Trabajo Práctico 4
PARTE A: Integrales de Línea

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables”de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \qquad \text{Integral de línea de campo escalar}$$

$$\int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt \qquad \text{Integral de línea de campo vectorial}$$

Repaso de Curvas

1. (o)Relacione la ecuaciones vectoriales con los gráficos dados:

   a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1.$

   b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k},\ -1 \le t \le 1.$

   c) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0),\ 0 \le t \le 2\pi.$

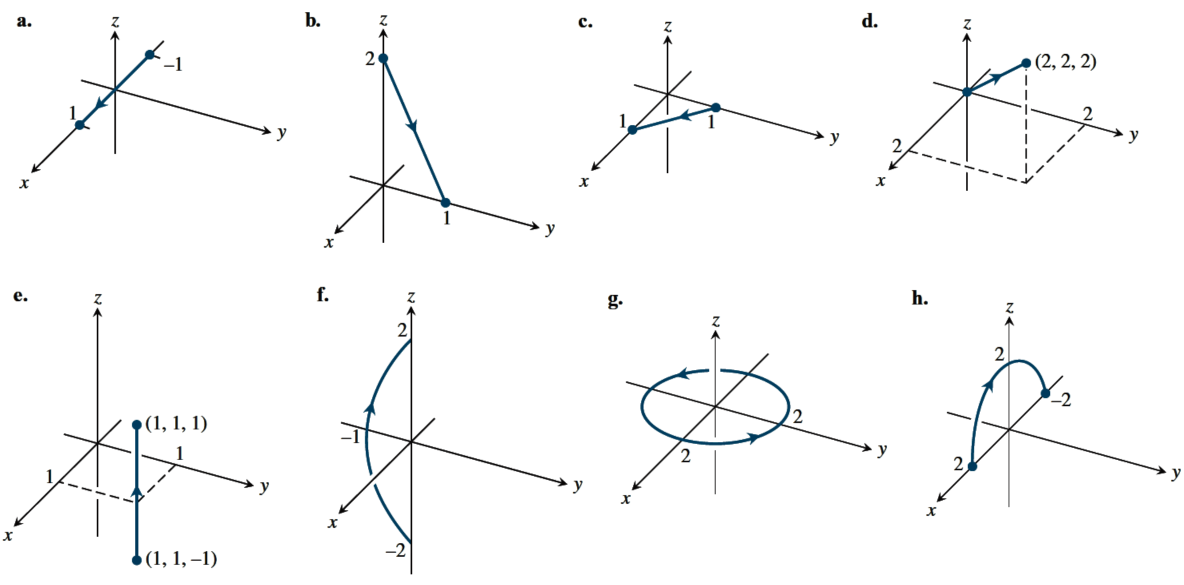
   d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i},\ -1 \le t \le 1.$

   e) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2.$

   f) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1.$

   g) $\mathbf{r}(t) = (0, t^2-1, 2t),\ -1 \le t \le 1.$

   h) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 0, 2\operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le \pi.$



1. Integrales de línea de campos escalares

2. Calcule:

   a) (o) $\displaystyle\int_C (x+y)ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, 0),\ \ 0 \le t \le 1$.

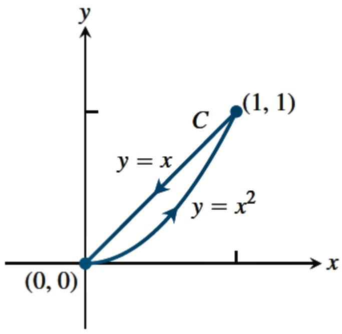
   b) (r) $\displaystyle\int_C (xy+y+z)ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (2t, t, 2-2t),\ \ 0 \le t \le 1$.

   c) (r) $\displaystyle\int_C x ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{t}{2}),\ \ 0 \le t \le 4$.

   d) (r) La integral de $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t,t,t)$, $t \ge 1$.

   e) (r) La integral de $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre la trayectoria que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, por $C = C_1 \cup C_2$, con C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \le t \le 1$ y C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (1,1,t)$, $0 \le t \le 1$.

