UNIDAD 1
Funciones vectoriales de varias variables reales

Matemática para Computación

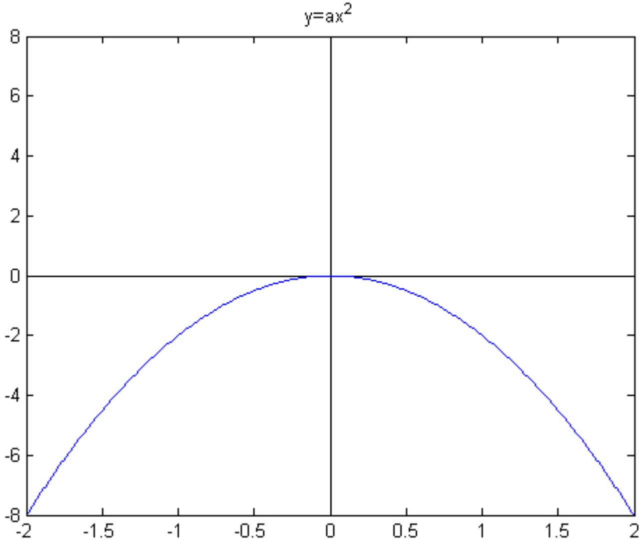
FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

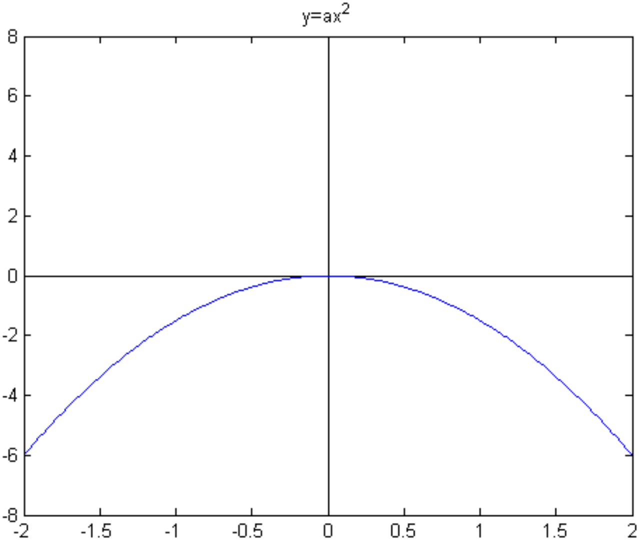
Recorrido

Recorrido

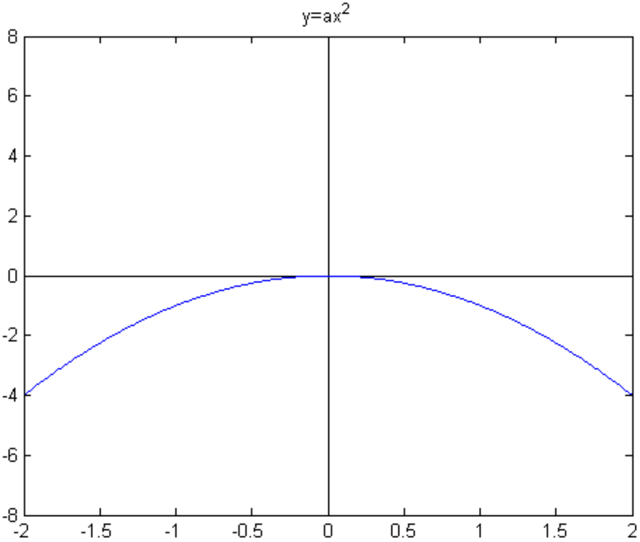
Introducción: $f(x) = ax^2$



