

Nombre y apellido:.....
Legajo o DNI y carrera.....:

Segundo Examen Parcial-TEMA 1
Análisis Matemático I-FI-UNCUYO-2 de Junio de 2025

Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios para obtener el puntaje completo. Puede trabajar con lápiz. Para aprobar, debe obtener un mínimo de 60 puntos.

- (1) (10 pts.) Defina diferenciales, explicitando qué debe satisfacer la función para que estén definidos. Realice un gráfico para interpretar el concepto de diferencial geométricamente.
- (2) (15 pts.) Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 metros de ancho en su parte más alta y tiene 12 metros de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 metros cúbicos por minuto, calcular la razón de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 metros.
- (3) (20 pts.) Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.
- (4) (15 pts.) Resuelva la siguiente integral indefinida:

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx =$$

- (5) (15 pts.) Resolver la siguiente integral:

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx =$$

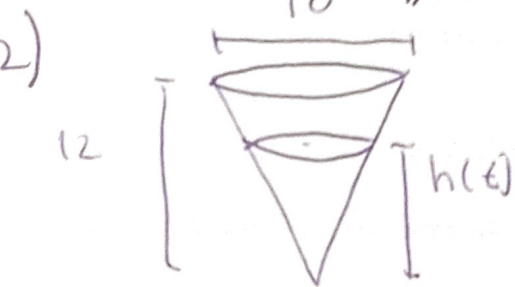
- (6) (10 pts.) Derive la siguiente función:

$$y = e^{\text{sen}(x) + x \cdot \ln(x)}.$$

- (7) (15 pts.) Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = -x^2 + 2$ y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$.

Tema 1

1) Teoría



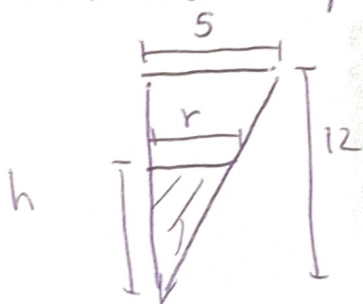
Datos

$$V'(t) = 10 \text{ m}^3/\text{min}$$

Calcular $h'(t)$ cuando $h(t) = 8 \text{ m}$

$$V(t) = \frac{\pi}{3} r^2(t) h(t)$$

Relacionemos r y h :



$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{5}{12} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{5}{12} h(t)}$$

Luego

$$V(t) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{5}{12} \right)^2 h^3(t)$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25}{144} \cdot 3 h^2(t) \cdot h'(t)$$

Reemplazamos los datos: $10 = \frac{25\pi}{144} \cdot 8^2 \cdot h'(t)$

y se despeja $h'(t)$.

3) Primero encontramos los puntos de intersección

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x \cdot (3x^2 - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Luego, el área pedida es

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx \right| \\
 &= \left| \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^2 (3x^3 - 12x) dx \right| \\
 &= \left| \left(\frac{3}{4} x^4 - 6x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{3}{4} x^4 - 6x^2 \right) \right|_0^2 = \dots
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 \int x \cdot \sin(x) dx &= -\cos x \cdot x - \int -\cos x dx \\
 &= -x \cdot \cos x + \sin x + C.
 \end{aligned}$$

observar que
no hay composición,
entonces integramos
por partes

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = \sin x dx \quad v = -\cos x$$

no hay composición
más allá de e y $-x$, usamos partes

5)

$$\int_1^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x \cdot e^{-x} dx =$$

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \quad v = -e^{-x}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \cdot x \right]_1^b - \int_1^b (-e^{-x}) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-b} \cdot b + e^{-1} - e^{-x} \right) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(-\frac{b}{e^b} \right)}_{\text{Use L'Hopital}} + \frac{1}{e} - \underbrace{e^{-b}}_0 + e^{-1} \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^b} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}$$

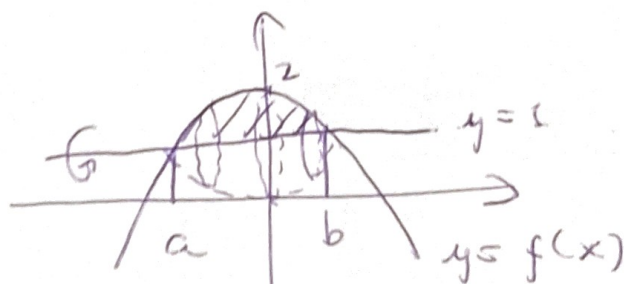
$$= 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

6) Usamos regla de la cadena y regla del producto

$$y' = e^{\sin x + x \cdot \ln x} \cdot \left(\cos x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= e^{\sin x + x \cdot \ln x} \cdot (\cos x + \ln x + 1)$$

7)



Usamos el método de discos:

$$\text{Radio: } R(x) = f(x) - 1 = -x^2 + 2 - 1 = -x^2 + 1$$

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_{-1}^1 \pi \cdot (-x^2 + 1)^2 dx = \dots$$