FACULTAD DE INGENIERÍA

Trabajo Práctico 4
PARTE B: Integrales de Superficie

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo de varias variables”de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Cálculo del área de una superficie, $A(S) = \iint\limits_S d\sigma$**, en distintas representaciones**

	Explícita: $z = f(x,y)$	**Implícita:** $\varphi(x,y,z) = 0$	**Parametrizada:** $\mathbf{r}(u,v)$
$A(S)$	$\iint\limits_{R_{xy}} \sqrt{(-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1}\, dxdy$	$\iint\limits_{R} \frac{\|\nabla\varphi\|}{\lvert\nabla\varphi \cdot p\rvert}\, dA$	$\iint\limits_{R_{uv}} \|s_u \times s_v\|\, dudv$

1. Parametrización de superficies, áreas y planos tangentes

1. Ejercicios tomados de Geometría Analítica: repaso.

   Dadas las siguientes representaciones vectoriales paramétricas de superficies, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen.

   a) (o) $\mathbf{r}(\beta, t) = (2t \operatorname{ch}\beta, 8t \operatorname{sh}\beta, t^2)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 2t \operatorname{ch}\beta \\ y = 8t \operatorname{sh}\beta \qquad\qquad t \geq 0; \beta \in \mathbb{R}. \\ z = t^2 \end{cases}$$

   b) (r) $\mathbf{r}(\alpha, \beta) = (5\cos\alpha \operatorname{sen}\beta, 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, 9\cos\beta)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 5\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ y = 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \qquad\qquad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in [0, \pi]. \\ z = 9\cos\beta \end{cases}$$

   c) (r) $\mathbf{r}(\alpha, t) = (4t\cos\alpha, 7t\operatorname{sen}\alpha, t^2)$. Es decir:

   $$\begin{cases} x = 4t\cos\alpha \\ y = 7t\operatorname{sen}\alpha \qquad\qquad t \geq 0; \alpha \in [0, 2\pi]. \\ z = t^2 \end{cases}$$

2. Determine una parametrización para la superficie. (Hay más de una manera correcta de hacerlo.)

a) (o) Porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ tal que $z \leq 4$.

b) (r) Porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ tal que $z \geq 0$.

c) (r) Cono truncado: parte del cono $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre los planos $z = 0$ y $z = 3$.

d) (r) Región esférica: parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, entre los planos $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $z = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

e) (r) Región esférica: parte "inferior" de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

f) (r) Banda cilíndrica circular: porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre los planos $x = 0$ y $x = 3$.

g) (o) Plano inclinado dentro de un cilindro: porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

h) (r) Plano inclinado dentro de un cilindro: porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

3. (*) Dé una parametrización para la superficie que es la parte del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ que se encuentra entre el plano $z = 0$ y la curva cerrada C que está en el el semiespacio $z \geq 0$, dada por $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, c(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $c(t)$ es una función derivable en $[0, 2\pi]$.

4. Calcule el área de la superficie dada por:

   a) (o) la porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 1$

   b) (r) La porción de cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, entre los planos $z = 2$ y $z = 6$.

   c) (r) La porción de paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$, cortado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   d) (o) La porción inferior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$, cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. (r)

   a) Los puntos de la parte del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que cumplen $z \leq 4$, forman una superficie. Determine el área de la misma.

   b) Plantee una integral para calcular el área de la superficie que es la parte del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el primer octante, entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.

6. (o) Encuentre una ecuación para el plano tangente al cilindro circular parametrizado por $\mathbf{r}(\theta, z) = (3\,\mathrm{sen}(2\theta), 6\,\mathrm{sen}^2\theta, z)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, en el punto $P_0(3\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ correspondiente a $(\theta, z) = (\frac{\pi}{3}, 0)$. Agregue, si es posible, una ecuación para la recta normal a la superficie en el mismo punto.

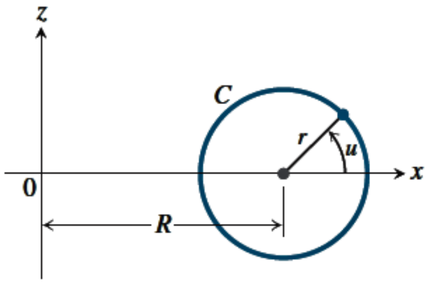
7. (r) Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie hemisférica parametrizada por $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 4\cos\phi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ correspondiente a $(\phi, \theta) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$. Agregue, si es posible, una ecuación para la recta normal a la superficie en el mismo punto.

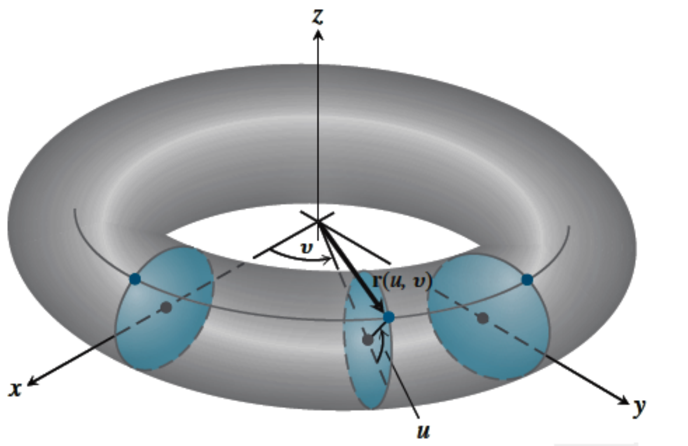
8. (r)

   a) Un *toro de revolución* (ver figura) se obtiene al hacer girar un círculo C en el plano xz, alrededor del eje z en el espacio. Si C tiene un radio $r > 0$ y su centro es $(R, 0, 0)$, verifique analizando algunas curvas reticulares, que una parametrización del toro es

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\,\mathrm{sen}\, v, r\,\mathrm{sen}\, u),\ 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

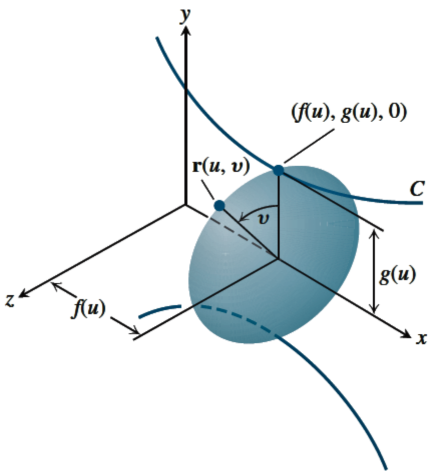
b) Demuestre que el área de la superficie del toro es $A = 4\pi^2 Rr$.





9. (r) Parametrización de una superficie de revolución: suponga que la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(u) = (f(u), g(u))$ gira alrededor del eje x, donde $g(u) > 0$ para $a \leq u \leq b$.

   a) Interprete que
   $$\mathbf{r}(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\,\mathrm{sen}\, v)$$
   es una parametrización de la superficie de revolución resultante, donde $0 \leq v \leq 2\pi$ es el ángulo formado por el vector que va desde $(f(u), 0, 0)$ hasta $\mathbf{r}(u, v)$ y el plano xy. Observe que $f(u)$ mide la distancia *a lo largo* del eje de revolución y $g(u)$ mide la distancia *al* eje de revolución.



   b) Encuentre una parametrización para la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = y^2$, $y \leq 0$, alrededor del eje x.

10. (r)

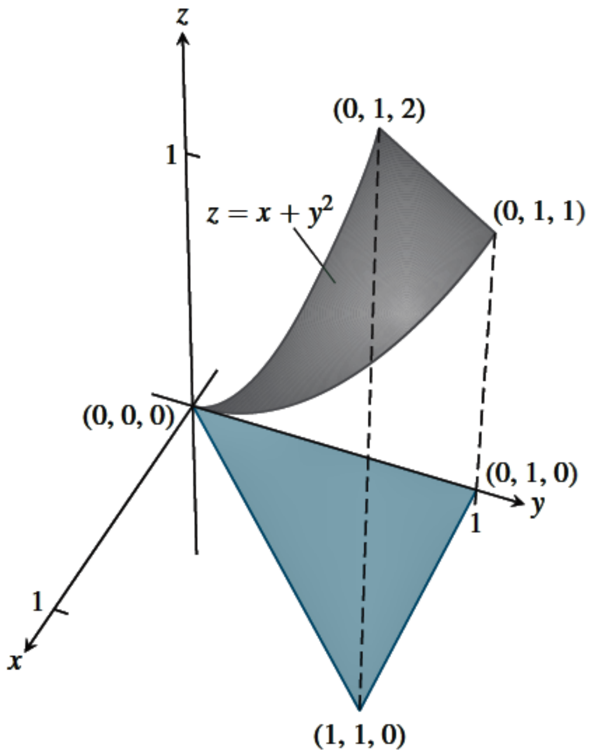
   a) Parametrización de un elipsoide: verifique que $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi, b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, c\,\mathrm{sen}\,\phi)$ es una parametrización del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Especifique los valores que deben tomar los parámetros.