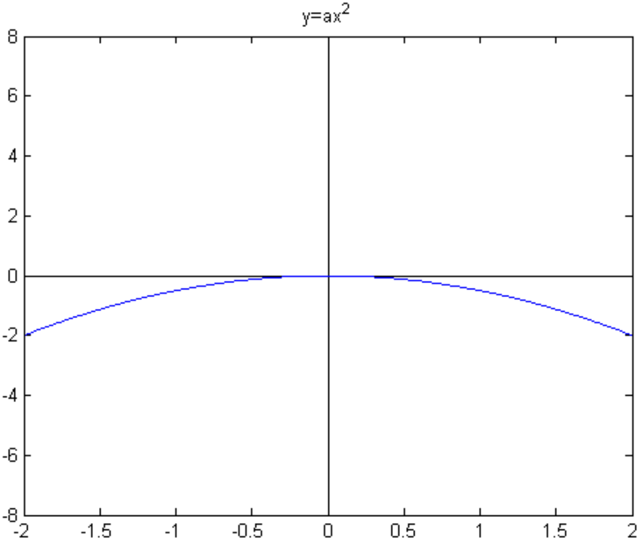
Introducción: $f(x) = ax^2$



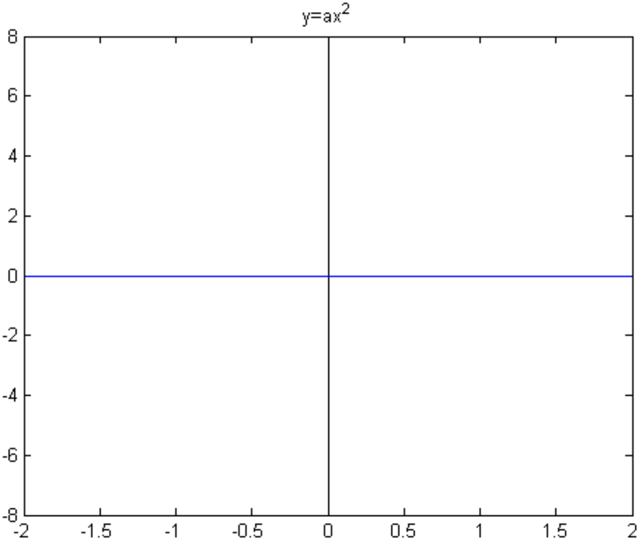
Introducción: $f(x) = ax^2$



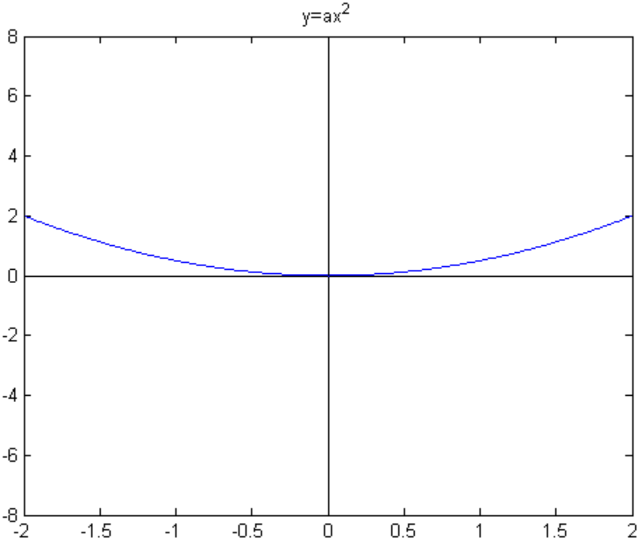
Introducción: $f(x) = ax^2$



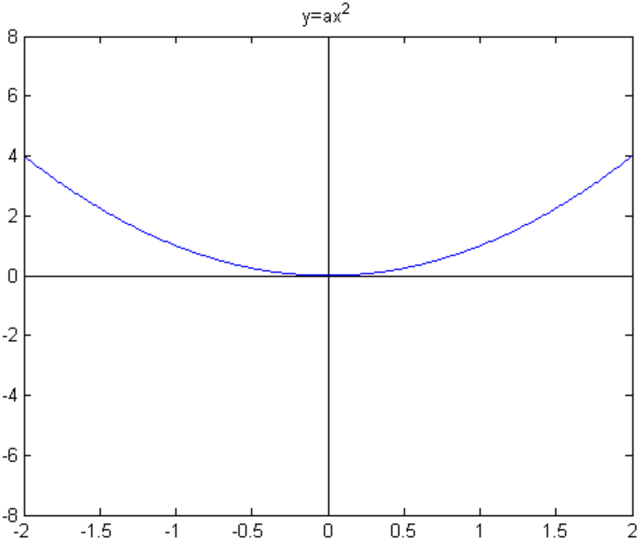
Introducción: $f(x) = ax^2$



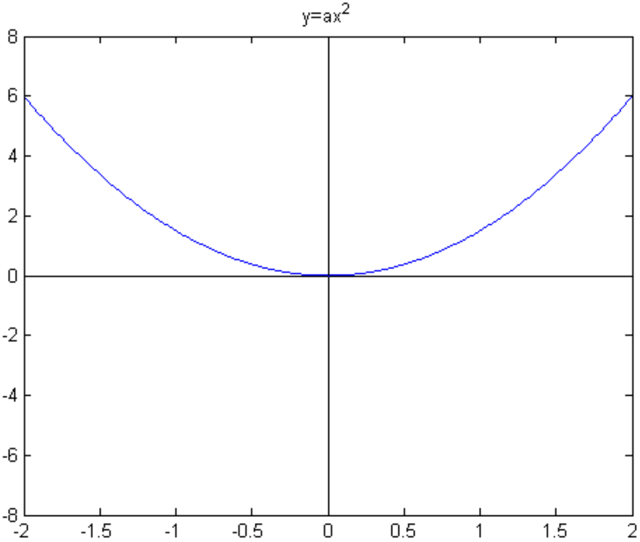