   f) (o) $\displaystyle\int_C (x+\sqrt{y})ds$, donde C está dada en la figura.



   g) (o) la integral de $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$, sobre la circunferencia C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (0, a\cos t, a \operatorname{sen} t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

   h) (r) la integral de línea de $f(x,y) = ye^{x^2}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 2$.

   i) (r) $\displaystyle\int_C f(x,y)ds$ donde $f(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x}$ y C viene dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$, $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

   j) (o) la integral de $f(x,y) = x^2 - y$ sobre la parte de C dada por $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde $(0,2)$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   k) (r) el área de uno de los lados de la "pared" que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \le x \le 6$, y está sobre la curva y bajo la superficie $f(x,y) = 4 + 3x + 2y$.

3. (r) Un alambre curvo de densidad $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ está colocado sobre la curva C: $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$.

   a) Calcule la masa del alambre.

   b) Calcule el centro de masa del alambre.

   c) Represente el alambre y su centro de masa juntos.

4. (r) Encuentre la masa de un alambre delgado, colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 4-t^2)$, $0 \le t \le 1$, si la densidad es $\delta = 3t$.

5. (r) Sea $f(x,y,z) = x - y^2 - z^2$ una función que representa la densidad de un material en cada punto del alambre fino cuyos puntos se encuentran sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t+1, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le \pi$. Calcule la masa del mismo.

2. Campos vectoriales, Gradientes, Divergencia y Rotacional

6. Represente gráficamente cada uno de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y algunas líneas de flujo en cada uno, si es posible. Además, calcule para cada uno de ellos la componente k del rotacional y la divergencia. Indique, si es que hay, fuentes o sumideros.

   a) (o) $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$
   b) (o) $\mathbf{F}(x,y) = (x, y)$
   c) (r) $\mathbf{F}(x,y) = (0, x)$
   d) (r) $\mathbf{F}(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$
   e) (r) $\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$

7. Determine el campo gradiente generado por:

   a) (o) $f(x,y) = xy$. Represente gráficamente el campo gradiente, algunas líneas de flujo del mismo y algunas curvas de nivel de f.
   b) (r) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$
   c) (r) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   d) (r) $g(x,y,z) = e^z - \ln(x^2+y^2)$
   e) (o) $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

8. Halle el rotor y la divergencia para los siguientes campos vecotriales de $\mathbb{R}^3$. Indique si son conservativos o no. En caso afirmativo, halle la función potencial. Además indique si son solenoidales o no.

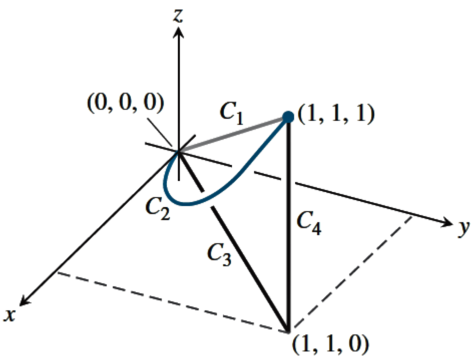
   a) (r) $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z, xy\cos z)$
   b) (o) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
   c) (o) $\mathbf{F} = (y+z, x+z, x+y)$

3. Integrales de Línea de Campos Vectoriales

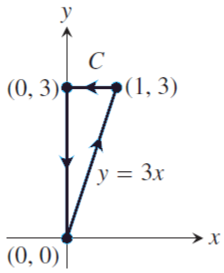
9. (o) Encuentre las integrales de línea de $\mathbf{F}$ desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias (vea la figura), donde $\mathbf{F}(x,y,z)$ viene dado por

   - $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$
   - $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$

   a) La trayectoria es el segmento C_1 que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.
   b) La trayectoria C_2, dada por $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \le t \le 1$.
   c) La trayectoria $C_3 \cup C_4$, donde C_3 es el segmento de recta desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,0)$ y C_4, el segmento de recta desde $(1,1,0)$ hasta $(1,1,1)$.



