

Nombre y apellido:.....  
 Legajo y carrera:.....  
 Situación aplicada elegida:.....

Examen Final: Alumno Libre  
 Análisis Matemático I-FI-UNCUYO  
 1 de Julio de 2024

**Instrucciones. Desarrolle detalladamente los ejercicios** para obtener el puntaje completo. Puede trabajar con lápiz. Tiene 2 horas para desarrollar el examen.

**Nota final= 0.5 x (Puntaje total examen escrito) + 0.5 x (Puntaje total examen oral)**

(1) (10 pts.) Determine si la siguiente sucesión converge:

$$a_n = \ln(n) - \ln(n+1).$$

(2) (10 pts.) Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(3) (a) (10 pts.) Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de  $y = \tan^{-1}(x)$  alrededor de cero.

(b) (5 pts.) Utilice el tercer polinomio de Taylor para aproximar el valor de la integral:

$$\int_0^1 \tan^{-1}(x) dx.$$

(4) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

(a) (5 pts.) Determine el dominio de  $f$ .

(b) (15 pts.) Encuentre los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de  $f$ .

(c) (5 pts.) Encuentre, si existen, los extremos locales de  $f$ . En caso de no existir, justificar por qué.

(5) (10 pts.) Encuentre y clasifique las discontinuidades de

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}.$$

(6) (10 pts.) Desde un depósito cónico de concreto con el vértice hacia abajo, con altura de 6 metros y radio de 45 metros, fluye agua a razón de  $50m^3/s$ . Determine la rapidez con que disminuye el nivel del agua cuando la profundidad del líquido es de 5 m.

(7) (10 pts.) Determine el área de la región encerrada por  $y = x \cdot \sin(x)$  y el eje  $x$  para  $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ .

(8) (10 pts.) Demuestre el siguiente resultado: si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  y si  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .