FACULTAD DE INGENIERÍA

Trabajo Práctico 2
Funciones de varias variables

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo de varias variables"de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Ecuaciones del plano tangente y recta normal a una superficie en un punto P_0:

- Superficie dada en forma implícita por $F(x,y,z)=0$, punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

  PLANO: $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$

  RECTA: $\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$ $\quad o \quad$ $(x,y,z)=P_0+t\nabla F(P_0),\ t\in\mathbb{R}$

- Superficie dada en forma explícita por $z=f(x,y)$, punto $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

  PLANO: $z=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)$

  RECTA: $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ $\quad o \quad$ $(x,y,z)=P_0+t(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1),\ t\in\mathbb{R}$

1. Funciones de varias variables

1. (r) Evalúe la función $f(x,y)=x^2+xy^3$ en los puntos que corresponde, para obtener los siguientes valores:

   a) $f(0,0)$ *b)* $f(-1,1)$ *c)* $f(1,-1)$ *d)* $f(2,3)$ *e)* $f(-3,-2)$

   Además, analice cuáles son los conjuntos de partida y de llegada de f.

2. Obtenga y grafique el dominio de cada función. Indique cuál es el conjunto Imagen.

   a) (*r*) $f(x,y)=\sqrt{y-x-2}$ *b)* (*o*) $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln(4-x^2-y^2)}$

3. (o) Siendo $D\subset\mathbb{R}^2$, considere la función $f:D\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\dfrac{x^2-y}{x^4+y^2}$:

   a) Indique el dominio D, como el mayor conjunto posible.
   b) Evalúe f(-1, 2).
   c) Indique ceros de *f*.
   d) ¿Cuál es el conjunto de puntos del dominio D donde f es positiva o negativa?

4. (o) Obtenga y grafique las curvas de nivel $f(x,y)=c$ sobre el mismo conjunto de ejes coordenados para los valores dados de c. Nos referimos a estas curvas de nivel como un mapa de contorno.

   a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $c=-1,0,1,4,9,16$; *b)* $f(x,y)=xy$, $c=-4,-1,0,1,4$.

5. (r) Obtenga el dominio de las siguientes funciones y determine el rango de las mismas. Describa las curvas de nivel de cada función y encuentre la frontera del dominio de cada una. Determine si el dominio es una región abierta, cerrada o ninguna de las dos, y decida si el dominio está o no acotado.

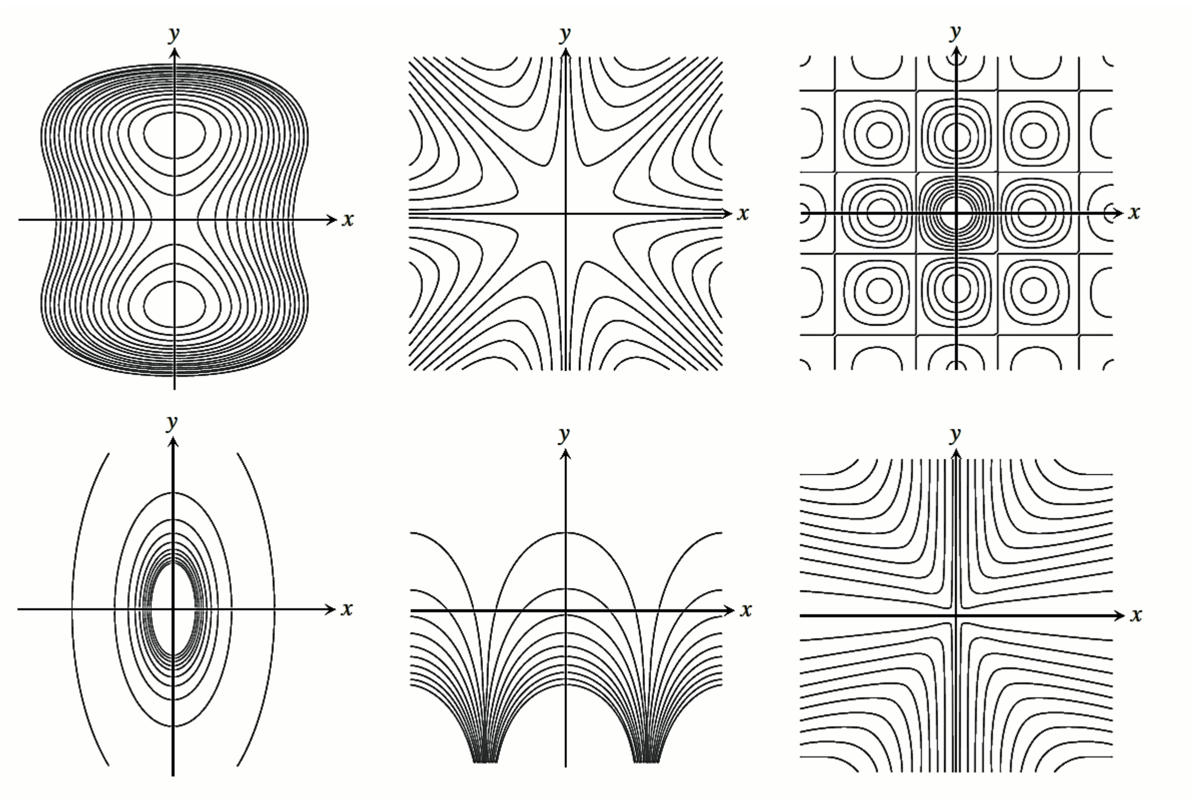
   a) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$; *b)* $f(x,y)=\operatorname{arc\,sen}(y-x)$; *c)* $f(x,y)=\ln(9-x^2-y^2)$.

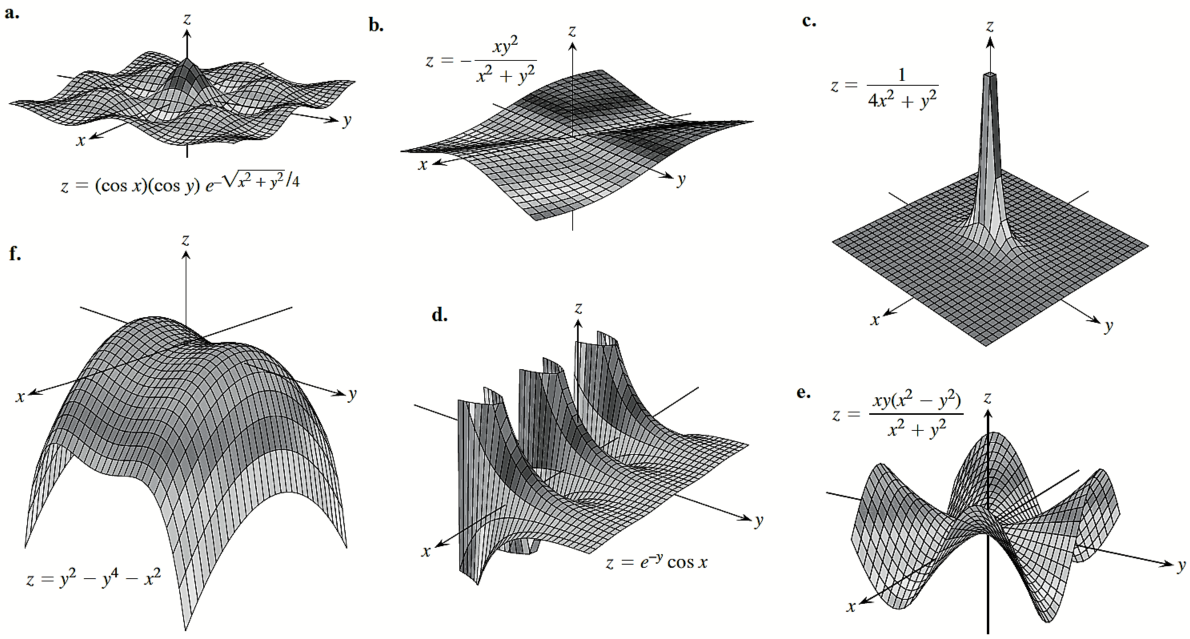
6. (o) Obtenga analíticamente y represente gráficamente el dominio D de la función $f : D \to \mathbb{R}$, dada por
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}.$$

7. (o) Muestre los valores de las siguientes funciones de dos maneras: I) graficando la superficie $z = f(x,y)$, y II) dibujando varias curvas de nivel en el dominio de la función. Marque cada línea de contorno.

   a) $f(x,y) = y^2$;
   b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$;
   c) $f(x,y) = 1 - |y|$;
   d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

8. (o) Asocie cada conjunto de curvas de nivel, del primer grupo de gráficos, con la función apropiada del segundo grupo.





9. (o) Dibuje la superficie de nivel típica (es decir $f(x, y, z) = 1$) para cada función:

   a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
   b) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$;
   c) $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

10. (o) Determine la ecuación para la superficie de nivel de la función en el punto dado. Realice un esbozo de la misma.

    a) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, -1, \sqrt{2})$;
    b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2)$, $(-1, 2, 1)$.

11. (*) Si la función V con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ da el potencial eléctrico en cada punto de D,

    a) ¿cómo se llaman las curvas de nivel de V? Interprete físicamente.
    b) Describa la forma de la placa D, si la función potencial está dada por

    $$V(x, y) = \frac{C}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

    donde C es una constante positiva (debe dar la forma de la placa D más grande posible).
    c) Trace algunas curvas de nivel de V.

2. Límite y continuidad

12. Calcule los siguientes límites:

a) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$	*d*) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$
b) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$	*e*) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{xy}$
c) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$	*f*) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2y} \cos(2x)$

13. (o) Si dado el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se hallan

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{\substack{y\to b\\ x\neq a}} f(x,y)\right) \quad \text{o} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ y\neq b}} f(x,y)\right),$$

se dice que se ha tomado **límites iterados**. Este procedimiento no siempre conduce al valor del límite. Analice los siguientes ejemplos.

a) Para analizar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

halle los límites iterados. Verifique que ambos valores coinciden con el valor del límite doble.

b) Para la función dada por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4},$$

verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ sí existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

c) Para la función dada por $f(x,y) = (x+y)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)$, verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ **no** existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ sí existe.

d) Aplicando límites iterados, halle

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y},$$

si existe. Si no existe, justifique.

14. ¿En cuáles puntos (x,y) del plano las siguientes funciones son continuas?

a) (o) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

b) (r) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

c) (r) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{2+\cos x}$.

15. ¿En cuáles puntos (x,y,z) del espacio las siguientes funciones son continuas?

a) (o) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$.

b) (r) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

c) (r) $h(x,y,z) = \dfrac{1}{z-\sqrt{x^2+y^2}}$.

16. (o) Considerando **diferentes trayectorias** de aproximación, demuestre que las siguientes funciones no tienen límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

$$a)\ f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad b)\ g(x,y) = \frac{x^2+y}{y}.$$

17. (r) Demuestre que el siguiente límite no existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1}$.

18. (o) Demuestre que la función $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ presenta una tendencia a *cero* a lo largo de todas las líneas rectas que tienden a $(0,0)$, pero no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

3. Derivadas parciales

19. (o) Obtenga $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para cada una de las siguientes funciones.

    a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; además, pruebe (por definición) que f es diferenciable.

    b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

    c) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$.

    d) $f(x,y) = x^y$.

20. (o) Calcule la derivada parcial de las siguientes funciones con respecto a cada variable.

    a) $f(x,y,z) = x^2 - 3z$; además, pruebe (por definición) que f es diferenciable.

    b) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$.

    c) $h(\rho,\phi,\theta) = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta$.

21. (r) Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

    b) $h(x,y) = xe^y + y + 1$.

22. (o) Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$:

    a) $w = \ln(2x+3y)$.

    b) $w = e^x + x\ln y + y\ln x$.

23. (r)

    - Demuestre que la función $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$ satisface la ecuación de Laplace. ¿En qué conjunto? (*Ecuación de Laplace:* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$).
    - Sea la función $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; indique cuál es su dominio D y pruebe que es una función **armónica** en D, es decir, que satisface la ecuación de Laplace en D.

24. (o) Demuestre que la función $w = \operatorname{sen}(x+ct)$ es solución de la ecuación de onda. (*Ecuación de onda:* $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$).

25. (r) Demuestre que la función $u(x,t) = \operatorname{sen}(\alpha x)e^{-\beta t}$ satisface la ecuación del calor (distribución del calor en el tiempo t en una dimensión: $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde $k > 0$), para ciertos valores de α y β positivos. Indique cuáles son dichos valores.

26. (*) Una función $f(x,y)$ que tiene sus primeras derivadas continuas en una región abierta R, ¿tiene que ser continua en R? Justifique su respuesta.

27. (*) Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden. Compruebe que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sugerencia: calcule las derivadas parciales involucradas por definición y compruebe que $f_{xy}(0,0) = -1$ y que $f_{yx}(0,0) = 1$.

4. Regla de la cadena

28. En cada uno de los ejercicios presentados abajo se debe hacer lo mismo que se indica en el primero de ellos, adaptando las consignas en cada caso.

    a) (o) Sean $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$ y $w(t) = f(x(t), y(t))$.

    1) Haga un diagrama de la composición, identificando la o las variables independientes, intermedias y dependientes, los espacios en que están incluidos los dominios y las imágenes de las funciones involucradas, incluida la función compuesta.
    2) Exprese $\frac{dw}{dt}$ como una función de t usando la regla de la cadena.
    3) Halle $\frac{dw}{dt}$ expresando w en términos de t y derivando directamente con respecto a t.
    4) Finalmente evalúe $\frac{dw}{dt}$ en el valor de $t = 0$.

    b) (r) $f(x,y,z) = 2ye^x - \ln z$,
    $$x(t) = \ln(t^2+1),\ y(t) = \arctan t,\ z(t) = e^t \text{ y } w(t) = f(x(t), y(t), z(t));\ t = 1.$$

    c) (o)$f(x,y) = 4e^x \ln y$,
    $$x(u,v) = \ln(u \cos v),\ y(u,v) = u \operatorname{sen} v;\ w(u,v) = f(x(u,v), y(u,v));\ (u,v) = (2, \pi/4).$$

    d) (r) $w = xy + yz + xz$,
    $$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv;\ (u,v) = (1/2, 1).$$

29. (r) Determine $\frac{\partial w}{\partial r}$, cuando $r = 1$, $s = -1$, si $w = (x+y+z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \operatorname{sen}(r+s)$.

30. (o) Sea $T = T(x,y)$ la temperatura en el punto (x,y) de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y suponga que:
    $$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y,\ \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

    a) Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima en la circunferencia, examinando las derivadas $\frac{dT}{dt}$, y $\frac{d^2T}{dt^2}$.

    b) Suponga que $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T dentro de la circunferencia.

31. *a*) (o) Suponiendo que las ecuaciones definen a y como una función derivable de x, use el teorema de derivación implícita para obtener el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto dado.

    a_1) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1, 1)$;

    a_2) $xe^y + \operatorname{sen}(xy) + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$.

    b) (r) Suponiendo que las ecuaciones definen a z como una función derivable de x y de y, use el teorema de derivación implícita para obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto dado.

    b_1) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1,1,1)$;

    b_2) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) + \operatorname{sen}(x+z) = 0$, (π, π, π).

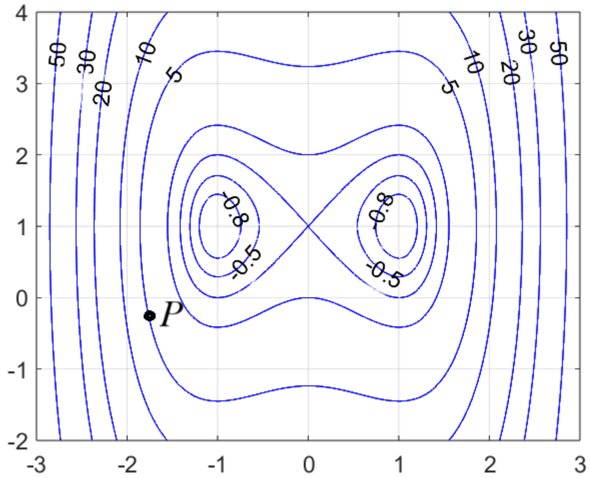
5. Derivadas direccionales y vectores gradiente

32. Determine el gradiente de la función en el punto dado y dibújelo junto a la curva de nivel que pasa por el punto.

    a) (o) $f(x,y) = y - x$, $(2, 1)$.

b) (r) $g(x,y) = xy^2$, $(2,-1)$.

33. (o) Sean la función $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y + 1$ y el diagrama de curvas de nivel de la misma, presentado a continuación, en el que se ha marcado un punto P..



a) Determine el gradiente de f en el punto $(0,2)$ y represente un múltiplo positivo del mismo en el diagrama de curvas de nivel.

b) Indique cuáles son los valores de las curvas de nivel en las que el mismo no está indicado.

c) Represente gráficamente un múltiplo positivo del gradiente de f en el punto P.

34. (r) Obtenga el gradiente de $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$ en el punto $(-1,2,-2)$.

35. (o) Encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$:

a) $g(x,y) = \dfrac{x-y}{xy+2}$, $P_0(1,-1)$, $\vec{\mathbf{u}} = 12\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$.

b) $h(x,y,z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $P_0(1,0,1/2)$, $\vec{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.

36. (r) Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, obtenga las direcciones en las cuales f crece y decrece más rápidamente en $P_0(-1,1)$. Luego obtenga los valores de las derivadas de f en dichas direcciones.

37. (o) Dada $f(x,y) = x^2 + y^2$, grafique la curva $f(x,y) = 4$ junto con ∇f en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y la recta tangente a la dicha curva de nivel en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Luego escriba la ecuación para la recta tangente correspondiente.

38. (o) Sea $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Obtenga las direcciones $\vec{\mathbf{u}}$ y los valores de $D_u f(1,-1)$ para los cuales:

a) $D_u f(1,-1)$ es el más grande;

b) $D_u f(1,-1)$ es el más pequeño;

c) $D_u f(1,-1) = 0$;

d) $D_u f(1,-1) = 4$;

e) $D_u f(1,-1) = -3$.

39. (*) ¿Cuál es la relación entre la derivada de una función diferenciable $f(x,y,z)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ y el componente escalar de $(\nabla f)(P_0)$ en la dirección de $\hat{\mathbf{u}}$? Justifique su respuesta.

40. (o) La función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$. Pruebe que, aunque tiene derivadas parciales en $(0,0)$, no es diferenciable en dicho punto.

Sugerencia: para probar que f no es diferenciable en $(0,0)$ puede probar que la derivada direccional de f en $(0,0)$ en ciertas direcciones $\mathbf{u}$ no es igual a $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$.

41. (*) Verifique que la función g definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0, \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$ aunque sus derivadas parciales de primer orden no son continuas en $(0,0)$. Para ello:

a) calcule las derivadas parciales de primer orden de g en $(0,0)$ y en (x,y) para (x,y) tal que $x+y \neq 0$.

b) Compruebe que g_x no es continua en $(0,0)$ verificando que no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_x(x,y)$.

c) Verifique que g es diferenciable en $(0,0)$ aplicando la definición. Sugerencia: plantee $\Delta g(0,0)$ y desarrolle la potencia que aparece en la expresión.

6. Planos tangentes, rectas normales y diferenciales

42. (o) Encuentre la ecuación para el plano tangente y la recta normal en los puntos $P_0(1,1,1)$, $P_1(\sqrt{3},0,0)$ y $P_2(0,0,\sqrt{3})$ a la superficie dada por $x^2+y^2+z^2=3$.

43. (r) Obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ en el punto $(0,0,1)$.

44. (r)

a) ¿Aproximadamente cuánto cambiará $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde $P_0(3,4,12)$ una distancia $ds \approxeq 0,1$ unidades en la dirección de $3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$?