10. (o) Evalúe: $\displaystyle\int_C \sqrt{x+y}\,dx$, sobre la trayectoria que muestra la figura:



11. (r) Calcule las siguientes integrales a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

    a) $\int_C xz\,dx$
    b) $\int_C xz\,dy$
    c) $\int_C xz\,dz$

12. (r) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}$ de la figura 1 (abajo):

    a) Si C es una circunferencia unitaria centrada en el origen recorrida en sentido antihorario, la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ¿es positiva, negativa o nula? (Debe responder sin hacer cálculos).

    b) Marque en el gráfico una curva suave C_1 tal que $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sea nula.

13. (o) Sea $\mathbf{F}$ dado por el gráfico de la figura 2 (abajo). Indique si cada una de las integrales de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C_1 y C_2 es positiva, nula o negativa.

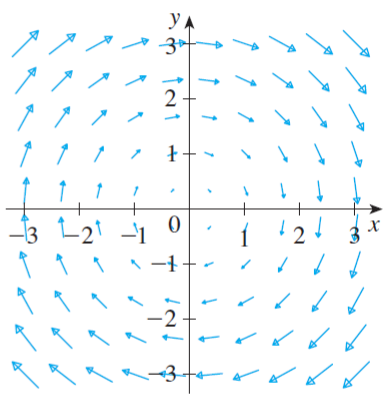


figura 1

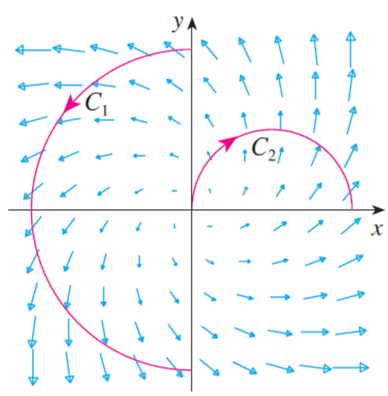


figura 2

14. (r) Calcule el trabajo realizado por:

   a) $\mathbf{F} = (xy, y, -yz)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t)$, $0 \le t \le 1$.

   b) $\mathbf{F} = (z, x, y)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   c) $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y - x)$ en la trayectoria recta desde $(1, 1)$ hasta $(2, 3)$.

15. (r) Evalúe: $\displaystyle\int_C (x - y)dx + (x + y)dy$, sobre la trayectoria cerrada, en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

16. (o) Calcule la circulación y el flujo a través hacia fuera de las curvas C_1 y C_2, de los campos $\mathbf{F}_1(x, y) = (x, y)$ y $\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, x)$ si las curvas están dadas respectivamente por $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, y $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, 4 \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

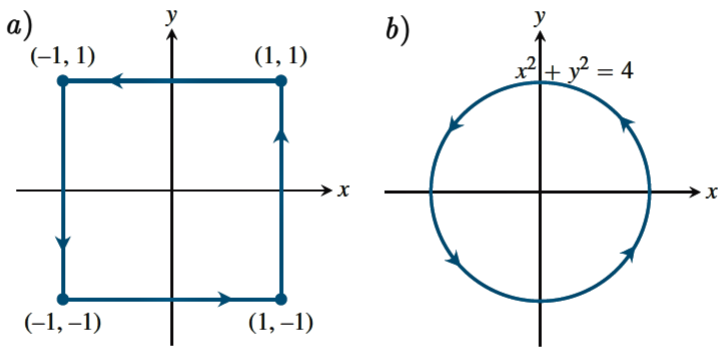
17. (r) Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = (x + y, -x^2 - y^2)$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$ en el plano xy:

   a) la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$;

   b) el segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(-1, 0)$;

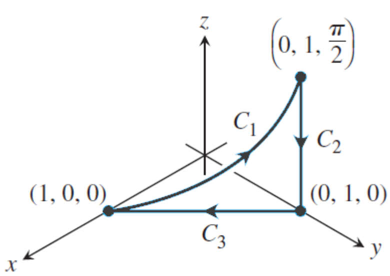
   c) el segmento de recta desde $(1, 0)$ hasta $(0, -1)$, seguido por el segmento de recta desde $(0, -1)$ hasta $(-1, 0)$.

