CARRERA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: EQUIPOS E INSTALACIONES INDUSTRIALES

MODELOS DE ANÁLISIS DE FILTRACIÓN DE LÍQUIDOS

Profesor: Ing. Jorge Nozica

MODELO GENERAL DE FILTRACIÓN EN MEDIOS POROSOS

La ecuación general de la filtración sobre medios porosos se utiliza para describir cómo un fluido (líquido o gas) se mueve a través de un material poroso (como arena, suelo, roca, etc.). Esta ecuación se basa principalmente en la Ley de Darcy y, al combinarla con otros principios de conservación (como la masa), se puede obtener una ecuación más general.

1- Ley de Darcy (base fundamental)

La forma básica de la ley de Darcy es:

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu}\nabla P$$

Donde:

- $\vec{q}$: vector de flujo volumétrico por unidad de área (velocidad de filtración o velocidad darciana) [m/s] puede considerarse como densidad de flujo (Q/A m^3/sm^2)
- k: permeabilidad del medio poroso [m^2]
- μ: viscosidad dinámica del fluido [Pa·s]
- ∇P: gradiente de presión [Pa/m]

2 - Ecuación general de la filtración

Combinando la Ley de Darcy con la ecuación de continuidad (conservación de la masa) para un fluido compresible o incompresible, se obtiene la ecuación general de la filtración:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\vec{q}) = Q$$

Donde:

- ϕ: porosidad del medio (fracción del volumen total que es poroso) [adimensional]
- ρ: densidad del fluido [kg/m^3]

- $\vec{q}$: velocidad de Darcy (como en la ley de Darcy) [m/s]
- Q: término fuente o sumidero (puede representar extracción, inyección, etc.) [kg/(m^3·s)]

2.1-F**luido incompresible**

Si asumimos que el fluido es incompresible (densidad constante) y que el medio también es homogéneo e isotrópico, la ecuación se simplifica:

$$\phi \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \nabla P \right) + \frac{Q}{\rho}$$

Esto es una **ecuación de difusión** de presión en un medio poroso.

🧠 **¿Cómo se interpreta?**

- La presión se propaga a través del medio como una onda difusiva.
- El gradiente de presión es el motor del flujo.
- La permeabilidad y viscosidad controlan qué tan fácil se mueve el fluido.
- La porosidad controla cuánto espacio tiene el fluido para almacenarse.
- Q introduce o elimina masa del sistema.

2.2 - **Filtración a través de una torta de filtración incompresible en un lecho poroso.**

¿Qué es una torta de filtración incompresible?

- Durante un proceso de filtración, los sólidos suspendidos en un líquido se acumulan sobre el medio filtrante, formando una torta de filtración.
- Si esta torta no se compacta con el tiempo o con el aumento de presión, se dice que es incompresible.
- Es decir, sus propiedades como porosidad y permeabilidad se mantienen constantes durante la filtración.

2.3 Ley de Darcy aplicada a la torta

La Ley de Darcy se aplica a la torta considerando un flujo unidimensional y régimen estacionario (flujo constante en el tiempo):

$$q = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dz}$$

Donde:

- q: flujo volumétrico por unidad de área (m/s)

- k: permeabilidad de la torta [m^2]
- μ: viscosidad del fluido
- dP/dz: gradiente de presión en la dirección del espesor de la torta

Aplicación práctica: En un sistema real de filtración, el fluido atraviesa dos resistencias principales:

1. **La torta de sólidos** depositada sobre el filtro
2. **El medio filtrante** (tela o malla)

La presión total aplicada se reparte entre ambas resistencias:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{torta}} + \Delta P_{\text{medio}}$$

2.4 Flujo total a través del sistema

Usamos una forma extendida de la Ley de Darcy, sumando las resistencias al flujo como en un sistema en serie:

$$q = \frac{\Delta P}{\mu\left(\frac{\alpha c V}{A} + R_m\right)}$$

Donde:

- q: velocidad de filtración [m/s]
- ΔP: presión total aplicada [Pa]
- μ: viscosidad del fluido [Pa·s]
- α: resistencia específica de la torta [m/kg]
- c: concentración de sólidos en el licor [kg/m^3]
- V: volumen total de filtrado acumulado [m^3]
- A: área del filtro [m^2]
- Rm: resistencia del medio filtrante [1/m]

📌 **Interpretación**

- La resistencia de la torta crece a medida que se acumulan más sólidos: es proporcional a V.
- Si la torta es incompresible, entonces α es constante.
- La resistencia total aumenta linealmente con V, lo que hace que el flujo disminuya con el tiempo.

2.5 - Tiempo de filtración

Para determinar el tiempo necesario para filtrar un volumen V, se integra la ecuación:

$$t = \frac{\mu}{\Delta P A^2}\left(\frac{\alpha c}{2}V^2 + R_m V\right)$$

Esta es la ecuación clave para diseñar o analizar filtración con torta incompresible. Muestra cómo el tiempo de filtración depende de:

- La viscosidad del fluido
- La presión aplicada
- La resistencia del medio y de la torta
- La cantidad de sólidos presentes

2.6 - Conclusión

Cuando aplicamos la ecuación de filtración a una torta incompresible:

- La resistencia de la torta aumenta linealmente con el volumen filtrado.
- El tiempo de filtración crece cuadráticamente con V, dominado por la torta.
- El análisis es más simple que con tortas compresibles, donde α cambia con la presión.

3 – CAUDAL DE FILTRACIÓN EN FUNCIÓN DE ΔP

3.1 Cálculo de caudal de filtrado

Queremos hallar:

$$Q = \frac{dV}{dt} = f(\Delta P)$$

Partimos de la ecuación extendida de Darcy para el sistema:

Ya la habíamos visto como:

$$q = \frac{\Delta P}{\mu\left(\frac{\alpha c V}{A} + R_m\right)}$$

Multiplicando por el área del filtro A, obtenemos el caudal volumétrico:

$$\boxed{Q = \frac{dV}{dt} = Aq = \frac{A\,\Delta P}{\mu\left(\alpha c \frac{V}{A} + R_m\right)} = \frac{\Delta P}{\mu\left(\frac{\alpha c V}{A^2} + \frac{R_m}{A}\right)}}$$

✅ **Esta es la relación directa entre caudal Q y presión ΔP**

📌 **Variables clave:**

- ΔP: diferencia de presión aplicada [Pa]
- μ: viscosidad del fluido [Pa·s]
- α: resistencia específica de la torta [m/kg]
- c: concentración de sólidos [kg/m^3]
- V: volumen acumulado de filtrado [m^3]
- A: área del filtro [m^2]
- Rm: resistencia del medio filtrante [1/m]

3.2 - Cómo varía el caudal con el tiempo

Dado que V cambia con el tiempo (el volumen filtrado va aumentando), esto implica que:

- La resistencia de la torta crece con el volumen acumulado V
- Entonces, aunque ΔP se mantenga constante, el caudal va disminuyendo con el tiempo

🧠 **Interpretación física**

- Al principio, cuando V≈0, domina la resistencia del medio:

$$Q_0 \approx \frac{\Delta P}{\mu \frac{R_m}{A}}$$

- Con el tiempo, la torta se acumula y domina la resistencia:

$$Q(t) \approx \frac{\Delta P A^2}{\mu \alpha c V} \quad \Rightarrow \quad Q \propto \frac{1}{V}$$

4. **FLUJO EN MEDIOS POROSOS COMPRESIBLES**

Cuando la torta de filtración es compresible, la aplicación de la Ley de Darcy requiere considerar que la resistencia de la torta ya no es constante, sino que depende de la presión aplicada.

Esto cambia la forma en que modelamos el flujo, y es fundamental para describir correctamente filtraciones industriales con tortas blandas, gelatinosas o que se compactan bajo presión.