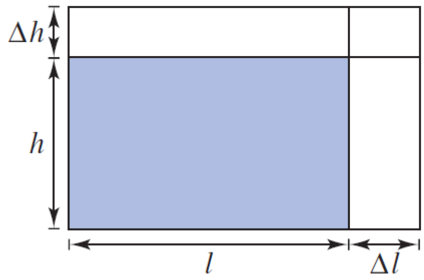
b) Estime el cambio de $f(x,y,z) = e^x \cos(yz)$ cuando el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde el origen una distancia $ds = 0{,}1$ unidades en la dirección $2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$.

45. (o) Obtenga la aproximación lineal $L(x,y)$ y la diferencial de la función $f(x,y) = x^2+y^2+1$ en el punto $(0,0)$. Repita el ejercicio para el punto $(1,1)$.

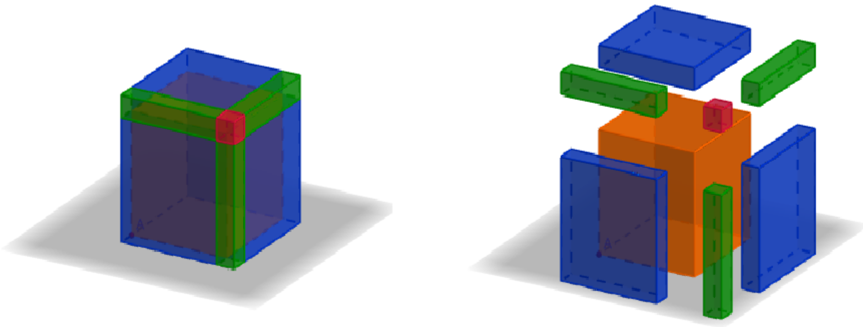
46. (o) Obtenga la aproximación lineal $L(x,y,z)$ y la diferencial de la función $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, en cada punto: $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, y $(1,0,0)$.

47. (r) La lata cilíndrica de un refresco tiene $12cm$ de alto y $3cm$ de radio. El fabricante planea reducir la altura de la lata en $0,2cm$ y el radio en $0,3cm$. Utilizando diferenciales estime cuánta bebida menos encontrarán los consumidores en cada nueva lata.

48. *a*) (r) El área de un rectángulo es $A = lh$, con posibles errores Δl y Δh. Encuentre dA y encuentre en la figura las regiones cuyas áreas vienen dadas por los términos de dA. ¿Cuál es la región en el dibujo que corresponde a la diferencia entre ΔA y dA?

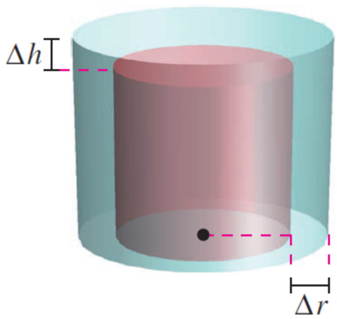


b) (r) Repita el ítem anterior, para el caso del volumen de un prisma de base cuadrada. Puede ver una imagen similar a la de abajo en el link https://www.geogebra.org/m/EPnkxkBV



c) (r) Ídem, para el caso de un prisma de base rectangular.

d) (r) El volumen del cilindro circular interior en la figura es $V = \pi r^2 h$. Los errores posibles en el radio r y la altura h son Δr y Δh, respectivamente. Halle dV e identifique en la figura los sólidos cuyos volúmenes están dados por los términos de dV. Además indique qué representa la diferencia entre ΔV y dV.
Sugerencia: puede ser útil considerar el radio medio entre r y $r + dr$.



7. Fórmula de Taylor para dos variables

49. Use la fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen para obtener la aproximación cuadrática de cada una de las funciones dadas, cerca del origen. Exprese claramente el error.

    a) (o) $f(x, y) = xe^y$.
    b) (r) $f(x, y) = y \operatorname{sen}(x)$.
    c) (r) $f(x, y) = x^2 + 3xy$.
    d) (r) $f(x, y) = x + 3y + 5$.
    e) (r) $f(x, y) = e^x \cos(y)$.

50. (r) Use la fórmula de Taylor para encontrar una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el origen. Exprese claramente el error. (*) Calcule el error en la aproximación si $|x| \leq 0,1$ y $|y| \leq 0,1$.

8. Valores extremos y puntos de silla

51. Determine los máximos y mínimos locales y puntos de silla de las siguientes funciones:

    a) (o) $f(x, y) = 3x^2y - 3x^2 + y^3 - 3y^2 + 2$.
    b) (r) $g(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$.
    c) (o) $h(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$.
    d) (r) $f_1(x, y) = y \operatorname{sen} x$.
    e) (r) $g_1(x, y) = e^{-y}(x^2 + y^2)$.
    f) (r) $h_1(x, y) = \sqrt{3 + 2x - x^2 - y^2}$.

52. (r) El discriminante $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ se anula en el origen para $f(x, y) = x^2y^2$, de manera que el criterio de la segunda derivada falla. Determine qué presenta la función en el origen imaginando la apariencia de la superficie $z = f(x, y)$.

53. (r) Dada la función $f(x, y) = x^2y^3$, determine los puntos críticos de f. Luego, indique cuáles son los máximos y mínimos locales y puntos de silla de esta función. Un gráfico de curvas de nivel puede ser de ayuda.

54. La función dada por $f(x, y) = x^2 + pxy + y^2$ tiene un punto crítico en $(0, 0)$, cualquiera sea p. Verifique este hecho. Con respecto a este punto crítico:

    a) ¿Para qué valores de la constante p la prueba de la derivada segunda garantiza que la función f tiene un punto de silla en $(0, 0)$?
    b) ¿Para qué valores de la constante p la prueba de la derivada segunda garantiza que la función f tiene un mínimo local en $(0, 0)$?
    c) ¿Para qué valores de la constante p la prueba de la derivada segunda no es concluyente? En este caso, clasifique el punto crítico $(0, 0)$ aplicando otro procedimiento.
    d) ¿Puede haber un máximo local en $(0, 0)$?

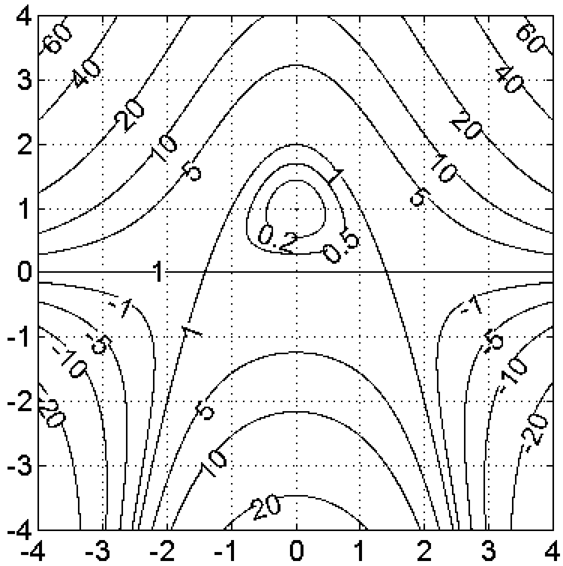
55. (o) Encuentre los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en una placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.

56. (r) Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La placa incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el plano (x, y) es $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

57. (r) Determine tres números cuya suma sea 9 y cuya suma de cuadrados sea un mínimo.

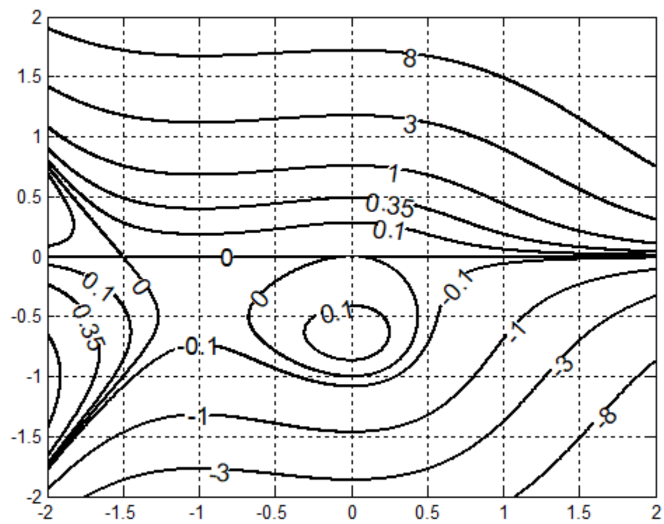
58. (r) Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

59. *a*) (o) El siguiente diagrama de curvas de nivel corresponde a cierta función f, de la que se conoce que tiene tres puntos críticos. Basándose en la información que le da el gráfico y justificando cada caso, marque de forma aproximada los puntos críticos en el gráfico e indique para cada uno de éstos si la función presenta allí un máximo local, un mínimo local o un punto de silla.



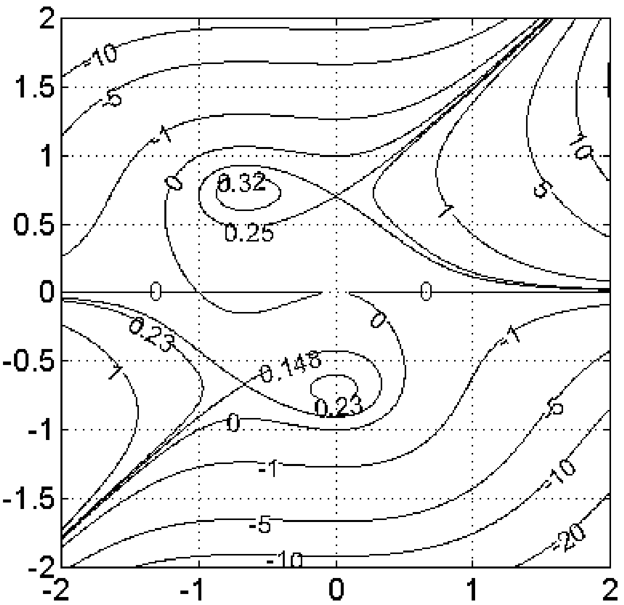
b) (r) Constate las conclusiones que extrajo en el ítem anterior, sabiendo que la fórmula de la función presentada es $f(x,y) = x^2y + (y-1)^2$.

60. (r) Sea la función diferenciable f dada por $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3y + y^3 + x^2y + y^2$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.



Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_0(0,0)$ y $P_1(0,-\frac{2}{3})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_0 y en P_1. Justifique su respuesta. Marque en el gráfico otro punto crítico y clasifíquelo.

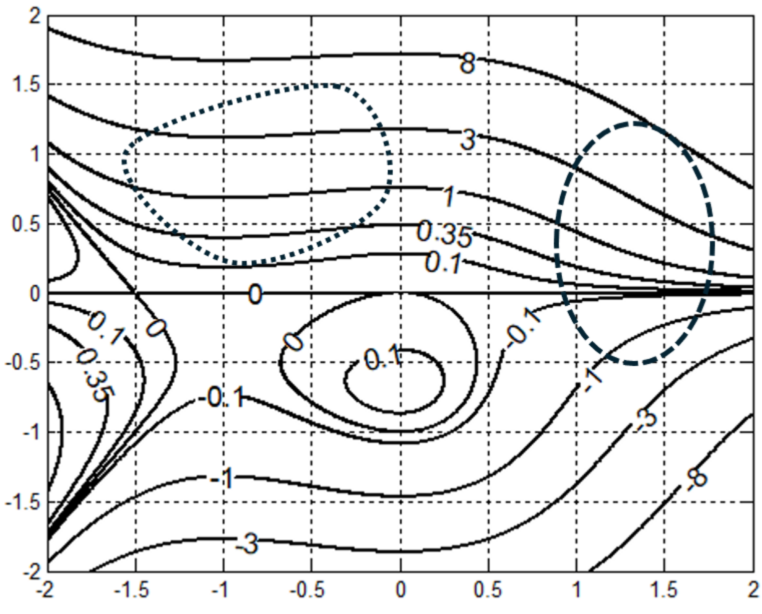
61. (r) Sea la función diferenciable f dada por $f(x,y) = x^3y + y^2 + x^2y - y^4$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.



Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_1 y en P_2. Justifique su respuesta. Marque en el gráfico los restantes puntos críticos y clasifíquelos. Verifique sus respuestas analíticamente (deberá hallar las raíces de un polinomio de tercer grado, se recomienda el uso de calculadora o computadora para hacerlo).

9. Extremos condicionados y Multiplicadores de Lagrange

62. (r) Recuerde la función diferenciable f dada por $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3y + y^3 + x^2y + y^2$, presentada previamente en el ejercicio 60. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f, en trazo continuo, y dos curvas en trazos punteados, que representan restricciones al dominio de f.



Analizando el gráfico, indique cuáles son aproximadamente los extremos absolutos de f restringida a cada una de estas dos restricciones y marque en el gráfico en qué puntos se realizan estos extremos.

63. (o) Dado el problema de hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = x + 2y$ sujeta a la restricción $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$,

    a) represente gráficamente la restricción y algunas curvas de nivel de la función cuyos valores extremos se buscan. Dé una estimación de las coordenadas de los posibles puntos críticos.

    b) Resuelva el problema analíticamente y compare el resultado obtenido con la respuesta del ítem anterior.

    c) ¿Cómo resultan los vectores gradientes de la función objetivo f y de la función restricción en los puntos encontrados?

64. (o) Calcule los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2+2y^2$ sujeta a la condición $x^2+y^2 = 1$, para ello:

    a) represente en un mismo gráfico la superficie dada por el gráfico de f y la curva que es la proyección sobre el gráfico de f de la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

    b) Grafique la restricción junto con algunas curvas de nivel de f y los vectores gradiente en los puntos de tangencia.