18. (o) Obtenga la circulación del campo $\mathbf{F} = (y, x+2y)$ alrededor de cada una de las siguientes trayectorias cerradas:



   c) Use una trayectoria diferente a las de los incisos *a* y *b*, que sea cerrada y simple.

19. (r) Calcule la circulación de $\mathbf{F} = (2x, 2z, 2y)$ a lo largo de la curva C que es la unión de C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (0, 1, (\frac{\pi}{2})(1 - t))$, $0 \le t \le 1$ y C_3: $\mathbf{r}_3(t) = (t, (1 - t), 0)$, $0 \le t \le 1$.



4. Campos vectoriales conservativos

20. (r) Encuentre una función potencial para cada uno de los siguientes campos vectoriales, si es posible; si no lo es, justifique por qué:

a) $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$.

b) $\mathbf{F} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{1+x^2y^2} + \dfrac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \dfrac{1}{z}\right)\mathbf{k}$.

21. (r) Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, con $f(x,y) = x^3y^2$, y sea C la trayectoria en el plano xy, que consiste en el segmento de recta desde $(-1,1)$ hasta $(0,0)$, seguido del segmento de recta desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$. Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras:

    a) Encuentre parametrizaciones para los segmentos que forman a C y evalúe la integral.

    b) Use f como una función potencial para $\mathbf{F}$.

22. (r) Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2+y, y^2+x, ze^z)$ para las siguientes trayectorias desde $(1,0,0)$ hasta $(1,0,1)$:

    a) El segmento de recta $x = 1$, $y = 0$, $0 \le z \le 1$.

    b) La hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, (\frac{t}{2\pi}))$, $0 \le t \le 2\pi$.

    c) El eje x desde $(1,0,0)$ hasta $(0,0,0)$, seguido de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ desde $(0,0,0)$ hasta $(1,0,1)$.

23. (o) Compruebe que el integrando es una forma diferencial exacta y calcule la integral.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz.$$

24. (o) Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2, \frac{z^2}{y}, 2z\ln y)$.

    a) Dé el dominio de definición D de $\mathbf{F}$ (el mayor posible, en el sentido de la inclusión). Verifique que se trata de una región abierta, conexa y simplemente conexa.

    b) Mediante el criterio de componentes, compruebe que $3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}\,dy + 2z\ln y\,dz$ es una forma diferencial exacta en D.

    c) Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

    d) Evalúe la integral de línea de $\mathbf{F}$ desde el punto $(1,1,1)$ hasta el punto $(1,2,3)$, por algún camino. Especifique qué camino eligió.

25. (r) Demuestre que el valor de la integral $\displaystyle\int_A^B z^2\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz$ no depende de la trayectoria desde A hasta B, con A y B, puntos en $\mathbb{R}^3$.

26. (r)

    a) Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ a lo largo de la curva C que es la intersección del cilindro $x^2+y^2 = 4$ y el plano $x+y+z = 1$.

    b) Indique, justificando su respuesta, si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es o no conservativo.

    c) Halle la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto $(0,0,0)$ e interprete.

27. (r) Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y)\mathbf{i} + (y^2+x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$$

para la trayectoria recta que va desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,1)$. Indique si puede asegurar que el trabajo no cambiará si se considera cualquier trayectoria que una los mismos puntos.

5. Teorema de Green

28. Verifique el teorema de Green, incluyendo las hipótesis, para el campo vectorial $\mathbf{F}$, con dominio en el disco R dado por $x^2+y^2 \leq a^2$ y su circunferencia frontera C, dada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $a > 0$, en cada caso:

    a) (o) $\mathbf{F} = (-y, x)$.

    b) (r) $\mathbf{F} = (-x^2y, xy^2)$.

29. (r) Utilice el teorema de Green para calcular la circulación en sentido antihorario y el flujo hacia fuera para cada uno de los siguientes campos $\mathbf{F}$ y curvas C.

    a) $\mathbf{F} = (x^2+4y, x+y^2)$; C, frontera del cuadrado acotado por las rectas $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

    b) $\mathbf{F} = (xy+y^2, x-y)$; C, dada en la figura 1.

    c) $\mathbf{F} = (x+3y)\mathbf{i} + (2x-y)\mathbf{j}$; C, es la elipse dada en la figura 2.