Recordando la **Ley de Darcy** considerando un flujo unidimensional y régimen estacionario

$$q = -\frac{k}{\mu}\frac{dP}{dz}$$

Donde:

- q: flujo volumétrico por unidad de área (densidad de flujo m^3/hm^2)
- k: permeabilidad
- μ: viscosidad
- dP/dz: gradiente de presión

4.1. Torta compresible: cambio en la resistencia

En una torta compresible, la resistencia específica α no es constante, sino que aumenta con la presión aplicada:

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{\Delta P}{\Delta P_0} \right)^s$$

Donde:

- α: resistencia específica a una presión de referencia ΔP_o
- s: coeficiente de compresibilidad (valor empírico)
- ΔP: presión aplicada

🧠 **¿Qué representa esto?**

- Si s=0s = 0 → la torta es **incompresible** (caso anterior)
- Si s>0s > 0 → la torta se vuelve **más resistente con la presión**
- Cuanto mayor sea s, **más compresible** es la torta

4.2 - Ecuación del caudal con torta compresible

La ecuación del caudal total se ajusta así:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{\mu \left(\frac{\alpha_0 c V}{A^2} \left(\frac{\Delta P}{\Delta P_0} \right)^s + \frac{R_m}{A} \right)}$$

📌 **Cambios importantes respecto al caso incompresible**

- El caudal ya no crece linealmente con ΔP
- El efecto de la presión se "compensa" porque una presión mayor compacta la torta, aumentando su resistencia
- El tiempo de filtración aumenta más rápidamente que en el caso incompresible

4.3 - Tiempo total de filtración con torta compresible

Se debe integrar esta ecuación, lo cual no da una forma analítica simple como en el caso incompresible, pero conceptualmente se expresa así:

$$t = \int_0^V \frac{\mu}{\Delta P} \left(\frac{\alpha_0 c v}{A^2} \left(\frac{\Delta P}{\Delta P_0} \right)^s + \frac{R_m}{A} \right) dv$$

El resultado depende del exponente s, y normalmente se ajusta a datos experimentales para obtener una solución práctica.

5 – CÁLCULO DE ÁREA NECESARIA DE FILTRADO

5.1 Área de filtrado para tortas incompresibles

Queremos despejar el área de filtración A, a partir de la ecuación del caudal para torta incompresible.

✅ **Punto de partida: Ecuación del caudal (torta incompresible)**

$$Q = \frac{\Delta P}{\mu \left(\frac{\alpha c V}{A^2} + \frac{R_m}{A} \right)}$$

Donde:

- Q: caudal [m^3/s]
- ΔP: presión aplicada [Pa]
- μ viscosidad del fluido [Pa·s]
- α: resistencia específica de la torta [m/kg]
- c: concentración de sólidos [kg/m^3]
- V: volumen total de filtrado acumulado [m^3]
- Rm: resistencia del medio filtrante [1/m]
- A: área del filtro [m^2]

✏️ **Despejando el área A**

Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$Q\mu \left(\frac{\alpha c V}{A^2} + \frac{R_m}{A} \right) = \Delta P$$

Distribuimos el término Qμ:

$$\frac{Q\mu\alpha c V}{A^2} + \frac{Q\mu R_m}{A} = \Delta P$$

Ahora, multiplicamos todo por A^2 para eliminar denominadores:

$$Q\mu\alpha cV + Q\mu R_m A = \Delta P A^2$$

Reordenamos como una ecuación cuadrática en A:

$$\Delta P A^2 - Q\mu R_m A - Q\mu\alpha cV = 0$$

Fórmula general para el área A

Esta es una ecuación cuadrática de la forma: $aA^2+bA+c= 0$

Con:

- $a=\Delta P$
- $b=-Q\mu R_m$
- $c=-Q\mu\alpha cV$

Usamos la fórmula general:

$$A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo:

$$A = \frac{Q\mu R_m + \sqrt{(Q\mu R_m)^2 + 4\Delta P \cdot Q\mu\alpha cV}}{2\Delta P}$$

Se toma solo la raíz **positiva** porque el área debe ser positiva físicamente.