65. (r) Determine los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde $f(x, y) = xy$ asume valores extremos, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

66. (r) Obtenga las dimensiones de una lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor área superficial cuyo volumen sea $16\pi cm^3$, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

67. (r) Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

68. (r) Determine las dimensiones de la caja rectangular cerrada con mayor volumen que puede inscribirse en una esfera unitaria, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange. Compare su resultado con lo hallado en el ejercicio 58.

69. (r) Maximice la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y = 0$ y $y + z = 0$, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

70. (o) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para hallar la mínima distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y = x - 2$ y los de la parábola dada por $y = x^2$.

71. (*) Un problema de **programación matemática** (lineal o no lineal) consiste en hallar los extremos de una función f sujeta a un conjunto de restricciones dadas por igualdades y/o desigualdades $g_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, $h_j \leq 0$, $1 \leq j \leq m$, tal como:

$$\begin{array}{ll} (P) & \text{mín} f(x,y) \\ s.a & g_i(x,y) = 0 \quad (1 \leq i \leq k); \\ & h_j(x,y) \leq 0 \quad (1 \leq j \leq m). \end{array}$$

    Si todas las funciones involucradas f, g_i, $1 \leq i \leq k$ y h_j, $1 \leq j \leq m$, son lineales, entonces el problema se llama lineal.

    Ejemplo: se desea hallar la máxima temperatura que experimenta un móvil que se desplaza por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, cuando la temperatura en el plano viene dada por

$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, por el método de multiplicadores de Lagrange. Para ello se hace el siguiente planteo:

$$\begin{array}{llcll} (P) & \text{mín}\, f(x,y) & \text{que en este caso es} & (P) & \text{mín}\, 3x^2+4y^2 \\ s.a & f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y); & & s.a & 6x = \lambda 2x; \\ & f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y); & & & 8y = \lambda 2y; \\ & g(x,y) = 0. & & & x^2+y^2-1=0. \end{array}$$

En este ejemplo concreto, se está frente a un sistema de ecuaciones no lineales (dado que las ecuaciones son no lineales) y un problema no lineal (dado que el sistema es no lineal y la función que se maximiza es no lineal). Si, en cambio, la curva por la que se desplaza el móvil viene dada por $x + y = 1$, y la temperatura en el plano es la misma $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, por el método de multiplicadores de Lagrange se plantea:

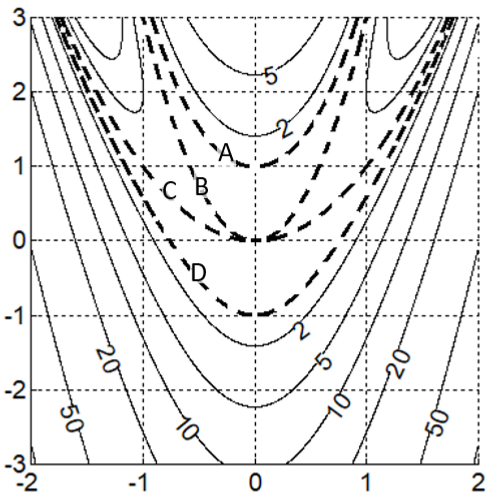
$$\begin{array}{llcll} (P) & \text{mín}\, f(x,y) & \text{que ahora es} & (P) & \text{mín}\, 3x^2+4y^2 \\ s.a & f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y); & & s.a & 6x = \lambda 1; \\ & f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y); & & & 8y = \lambda 1; \\ & g(x,y) = 0. & & & x+y-1=0. \end{array}$$

En este caso, se está frente a un sistema de ecuaciones lineales y un problema no lineal (dado que la función que se maximiza es no lineal).

Tarea: analice los planteos de los ejercicios 63 a 70 e identifique en cuál se ha generado un sistema o un problema lineal y en cuál, no.

10. Ejercicios integradores: opcionales (*)

72. (r) La figura presenta algunas curvas de nivel de la función f dada por $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

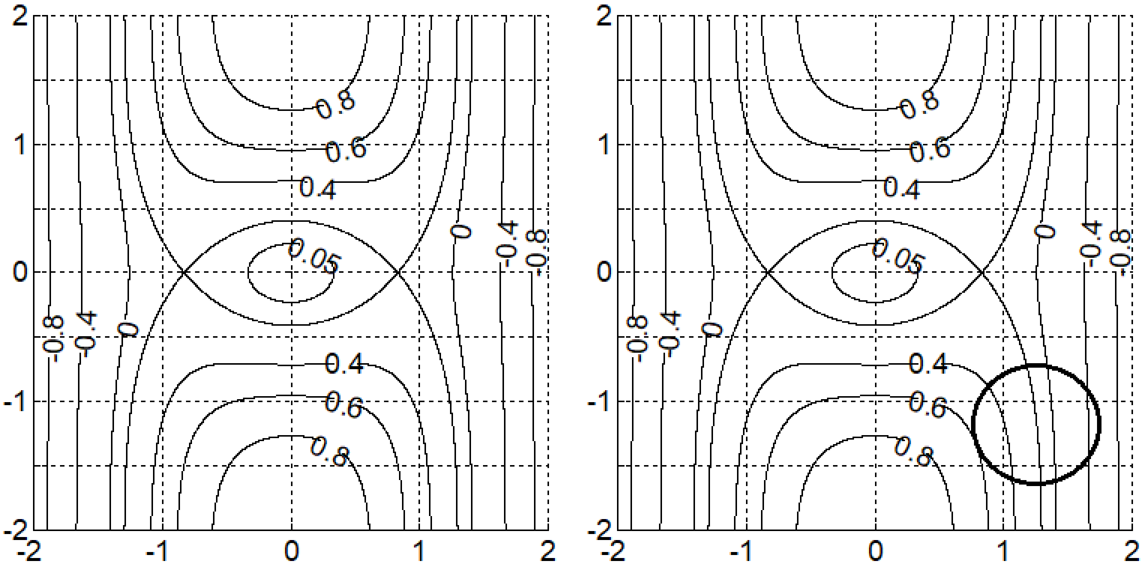


   a) Para las curvas remarcadas, llamadas A, B, C y D, indique a qué valor corresponde cada una.

   b) Halle los extremos y puntos de silla de f, justificando detalladamente su respuesta y expresando la misma de manera completa.

   c) Halle, haciendo únicamente un análisis gráfico, los extremos de f sujeta a la restricción $y = -x^2$, si los tiene. Justifique su respuesta.