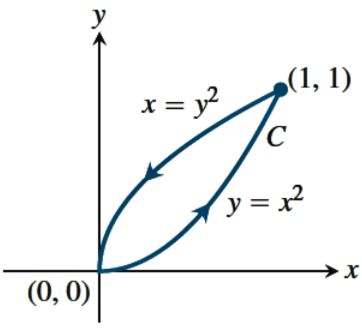


figura 1

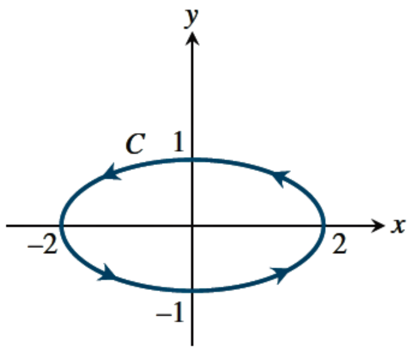


figura 2

30. (r) Calcule la circulación en contra de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = (xy, y^2)$ alrededor y sobre la frontera de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$, en el primer cuadrante.

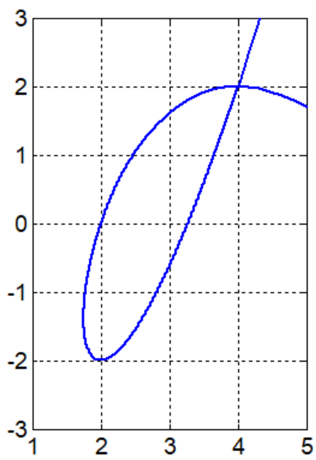
31. (r) Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ al mover una vez una partícula en sentido antihorario, a lo largo de curva C que es la frontera de la región en el primer cuadrante encerrada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^3$.

32. (o) Aplicando el Teorema de Green calcule: $\oint_C (y^2dx + x^2dy)$, donde C es la frontera del triángulo delimitado por $x = 0$, $x + y = 1$ e $y = 0$, orientada **negativamente**.

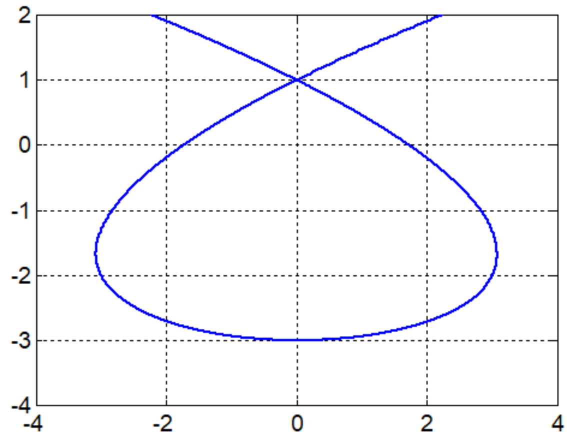
33. Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas: recuerde que si una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada en el plano, C, encierra una región plana R, el área de R se puede hallar como $\dfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ (entre otras fórmulas).

    a) (o) ¿En qué casos es útil el Teorema de Green para calcular áreas de regiones planas?

b) (o) La curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - t + 2, t^3 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$ se corta a sí misma en el punto $(4, 2)$. Halle el área que el lazo encierra.



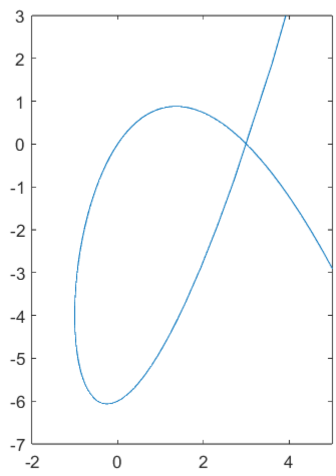
c) (r) La curva $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 3)$, $t \in \mathbb{R}$ se corta a sí misma en el punto $(0, 1)$. Halle el área que el lazo encierra.



d) (r) La función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t, t^3 - 2t^2 - 3t), \ t \in \mathbb{R},$$

forma un lazo (solo uno, que puede verse en la imagen). Calcule el área de la región encerrada por el mismo, justificando su procedimiento.



e) (r) Halle el área de la región encerrada por la elipse parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

f) (r) Halle el área de la región encerrada por la astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

34. (r) Sea C la frontera de una región R. Use el Teorema de Green para calcular cada una de las siguientes integrales, indicando qué condiciones deben cumplirse para poder aplicarlo.

a) $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy$.

b) $\oint_C ky\,dx + hx\,dy$, k y h son constantes.