✅ **Resultado final:**

$$\boxed{A = \frac{Q\mu R_m + \sqrt{(Q\mu R_m)^2 + 4\Delta P \cdot Q\mu\alpha cV}}{2\Delta P}}$$

🔍 **Interpretación:**

- A mayor caudal Q, se requiere mayor área A
- A mayor presión ΔP, se necesita menor área para mantener el caudal
- A mayor concentración de sólidos c o mayor resistencia específica α, se necesita más área

6 - FILTRACIÓN POR MEMBRANAS

En una filtración tangencial (también conocida como filtración cruzada o crossflow), el modelo clásico de filtración de torta (como en filtración frontal o dead-end) no es adecuado, porque:

- En filtración tangencial, el fluido se mueve paralelo a la membrana, no perpendicular.
- No se acumula una torta gruesa y estática sobre la superficie (o se controla que no lo haga).
- Se busca minimizar la formación de torta mediante el flujo lateral (cizalla).

✅ **Modelo adecuado para filtración tangencial:**

6.1 - Modelo de fouling o ensuciamiento de membranas

En lugar del modelo de Darcy con torta, en filtración tangencial se aplican modelos empíricos de ensuciamiento de membranas, que describen cómo varía el flujo con el tiempo:

$$\frac{dJ}{dt} = -kJ^n$$

Donde:

- J: flujo de permeado por unidad de área [$m^3/m^2 \cdot s$]
- t: tiempo
- k: constante cinética (relacionada con el tipo de fouling)
- n: tipo de modelo:
  - n=0 fouling completo (formación de capa densa)
  - n=1 fouling intermedio
  - n=2 fouling estándar (bloqueo de poros)
  - n=0.5 fouling cake-compresible (semiempírico)

6.2 - Modelo de flujo estable (estado cuasi-estacionario)

Cuando se alcanza un estado cuasi-estacionario, se puede usar la ley de Hagen-Poiseuille adaptada:

$$J = \frac{\Delta P}{\mu(R_m + R_f)}$$

Donde:

- J: flujo de permeado específico
- Rm: resistencia de la membrana limpia (Resistencia hidráulica de la membrana)

- Rf: resistencia adicional por ensuciamiento (fouling)
- μ: viscosidad del fluido

6.2 - Tipos de modelos específicos para sistemas tangenciales:

1. **Modelo de concentración polarizada** (cuando hay acumulación de solutos en la superficie de la membrana):

$$C_w = C_b \exp\left(\frac{J}{k}\right)$$

   - Cw: concentración en la pared
   - Cb: concentración en el bulto
   - k: coeficiente de transferencia de masa

2. **Modelo de resistencia en serie**:

$$J = \frac{\Delta P - \Delta\pi}{\mu(R_m + R_f)}$$

   - Incluye el efecto de la **presión osmótica Δπ**, importante en ósmosis inversa o ultrafiltración.

6.3 Procedimiento de estimación de Área Necesaria de Filtrado- Sistema de Filtración Tangencial

6.3.1. Definir las condiciones de operación

- Flujo volumétrico a tratar (Q): volumen de líquido que se desea filtrar por unidad de tiempo (m^3/h o L/min).
- Concentración de sólidos o solutos en el feed (Cin).
- Requerimiento de permeado (QpQp): volumen de permeado que debe pasar a través de la membrana en un tiempo determinado.
- Propiedades del fluido: viscosidad (μμ), presión diferencial máxima (ΔPΔP), etc.
- Coeficiente de permeabilidad o permeabilidad específica (LpLp): que relaciona permeado y presión.

