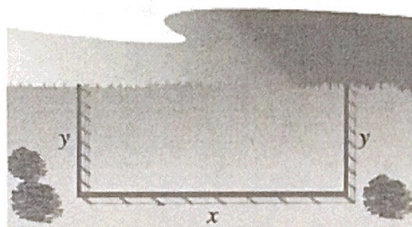


Nombre y apellido:.....
Legajo o DNI y carrera:.....

Segundo Examen Parcial-TEMA 3
Análisis Matemático I-FI-UNCUYO-2 de Junio de 2025

Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede trabajar con lápiz. Para aprobar, debe obtener un mínimo de 60 puntos.

- (1) (10 pts.) Enuncie el teorema fundamental del cálculo, parte 1.
- (2) (15 pts.) Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener 245.000 m^2 para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?



- (3) (15 pts.) Resuelva la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

- (4) (15 pts.) Calcule:

$$\int \cos^3(2x) \sin(2x) dx =$$

- (5) (10 pts.) Determine la derivada de $y = \cos^{-1}(x)$, $x \in (-1, 1)$, utilizando la fórmula de la derivada de funciones inversas.
- (6) (20 pts.) Determine el área de la región acotada por la gráfica de $y = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$ y el eje x para $x \in [1, 2]$.
- (7) (15 pts.) Encuentre la longitud de la curva

$$y = \frac{4}{3}x^{3/2} - 1, \quad x \in [1, 2].$$

Tema 3

1) Teoría

2) ~~Problema~~

Dato: $\bar{A} = 245.000$

$$X \cdot y = 245.000 \rightarrow \boxed{X = \frac{245.000}{y}}$$

Minimizar el perímetro $P = X + 2Y$

$$P(y) = \frac{245.000}{y} + 2y$$

Puntos críticos:

$$P'(y) = -\frac{245.000}{y^2} + 2 = 0$$

$$\frac{245.000}{2} = y^2$$

$$\boxed{350 = y}$$

Derivada segunda

$$P''(y) = \frac{245.000}{y^3}$$

$$P''(350) > 0 \Rightarrow P \text{ tiene un mínimo en } \boxed{y = 350}$$

Luego

$$X = \frac{245.000}{350} = 700 \text{ m.}$$

3) Observar que la integral es impropia de tipo 2

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{\text{discontinuidad en } x=1} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \underbrace{\int_0^c \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{\text{Hay una composición intentamos resolver por sustitución}} =$$

discontinuidad
en $x=1$.

Hay una composición
intentamos resolver por sustitución

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_1^{1-c^2} -\frac{4}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} \quad \begin{cases} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \\ -\frac{1}{2} du = x \cdot dx \end{cases}$$

$$= -2 \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_1^{1-c^2} u^{-1/2} du$$

$$= -2 \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_1^{1-c^2}$$

$$= -4 \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(\underbrace{\sqrt{1-c^2}}_{\rightarrow 0} - \sqrt{1} \right)$$

$$= 4 \quad \text{La integral converge}$$

4) Hay una composición, intentemos por sustitución

$$\int \cos^3(2x) \sin(2x) dx = \int \frac{u^3}{-2} du$$

$$u = \cos(2x)$$

$$du = -\sin(2x) \cdot 2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos^4(2x)}{4} + C$$

$$= -\frac{1}{8} \cos^4(2x) + C$$

5) Derivada de la función inversa $f(x) = \cos x$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1}(x))}$$

Usamos
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1}(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6) observar que

$$\sqrt{x} \cdot \ln x \geq 0 \text{ en } [1, 2].$$

Luego, el área es:

$$\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

simplifican

"No hay composición"
en la integral, aplicamos
partes

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \sqrt{x} \quad v = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\begin{aligned} &= \ln 2 \cdot \frac{2}{3} 2^{3/2} - \int_1^2 \frac{2}{3} x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 \cdot 2^{3/2} - \frac{4}{9} x^{3/2} \Big|_1^2 = \dots \end{aligned}$$

7)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

$$f(x) = \frac{4}{3} x^{3/2} - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^{1/2}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (2x^{1/2})^2} \, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4x} \, dx$$

composición
resolveremos
por sustitución

$$\begin{aligned} u &= 1 + 4x \\ du &= 4 \, dx \end{aligned}$$

$$= \int_5^9 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{4} \, du$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_5^9 = \dots$$