35. (r) Sea A el área y $\bar{x}$ la abscisa del centroide de la placa plana que se encuentra en la región R acotada por cierta curva suave por partes C, simple, cerrada y positivamente orientada, en el plano xy. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2 dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2 dy - xy\,dx = A\bar{x}.$$

36. (*) Suponiendo que todas las derivadas necesarias existen y son continuas, demuestre que si $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

entonces

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

para todas las curvas cerradas C, a las cuales se aplica el teorema de Green.

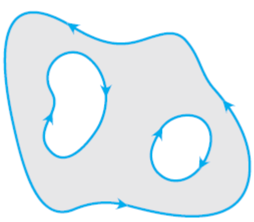
37. (r) Dados el campo escalar $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ y el campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla f$, indique justificando cada respuesta:

   a) cuáles son los dominios de f y $\mathbf{F}$.

   b) Calcule la integral $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{T}\,ds$ donde C es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ recorrida en sentido positivo.

   c) Indique si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en su dominio.

38. (*) El teorema de Green se cumple para una región R con un número finito de agujeros, siempre que las curvas de la frontera sean simples cerradas y suaves, y que integremos sobre cada componente de la frontera en la dirección en que R se mantiene a izquierda mientras avanzamos.



   a) Sean $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ y C la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$ y la orientación es positiva. Evalúe la integral de flujo

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds.$$

   b) Sea K una curva arbitraria suave, simple, cerrada y positivamente orientada en el plano, que no pase por el punto $(0,0)$. Utilice el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$$

   tiene dos posibles valores, dependiendo de que $(0,0)$ esté adentro o afuera de K.

6. Aplicaciones

39. (r) Demuestre que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F} = (a, b, c)$ al mover una partícula a lo largo de cualquier trayectoria desde A hasta B es $W = \mathbf{F} \cdot \vec{AB}$.

40. (r)

    a) Encuentre una función potencial para el campo gravitacional

    $$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

    (G, m y M son constantes).

    b) Sean P_1 y P_2 puntos que se encuentran a distancias s_1 y s_2 desde el origen. Demuestre que el trabajo realizado por el campo gravitacional del inciso anterior, para mover una partícula desde P_1 hasta P_2, es

    $$GmM \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right).$$

41. (r) En algunas ramas de las ciencias naturales, como climatología, mecánica de fluidos, magnetismo, es usual encontrarse con campos vectoriales que representen fuentes de energía, sumideros, vórtices, y combinaciones de los anteriores. Es por ello que resulta de gran interés contar con modelos matemáticos que permitan estudiar estos fenómenos de manera adecuada.

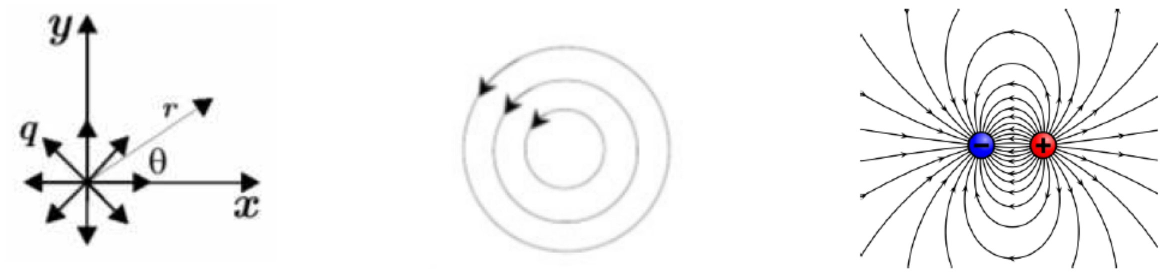


Figura 1. Fuente, vórtice y dipolo (superposición de fuente y sumidero separados una distancia dada).