6.3.2. Determinar la tasa de permeación (flujo de permeado por unidad de área)

Se emplea la ley de Darcy ajustada para filtración tangencial:

$$J_v = L_p \times \Delta P$$

donde:

- Jv: flujo volumétrico por unidad de área ($m^3/m^2 \cdot h$)
- Lp: permeabilidad específica de la membrana (m/(Pa·h))
- ΔP: diferencia de presión aplicada (Pa)

6.3.3 Calcular el área de filtración necesaria

El área total de filtración (A) se obtiene dividiendo el flujo de permeado requerido (Qp) por la tasa de permeación por unidad de área (Jv):

$$A = \frac{Q_p}{J_v} = \frac{Q_p}{L_p \times \Delta P}$$

6.3.4. Considerar el factor de seguridad y fouling

Debido a que la resistencia de la membrana puede aumentar por fouling y otros efectos, se recomienda incluir un factor de corrección (Fs):

$$A_{final} = A \times F_s$$

donde:

- Fs: factor de seguridad

6.3.5. Ejemplo práctico simplificado

Supongamos que:

- Quieres filtrar Qp=1 m3/h de permeado. (2.78×10^{-4} m^3/s)
- La diferencia de presión aplicada es ΔP=200 kPa
- La permeabilidad específica del filtro es Lp=1×10−12 m/(Pa x s) (valor típico)

$$J_v = L_p \times \Delta P \qquad J_v = 1 \times 10^{-12} \times 200\,000\,\mathrm{Pa} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}$$

$$A = \frac{Q_p}{J_v} = \frac{2.78 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-7}} \approx 1390\,\mathrm{m}^2$$

Si consideramos un 30% de superficie adicional

A final = 1390 x 1.3 = 1807 m^2

7- EVALUACIÓN PRÁCTICA DE PERFORMANCE DE FILTRADO

Analizando el comportamiento de flujo de fluido a través de un medio poroso filtrante, puede considerarse un sistema de resistencias en serie y emular a la ecuación de transferencia de calor convectivo

$$q = Lp \; x \; DP \; x \; Af$$

Q = Caudal de fluido a través del filtro (L/h)

Lp = permeabilidad específica (L/hm^2 Pa) definida para el tipo de tecnología y para el rango operativo específico

ΔP= Diferencia de presión a través del lecho (Pascales)

Af= área de filtrado (m^2)

Ejemplo:

Durante un ensayo de filtración, se determinó que en un elemento filtrante de 0.1 m^2 fue posible filtrar 45 L de un fluido de 500 NTU hasta 20 NTU, durante 20 min a una tasa promedio de 2500 ml/min y a 2 bar promedio de ΔP.

Con estos datos, puede evaluarse Lp

variable	referencia	Unidad	valor
Area de filtrado	Af	m2	0,1
Volumen	V	L	45
tiempo	t	min	20
Caudal promedio real	Q	ml/min	2250
	Q	L/min	2,25
	Q	L/h	135
Densidad de flujo volumétrico	Jv	L/hm2	1350
Diferencia de presión a través del lecho	ΔP	Bar	2
	ΔP	Kpa	200
permeabilidad específica	Lp	L/m2 min KPa	6,75

Con el valor estimado de Lp, puede entonces seleccionarse un filtro con la misma tecnología, considerando que el comportamiento normal y eficiente operativo del equipo se manifiesta dentro de los límites de ΔP en los que el lecho poroso se mantiene estable. Al avanzar el ciclol de filtrado, las condiciones fluidodinámicas se modifican por oclusión de los poros por la acumulación de sólidos, la permeabilidad específica disminuye y el flujo a través de un área constante induce al aumento de ΔP ocasionando que el comportamiento operativo estable entra en su zona límite de emergencia, por lo que, si no es detenido el flujo para limpieza del lecho poroso, el exceso de presión produce flujo parásito o de by pass por zonas donde se ha producido una canalización secundaria, la que contamina el líquido filtrado por ingreso de material con alta turbidez, en este caso.