   b) Escriba una integral para el área de la superficie del elipsoide, pero no la evalúe.

11. (o) Calcule el área de la proción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano xy.

2. Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

12. - Calcule la integral de la función f dada, sobre la superficie S indicada:
    a) (o) $f(x,y,z) = x$ sobre $S : y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.
    b) (r) $f(x,y,z) = x^2$ sobre la esfera unitaria $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
    c) (r) $f(x,y,z) = x^2\sqrt{5-4z}$ sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
    d) (o) $f(x,y,z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.
    e) (r) $f(x,y,z) = z - x$, sobre la porción de la gráfica de $z = x + y^2$ arriba del triángulo en el plano xy, con vértices en $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,0)$ (véase la figura).



- Agregue planteos usando integrales apropiadas, para calcular valores medios de las funciones anteriores sobre las superficies correspondientes.
- Además, si en algún caso se puede interpretar a la función f como la densidad en cada punto de la superficie S, indique cómo se podrían calcular la masa y las coordenadas del centro de masa de la placa delgada.

13. (r) Plantee fórmulas para hallar el centro de masa de una capa delgada que es la parte superior de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por el cono dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, sabiendo que la densidad en cada punto es la función $\delta(x,y,z)$.

14. (r) Determine el centroide de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante.

15. Utilice una parametrización para determinar el flujo $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superficie S en la dirección dada.

    a) (o) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$, en la dirección que se aleja del eje z. Realice un esbozo de la superficie y del campo vectorial, interpretando el valor obtenido.

b) (r) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$, en la dirección que se aleja del eje z. Realice un esbozo de la superficie y del campo vectorial, interpretando el valor obtenido.

c) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x, -3z)$ a través de la superficie del cilindro $z = 4 - y^2$ cortado por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$ en la dirección que se aleja del eje x.

d) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a través de la porción de esfera en el primer octante $x^2+y^2+z^2 = a^2$, para cierto $a > 0$, en la dirección que se aleja del origen.

16. Encuentre las integrales de superficie de los campos vectoriales dados, a través de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ en el primer octante, en la dirección que se aleja del origen.

    a) (r) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$.

    b) (r) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 1)$.

    c) (r) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$.
    (Este es el ejemplo 4 de la sección 16.8 del libro de Thomas).

17. (r) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea S la superficie que es el disco inlcuido en el plano $y = 1$ con centro en el punto $(0, 1, 0)$ y radio 1, con orientación dada por el vector $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ en cada punto. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

18. (r) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

    a) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1, incluida en el plano $z = 0$, orientada positivamente vista desde el semieje z positivo.

    b) Indique, justificando su respuesta, si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en $\mathbb{R}^3$.

    c) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la porción del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ que está por arriba del plano $z = 0$, en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

    d) Calcule el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de a porción del paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$ que está por arriba del plano $z = 0$, en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

    e) Observe si hay alguna relación entre algunos de los resultados obtenidos.

3. Teorema de Stokes

19. Utilice el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C mediante la integral de superficie correspondiente.

    a) (o) $\mathbf{F} = (x^2, 2x, z^2)$ y C: la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy, en sentido antihorario.

    b) (o) $\mathbf{F} = (2y, 3x, -z^2)$ y C: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy, en sentido antihorario.

20. (r) Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal que se aleja del origen de coordenadas, de la capa elíptica S dada por $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$, $z \geq 0$, y sea $\mathbf{F} = (y, x^2, (x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} e^{\sqrt{xyz}})$. Calcule el flujo del rotacional $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, utilizando el teorema de Stokes.

21. Calcule el flujo del rotacional a través de la superficie S en la dirección del vector unitario normal exterior $\mathbf{n}$, $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ en cada caso:

    a) (o) $\mathbf{F} = (2z, 3x, 5y)$ y S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$, con $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

    b) (r) $\mathbf{F} = (3y, 5 - 2x, z^2 - 2)$ y S: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\sqrt{3} \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\phi)$, con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

22. (r) Sea S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $a > 0$ y $0 \leq z \leq h$, junto con su tapa superior, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Sea $\mathbf{F} = (-y, x, x^2)$. Utilice el teorema de Stokes para encontrar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de S, en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

23. (*) Dada una curva suave, simple y cerrada, C, demuestre que $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ vale lo mismo para cualquier supercie orientable S que tenga como frontera la curva C, siempre que la orientación de S induzca la misma dirección positiva en C.

24. (r) Pruebe la identidad $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$, asumiendo continuidad de las derivadas parciales de segundo orden de f; luego utilice esta identidad y el teorema de Stokes para demostrar que las circulaciones de los siguientes campos alrededor de la frontera de cualquier superficie orientable suave en el espacio son cero.

    a) $\mathbf{F} = (2x, 2y, 2z)$.

    b) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$.

    c) $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

    d) $\mathbf{F} = \nabla f$.

25. (r)

    a) Demuestre que el rotacional de

    $$\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)$$

    es igual a cero, pero que

    $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

    es diferente de cero si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy recorrida en sentido antihorario, visto desde el semieje positivo de z. (Note que el dominio de $\mathbf{F}$ no es simplemente conexo.)

    b) Busque una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. ¿Dónde se cumple esa igualdad?

    c) ¿Esto contradice el hecho de no ser conservativo $\mathbf{F}$ en su dominio?

26. (*) Pruebe que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ no es el rotor de ningún campo vectorial $\mathbf{G}$. Sugerencia: haga una prueba por contradicción, suponiendo que existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, considere una esfera con centro en el origen y radio $R > 0$ y una curva cerrada, simple y suave por partes C incluida en dicha superficie. Dicha curva determina dos superficies que son porciones de la esfera. Considere una de ellas y llámela S. Aplicando el Teorema de Stokes, dé dos interpretaciones a la integral de línea $\oint_C G \cdot d\mathbf{r}$ y obtenga una contradicción.

4. Divergencia y Teorema de la Divergencia de Gauss

27. (r) Calcule la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

    a) El campo giratorio $\mathbf{F} = ((-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}))(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

    b) El campo radial $\mathbf{F} = (x, y)$.

    c) El campo gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, con G, m y M, constantes.

28. (r) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y^2)$, indique si es o no solendoidal. En caso de no serlo, muestre si es posible, una fuente y un sumidero. Sugerencia: esboce un gráfico de $\mathbf{F}$.

29. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de la superficie S frontera de D, siendo

    a) (o) $\mathbf{F} = (y - x, z - y, y - x)$ y D el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

    b) (o) $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2 z)\mathbf{j} + (4x^2 y^3)\mathbf{k}$ y D la región cerrada en el primer octante cortada por $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$.

    c) (*) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$ y $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b\right\}$, donde $a > 0$. Concluya que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier esfera centrada en el origen será el mismo, independientemente del radio de la esfera. (Ver el ejemplo 4 de la sección 16.8 del libro de Thomas).

30. (r)

    a) Demuestre que si las derivadas paricales necesarias de los componentes del campo $\mathbf{G} = (M, N, P)$ son continuas, entonces $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$.

    b) ¿Qué puede concluir acerca del flujo del campo $\nabla \times \mathbf{G}$ a través de una superficie cerrada en la que se pueda aplicar el Teorema de la Divergencia? Justifique su respuesta.

31. (r) Sean $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ campos vectoriales con componentes derivables y sean a y b constantes reales arbitrarias. Verifique las siguientes identidades.

    a) $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$.

    b) $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$.

    c) $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$.

32. (r) Sean $\mathbf{F}$ un campo vectorial diferenciable (sus componentes son diferenciables) y g una función escalar diferenciable definida en $\mathbb{R}^3$. Verifique las identidades:

    a) $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$.

    b) $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$.