Para modelar una fuente bidimensional consideramos un campo vectorial que a cada punto del plano le asigne el vector posición de dicho punto, es decir:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Para modelar un vórtice en sentido anti horario, tomamos un campo que a cada punto del plano le asigne su vector posición, pero rotado 90° en sentido anti horario:

$$\mathbf{F}_2(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

a) Calcule la circulación del campo fuente $\mathbf{F}_1$ a lo largo de la curva C_1, que es el cuarto de circunferencia con centro en el origen y radio $r = 2$ en el primer cuadrante (en sentido anti horario). Interprete el resultado.

b) Calcule la circulación del vórtice $\mathbf{F}_2$ a lo largo de la curva C_2, que es el segmento de recta en el primer cuadrante entre las circunferencias de radios $r = 1$ y $r = 4$, a 45 de inclinación con respecto al semieje x positivo. Interprete el resultado.

42. (r) El campo eléctrico generado por un dipolo formado por dos cargas opuestas, q y $-q$, ubicadas respectivamente en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, viene dado por

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+1}{((x+1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{((x+1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

donde ε_0 es una constante que depende del medio.

a) Halle la función potencial electrostático V en cada punto del plano.

b) Superponga un gráfico de curvas de nivel de V con un gráfico del campo vectorial $\mathbf{E}$. Encuentre una relación entre las líneas de flujo del campo $\mathbf{E}$ y las líneas equipotenciales (es decir, las curvas de nivel de la función potencial V).

c) Repita este ejercicio para el campo eléctrico generado por una única carga puntual (fuente).

6.1. Campos eléctricos: integración y campos vectoriales.

De acuerdo a la electrostática, que estudiará en profundidad en Física II, una partícula cargada eléctricamente con carga eléctrica q_1,[1], ubicada en un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, ejerce una influencia en el espacio a su alrededor, de manera que si otra partícula de carga q_0 (que suponemos positiva), se ubica en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, cerca de q_1, ésta se ve afectada por una fuerza $\mathbf{F}_1$ que, según la Ley de Coulomb, será de atracción si q_0 es de signo contrario a q_1 y, de repulsión, si tiene el mismo signo que q_1. Además la magnitud de esta fuerza es directamente proporcional al producto de las magnitudes de ambas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y tiene la dirección de la línea que las une (véase la Figura 1).

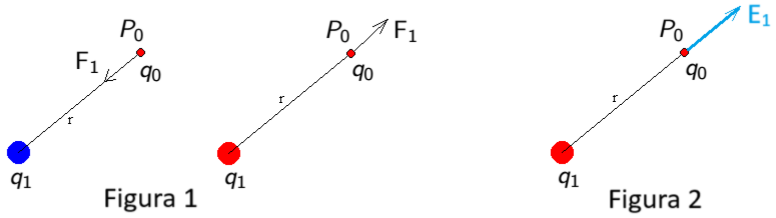


Figura 1

Figura 2

Por esto decimos que la partícula de carga q_1 ubicada en (x_1, y_1, z_1) genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, vale $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0)$. Este vector (véase la Figura 2) es

$$\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector desde P_1 hasta P_0 y ε es una propiedad del medio, llamada permitividad. Se verifica

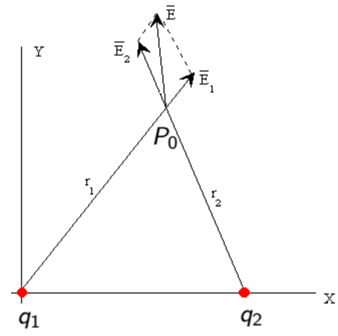
$$\mathbf{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0) \cdot q_0.$$

6.1.1. Suma de campos vectoriales (aditividad)

Si una carga puntual q_1 ubicada en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ genera un campo eléctrico $\mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y si otra carga puntual q_2 ubicada en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ genera un campo eléctrico $\mathbf{E}_2(x_0, y_0, z_0)$ en el mismo punto, entonces la presencia de ambas cargas genera un campo eléctrico en P_0 que es la suma de los vectores:

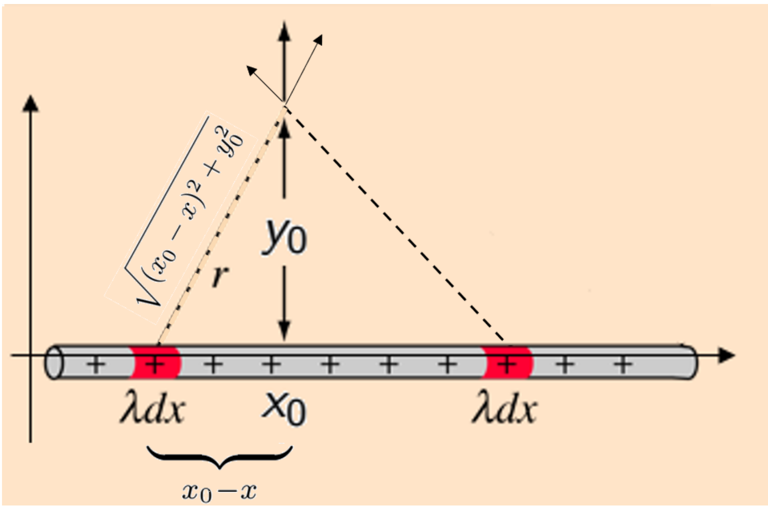
$$\mathbf{E}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{E}_1(x_0, y_0, z_0) + \mathbf{E}_2(x_0, y_0, z_0).$$

[1] La unidad de medida de las cargas eléctricas en el sistema internacional SI es el culombio (C).



6.1.2. Carga distribuida sobre una línea (aditividad)

Si en una región plana se tiene un elemento lineal cargado (por ejemplo, el eje x), con densidad lineal de carga $\lambda(x)$:



Cada *porción del elmento lineal cargado* de longitud dx tiene carga $\lambda(x)dx$ y el elemento lineal cargado en su totalidad genera un campo eléctrico en el punto $P_0(x_0, y_0)$ que viene dado por la suma de los vectores debidos a cada una de las porciones (como en (1)):

$$\mathbf{E}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\lambda(x)}{|(x_0 - x, y_0)|^3} (x_0 - x, y_0)\, dx.$$

Si λ es constante, el campo elétrico es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_0, y_0) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_0 - x, y_0)}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}\, dx \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0 - x}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}\, dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}\, dx \right) \end{aligned}$$

Si la distribución lineal de carga ocupa todo el eje x, aunque la función que se está integrando en la primera componente no es impar, por simetría se anula la integral de la primera componente (puede hacer una sustitución y encontrará una función impar). Así:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x_0, y_0) &= \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}\, dx\right) \\
&= \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0, \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}\, dx\right) \\
&= \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0, \lim_{c\to\infty} \left[\frac{x - x_0}{y_0^2\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}\right]_{-c}^{c}\right) \\
&= \left(0, \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon y_0}\right)
\end{aligned}$$

Se puede apreciar que es un vector vertical, perpendicular al elemento lineal cargado.

6.1.3. Ejercicios relacionados con esta aplicación

Siguiendo un procedimiento similar, halle el campo eléctrico generado en los puntos seleccionados del plano o del espacio, según corresponda, por cuerpos cargados que ocupan estos lugares (puede suponer que la densidad de carga λ es constante):

a) Un segmento sobre el eje x (elemento cargado unidimensional, en el plano), en los puntos del plano fuera del eje x.

b) Una semicircunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geq 0$, (elemento cargado unidimensional, en el plano), en los puntos del eje y.

c) Un rectángulo plano incluido en el plano xy (elemento cargado bidimensional, en el espacio), en los puntos del espacio que no están en el plano xy.

d) Una circunferencia incluida en el plano xy (elemento cargado bidimensional, en el espacio), en los puntos de la recta vertical que pasa por el centro de la circunferencia.