to 0^+$, $c_h \to x$. Entonces, por la continuidad de f en $[a, b]$, resulta que

$$\lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

Así, tomando límite cuando $h \to 0^+$ en (2), obtenemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

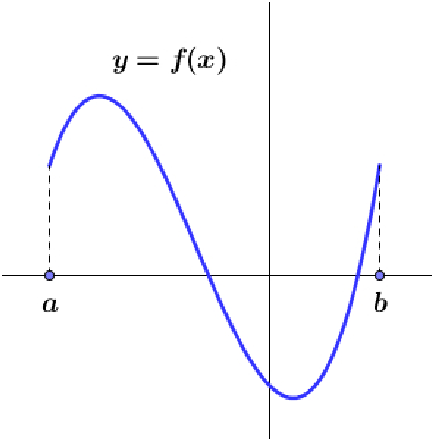
Por lo tanto, la derivada por derecha de F en $x \in [a, b)$ existe y es $f(x)$. Ahora, tomamos $x \in (a, b]$ y sea $h < 0$ tal que $x + h \in (a, b]$. Siguiendo un razonamiento similar al anterior, obtenemos que la derivada por izquierda de F en $x \in (a, b]$ es $f(x)$ (**no es necesario que el estudiante lo haga**). Así, de ambas conclusiones afirmamos que

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in [a, b]$$

en donde, cuando $x = a$ o $x = b$, $F'(x)$ denota la derivada lateral correspondiente.

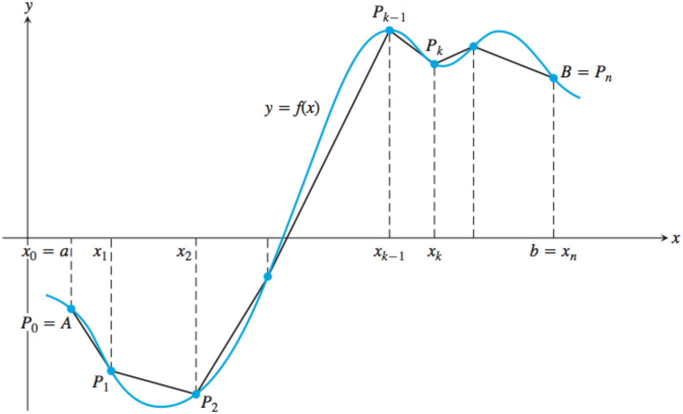
Longitud de una curva

Problema: determine la longitud de la curva dada por una función $y = f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$.

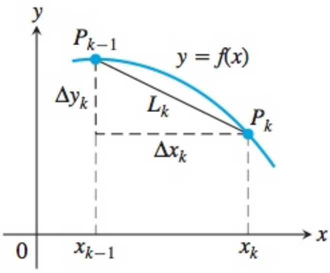


Longitud de una curva

Solución: tomamos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Consideramos los segmentos que unen: $(x_0, f(x_0))$ con $(x_1, f(x_1))$, $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ con $(x_n, f(x_n))$.



Observar que la longitud del arco de la curva que va desde $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a $(x_k, f(x_k))$ se puede aproximar con la longitud del segmento rectilíneo que une dichos puntos:



Entonces si L_k es la longitud del segmento, tenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Longitud de una curva

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Por el teorema del valor medio, existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k.$$

Reemplazando en la expresión para L_k obtenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + f'(c_k)^2(\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Si sumamos las longitudes de los segmentos, ontendremos una aproximación de la longitud de la curva L. Luego:

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Longitud de una curva

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Cuando $\|P\|$ tiende a cero, obtenemos (ya que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ es continua en $[a, b]$):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Así:

Longitud de curva

Sea $y = f(x)$ una función tal que f' es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Examen final

1. Las mesas de Análisis Matemático suelen ser los lunes (excepto la del Martes 17 de Junio).
2. Las consultas de los docentes están disponibles todo el año, pero revisar en el segundo semestre la plataforma de Análisis I por posibles cambios de horarios.
3. Consultar en sección alumnos los periodos de inscripción para cada turno.
4. El día Martes 10 de Junio se entregarán las regularidades de los alumnos que se encuentran regulares.

Examen final

Para examen final:

- Funciones: definición , tipos de funciones, simetría, dominio, imagen, funciones crecientes y decrecientes. Operaciones con funciones. Ejemplos: polinómicas, trigonométricas, racionales.
- Límites y continuidad: definición de tasa de cambio promedio, interpretación geométrica. Límite trigonométrico:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta}.$$

Teorema de la Compresión (**sin demostración**). Límites laterales. Definición de continuidad (en puntos, intervalos abiertos y cerrados). Propiedades de funciones continuas: suma, resta, multiplicación y división (**sin demostración**). Composición de funciones continuas (**sin demostración**).

Examen final

- Discontinuidad. Tipos de discontinuidad. Teorema del Valor intermedio (**sin demostración**) y consecuencias. Definiciones de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
- Derivadas: definiciones de pendiente de una curva, tasa de cambio instantánea y de derivada. Interpretación geométrica. Definición de recta tangente. Derivadas laterales. Teorema: derivabilidad implica continuidad (**con demostración**). Reglas de derivación (**sin demostración**). Derivadas de funciones trigonométricas. Derivada del seno, coseno y tangente (**las tres con demostración**). Regla de la cadena (**sin demostración**).

Examen final

Para examen final:

- Máximos y mínimos locales. Puntos críticos. Teorema del Valor Medio (**sin demostración**). Consecuencias (**las dos con demostración**). Criterio de la primera derivada para funciones crecientes y decrecientes (**con demostración**). Obtención de extremos locales mediante derivación. Concavidad. Punto de inflexión. Criterio de la derivada segunda para extremos (**sin demostración**). Trazado de gráficas. Tasas relacionadas. Definición de linealización e interpretación geométrica. Definición de diferenciales e interpretación geométrica. Problemas de optimización. Antiderivadas. Teorema: dos antiderivadas de una misma función difieren en una constante (**con demostración**).

Examen final

- Integral definida. Definición. Particiones y sumas de Riemann. Cálculo de integrales utilizando la definición (sólo para función afin o cuadráticas). Interpretación geométrica y propiedades. Teorema del valor medio para integrales (**sin demostración**). Teorema fundamental del cálculo, primera y segunda parte (**con demostración**). Método de sustitución. Aplicaciones de la integral: Cálculo de áreas entre curvas, cálculo de volúmenes por medio de secciones transversales, método de discos y arandelas, longitud de curvas (**todos con deducción de las fórmulas**).
- Funciones inversas. Derivación de funciones inversas (**deducción utilizando regla de la cadena**). Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas. Sus derivadas e integrales (**con demostración**), concentrarse en *ln*, e^x, a^x, *sen*, *cos*, , sus inversas y las hiperbólicas *senh*, *cosh*. Regla de L'Hopital (como está en las diapositivas, **sin demostración**).

Examen final

- Integración por partes (**con deducción**). Integrales impropias. Definición. Método de fracciones simples.
- Sucesiones. Convergencia, gráficas y cálculo de límites. Series, definición. Serie geométrica, convergencia y divergencia. Deducción de la suma cuando converge. Criterio del término n-ésimo (**sin demostración**). Criterio de la integral (**sin demostración**). Criterios de la razón (**sin demostración.**) Series alternantes y criterio de Leibniz (**sin demostración**). Series de Taylor. Deducción de los coeficientes y Definición. Teorema de la convergencia de series de Taylor (**sin demostración**). Radio e intervalo de convergencia. Teorema de derivación e integración de series de Taylor (**sin demostración**).