33. (*) Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en $\mathbb{R}^3$ y sea D una región acotada por una superficie cerrada suave, S. Si $|\mathbf{F}| \leq 1$, ¿se puede acotar $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$? Justifique su respuesta.

34. (r) Sea $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y suponga que una superficie S y una región sólida D satisfacen las hipótesis del teorema de la divergencia. Demuestre que el volumen de D está dado por la fórmula
$$\text{Volumen de D} = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

35. (r) Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 1$, encuentre aquél para el cual el flujo total de $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy, -6yz, 12z)$ hacia fuera a través de las seis caras sea máximo. ¿Cuál es el flujo máximo?

36. (*) Demuestre que el flujo de un campo vectorial constante $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ a través hacia fuera de cualquier superficie cerrada a la que se aplique el teorema de la divergencia es igual a cero.

5. Laplaciano

37. (*) Una función f es armónica en una región D en el espacio si satisface la ecuación de Laplace
$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$
en D.

    a) Suponga que f es armónica en una región acotada D encerrada por una superficie suave S y que $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S que se ha elegido. Demuestre que la integral sobre S de $\nabla f\cdot\mathbf{n}$, la derivada de f en la dirección de $\mathbf{n}$, es igual a cero.

    b) Demuestre que si f es armónica en D, entonces
$$\iint_S f\nabla f\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\,dV.$$

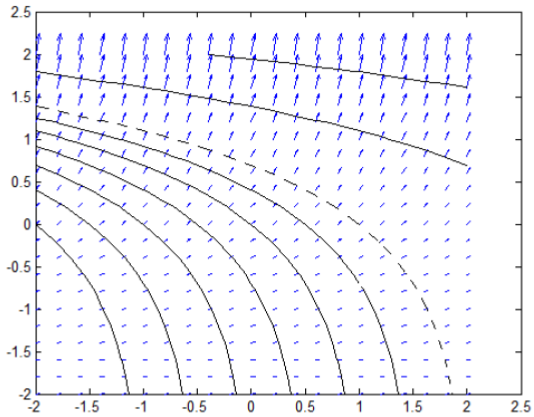
38. (*) Pruebe las siguientes afirmaciones:

    a) El Laplaciano de un campo escalar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cumple:
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

    b) El Laplaciano de un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ cumple:
$$\Delta\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}).$$

6. (*) Ejercicios integradores

39. La siguiente figura corresponde al campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = (1, e^y)$. Se incluye en el mismo algunas curvas equipotenciales.



a) Indique si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en $\mathbb{R}^2$. Justifique su respuesta.

b) Si C es cualquier curva equipotencial de $\mathbf{F}$ (por ejemplo la curva punteada que aparece en la figura, o cualquier otra), recorrida en cualquier sentido, ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$? Justifique cada afirmación de su respuesta.

c) Calcule la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la circunferencia centrada en el origen, de radio 1 y positivamente orientada. Justifique detalladamente su respuesta.

40. La superficie S es la parte de la esfera de ecuación $x^2+z^2+(y-4)^2 = 25$ para la cual $y \geq 0$, orientada en la dirección que se aleja del centro de la esfera. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$.

    a) Calcule el flujo a través de S del rotacional de $\mathbf{F}$.

    b) Indique si $\mathbf{F}$ es o no solenoidal.

    c) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie suave cerrada orientada positivamente.

41. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

    a) Halle el rotacional de $\mathbf{F}$. Interprete.

    b) Calcule la integral de superficie de rot$\mathbf{F}$,

    $$\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

    en la dirección que se aleja del origen de coordenadas.

    c) Indique si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo o no. Justifique.

42. Considere el sólido formado por los puntos del espacio que cumplen $x^2 + y^2 \leq 4$ y que están comprendidos entre los planos $z = 0$ y $z = 1$; sea el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yz, zx^2)$.

    a) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera a través de la superficie del sólido . Haga un desarrollo detallado y trabaje con prolijidad. Justifique sus pasos.

    b) Calcule el rotacional de F. Indique si se trata o no de un campo conservativo.

43. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, x + z)$.

    a) Calcule div $\mathbf{F}(1, 2, 3)$ e interprete.

b) Plantee dos fórmulas para calcular el flujo a lo largo de la curva C que viene dada por la representación paramétrica $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) Indique si $\mathbf{F}$ es o no conservativo, justificando su respuesta.