73. Sea la función f dada por $f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2} - e^{-x^2-y^2}$. Se incluye un gráfico con algunas curvas de nivel de f, a la izquierda; a la derecha, se presenta el mismo diagrama de curvas de nivel de f y se ha agregado en el mismo una curva de nivel correspondiente a una función g diferenciable, digamos $g(x,y) = 0$.



a) Halle los extremos y puntos de silla de f.

b) Trace en el gráfico de la izquierda un múltiplo positivo del vector $\nabla f\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

c) Indique cuál es el signo de $f_x(1, -1)$.

d) Indique cuál es el signo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(0, -1)$ para $\mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

e) Indique cuáles son los valores extremos de f restringida a los puntos que cumplen la condición $g(x, y) = 0$, indicando tanto el valor extremo como el punto en el que se realiza el mismo, en el diagrama. Además, escriba el planteo para resolver analíticamente este problema.

74. Este ejercicio admite más de un planteo posible. Elija uno. Dada la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

a) exprese z como una función **continua** de x e y, $z = f(x, y)$;

b) Determine y grafique el dominio de f.

c) Indique la imagen de f.

d) Halle las ecuaciones de las trazas del gráfico de f y grafique.

e) Encuentre las ecuaciones de tres curvas de nivel y grafique.

f) Halle el gradiente de f en algún punto del dominio, de su elección, y trácelo en su gráfico.

75. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$:

a) Halle la ecuación de la curva de nivel $f(x, y) = z$ para $z = f(1, 2)$ y grafique.

b) Encuentre el gradiente de f en el punto $P(1, 2)$ y represente el gradiente en el gráfico anterior.

c) Calcule la derivada direccional de f en el mismo punto, en la dirección del vector $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 1)$.

d) Calcule la derivada de f en la dirección que forma un ángulo $\alpha = \pi/6$ con el semieje positivo de las x.

e) Calcule la derivada de f en el punto $(1, 2)$ en la dirección que va del punto $Q(2, 1)$ al punto $R(1, 3)$.

f) Determine la dirección y el valor de la máxima derivada direccional en el punto $P(1, 2)$.

g) Determine la dirección y el valor de la mínima derivada direccional en el punto $P(1, 2)$.

h) Determine la dirección en la que se anula la derivada en el punto $P(1, 2)$ e interprete por qué.

i) Determine en qué dirección o direcciones la derivada en el punto $P(1,2)$ toma el valor 2. Si este valor no corresponde a ninguna derivada direccional para esta función en $P(2,1)$, justifique.

76. *a*) Se desea estudiar si la ecuación $2x - 3y^2 + xz = 1$ define a z implícitamente como una función de x y de y. Para ello, considere la función $F(x,y,z) = 2x-3y^2+xz$ y, analizando las condiciones correspondientes, verifique que $F(x,y,z) = 1$ define a z implícitamente como función de x y de y en un entorno de $(1,-1,2)$. (Ayuda: página 781 del libro de Thomas.)

    b) A la luz de lo concluido en el ítem anterior, calcule la derivada de f en la dirección de $\vec{\mathbf{v}} = (2,-1)$ en el punto $(1,-1)$. (Ayuda: página 780 del libro de Thomas.)

77. Analice si existe el plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en el punto $P(1,2,1)$. En caso afirmativo, determine la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en P.

78. Dada la función $f(x,y) = x^2 - y^2$:

    a) Calcule el incremento de la función al pasar de $P(-1,-1)$ a $Q(-0,98;-1,01)$.

    b) Calcule el valor de la diferencial de la función en P y utilícelo para aproximar el incremento de la función.

    c) Determine si es buena la estimación. Justifique.

    d) Halle la aproximación lineal de f en P y utilícela para determinar el valor de la función en Q.

79. Dada la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

    a) Defina z como alguna función continua f de x y de y, en forma explícita.

    b) Determine y grafique el dominio de f.

    c) Indique el conjunto imagen de f.

    d) Halle las ecuaciones de las trazas de f y grafique.

    e) Encuentre las ecuaciones de tres curvas de nivel de f y grafique.

    f) Calcule la derivada direccional de f en el punto $P(1,1)$ en la dirección dada por $\vec{\mathbf{v}} = (1,-2)$.

    g) Halle la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie que es el gráfico de f en un punto que usted elija.

    h) Determine y clasifique los extremos de f.

80. Encuentre el punto $P(x,y,z)$ del plano $2x + y - z - 5 = 0$ que esté mas cercano al origen. Utilice el Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales y luego verifique el resultado utilizando el Método de multiplicadores de Lagrange.

81. Para obtener la distancia mínima en el plano xy de la recta $y = x + 1$ a la parábola $y^2 = x$, minimice la función $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ sujeta a las restricciones $x = y + 1$ y $u = v^2$.

82. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$.

    a) Describa la superficie de nivel $f(x,y,z) = 0$.

    b) Calcule el gradiente de f en el punto $(2,1,3)$. Interprete en una representación gráfica.

    c) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(2,1,3)$ en la dirección $\mathbf{v} = (0,2,0)$. Interprete esta derivada.

    d) Halle el valor mínimo de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2+y^2+z^2 = 1$.

e) Indique si f es o no diferenciable en $\mathbb{R}^3$, justificando su respuesta. Interprete.

f) Halle, si existe, la aproximación lineal de f en el punto $(2, 1, 3)$. Interprete.

83. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$.

a) Represente gráficamente la función f.

b) Marque en su gráfico el punto $(0, 2, f(0, 2))$.

c) Represente en otro gráfico la curva de nivel $f(x, y) = 0$.

d) Calcule el gradiente de f en el punto $(0, 2)$. Represéntelo en alguno de sus gráficos e interprete.

e) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0, 2)$ en la dirección $\mathbf{v} = (1, 1)$. Interprete esta derivada.

f) Halle, si existen, los extremos locales de f. Justifique.

g) Halle los valores extremos absolutos de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2 + y^2 = 1$.

84. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$.

a) Describa las superficies de nivel $f(x, y, z) = k$, para $k = 1, 0$ y -1.

b) Halle los valores extremos absolutos de f, si solo se consideran los puntos de la superficie dada por la ecuación $y^2 + z^2 = 1$.

c) Halle, si existe, la diferencial (total) de f en el punto $(1, 0, 0)$.

d) (Para hacer con el TP3) Calcule $\iiint_E f dV$, cuando E es el sólido comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

85. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(9 - x^2 - y^2)}$.

a) Indique cuál es el el dominio D de f (el máximo en el sentido de la inclusión). Represéntelo gráficamente.

b) Calcule el gradiente de f en el punto $(0, 1)$; represéntelo gráficamente e interprete.

86. Se desea conocer los valores extremos absolutos de la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos del plano xy que cumplen $x + y = 2$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva, indicando claramente el valor extremo alcanzado y el o los puntos donde se alcanza.

87. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ sobre los puntos del plano tales que $x^2 + y^2 = 1$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva el problema: halle los valores extremos e indique en qué puntos se presentan dichos valores extremos.

88. Se desea conocer el valor mínimo de la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos del plano xy que cumplen $x + y = 2$.

a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

b) Resuelva, indicando claramente el valor mínimo alcanzado y el o los puntos donde se alcanza.

89. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de $32\,dm^3$. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado. Indique también cuál es esa cantidad mínima de cartón necesaria.

90. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y, z) = xyz$ sobre los puntos del espacio que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ y $y = x^2 + z^2$. Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

91. Sea la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$. Indique para cada afirmación si es verdadera o falsa. Debe justificar todas sus respuestas.

   a) ☐ No existe un plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P(0, 0, 0)$.

   b) ☐ La función f es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

   c) ☐ Al buscar los valores extremos de f se encuentra un único punto crítico.

   d) ☐ La divergencia del gradiente de f toma valores negativos en algunos puntos (que se llaman *sumideros*).

92. Sea la función $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

   a) ☐ No existe un plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P(0, 0, 0)$.

   b) ☐ La función f es diferenciable en $(1, 2, 3)$.

   c) ☐ La función f es continua en $(1, 2, 3)$.

   d) ☐ Si se busca el máximo de f sujeto a la restricción $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ se encuentra un valor máximo que se realiza en un único punto.

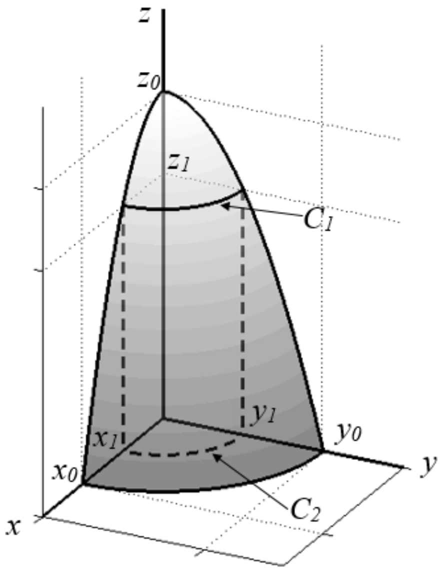
   e) ☐ La linealización de f en $(1, 2, 3)$ es la función dada por $L(x, y, z) = 6 + 2(x - 1) - 4(y - 2) + 6(z - 3)$.

   f) ☐ La linealización de f en $(1, 2, 3)$ coincide con el polinomio de Taylor de grado 1 de f alrededor de $(1, 2, 3)$.

   g) ☐ A partir del punto $(1, 2, 3)$ los valores de f disminuyen más rápidamente en la dirección del vector $(-1, 2, -3)$.

   h) ☐ (Para hacer con el TP4A) La integral de línea $\int_C \nabla f(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva suave cerrada y simple C incluida en el dominio de f puede no ser 0, dependiendo de la curva C.

93. La figura muestra el gráfico de una función f, con dominio D, algunos valores sobre los ejes coordenados y dos curvas.



a) Indique si $D \subset \mathbb{R}^2$ o si $D \subset \mathbb{R}^3$. Indique también en qué espacio están las imágenes.

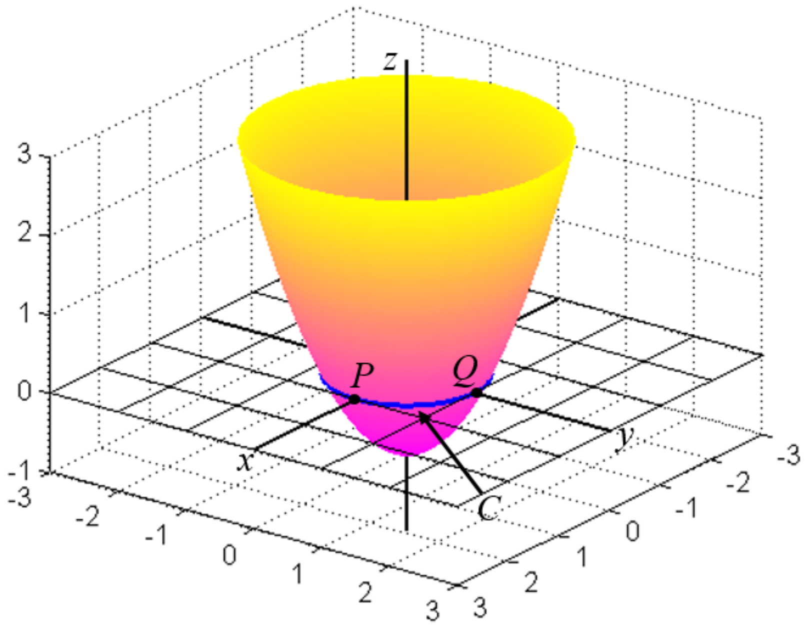
b) Indique cuál es la imagen del punto $\bar{0} \in D$.

c) Marque en el gráfico un punto S (que no esté sobre ninguno de los ejes coordenados) que cumpla $S \in D$ y $f(S) = 0$, si existe. Si no existe tal punto, justifique.

d) De las curvas C_1 y C_2, indique si alguna de ellas es una curva de nivel de f; en caso afirmativo, diga cuál es la imagen que le corresponde; en otro caso, justifique.

e) Elija un punto $U \in D$ y márquelo en el gráfico. Además, considere un vector $\mathbf{v}$ que sea un múltiplo positivo del vector gradiente de f en U. Dé los valores de las componentes de $\mathbf{v}$, prestando atención a los signos de cada una, y trace a $\mathbf{v}$ en el gráfico.

94. Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2 - 1$, representada en la figura a continuación; el plano $z = 0$ está trazado con un cuadriculado. En cada ítem realice lo pedido si es posible; si no lo es, explique por qué.



a) Defina una función g de dos variables tal que S sea el gráfico de g.

b) Si la curva C (donde S corta al plano $z = 0$) es una curva de nivel de g, indique a qué nivel o valor "k" corresponde.

c) Halle el vector $\nabla g(P)$, para el punto $P \in D(g)$ marcado en el gráfico (la abscisa de P es 1) y trace dicho vector en el gráfico.

d) Defina una función f de tres variables tal que S sea una superficie de nivel de f; indique a qué nivel o valor "k" corresponde dicha superficie de nivel.

e) Halle el vector $\nabla f(Q)$, para el punto $Q \in D(f)$ marcado en el gráfico (la ordenada de Q es 1) y trace dicho vector en el gráfico.

f) (Para hacer con el TP4B) Plantee una integral para calcular el área de la parte de S que se halla bajo el plano $z = 3$. Calcule dicha área.

g) (Para hacer con el TP3) Calcule la masa del sólido comprendido sobre la superficie S y bajo el plano $z = 3$, sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z) = z + 2$.

11. Aplicación

Dados el área A (fija) y la longitud de la base, b, de la sección transversal de un canal o acequia, como muestra la figura, ¿cómo deben elegirse el ángulo α de talud y la altura h del líquido para que el perímetro mojado sea el menor posible?