Introducción: $f(x) = ax^2$



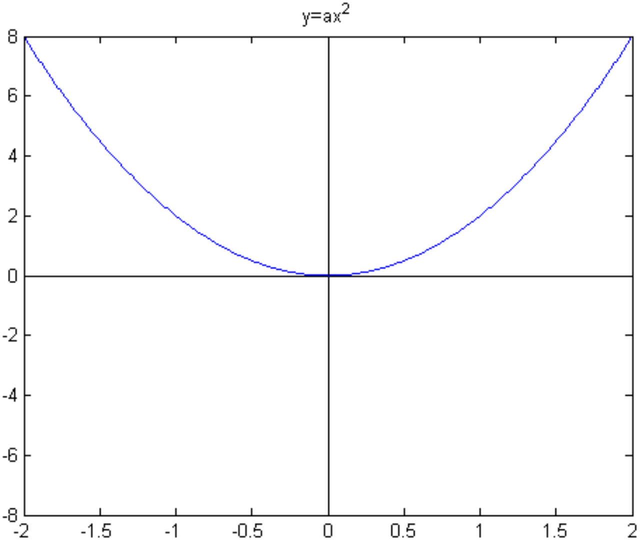
Introducción: $f(x) = ax^2$



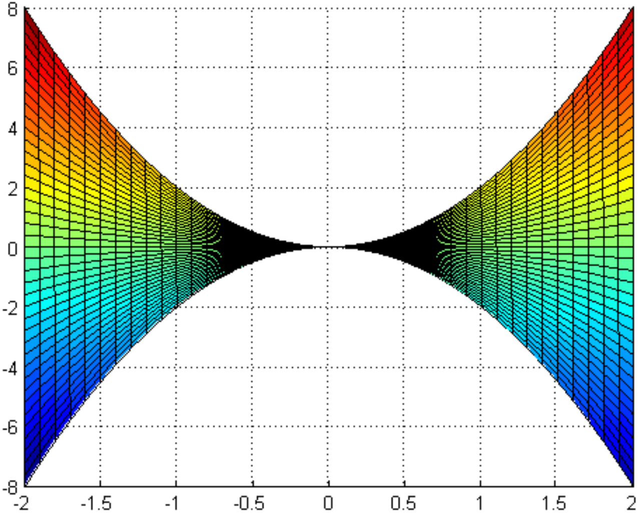
Introducción: $f(x) = ax^2$



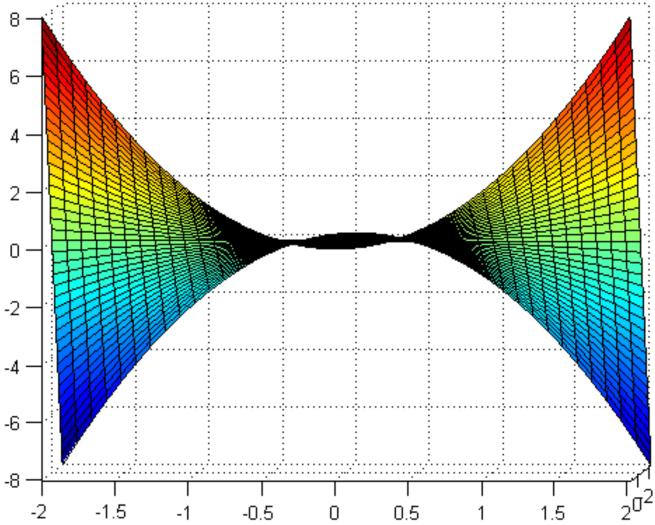
Introducción: $f(x) = ax^2$



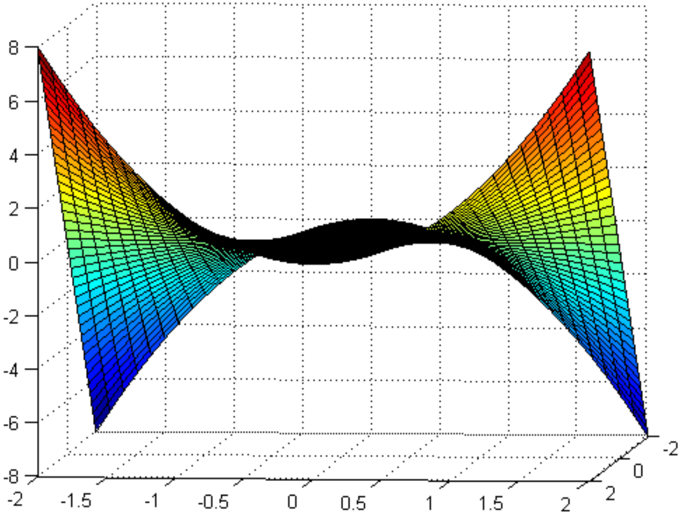
Introducción



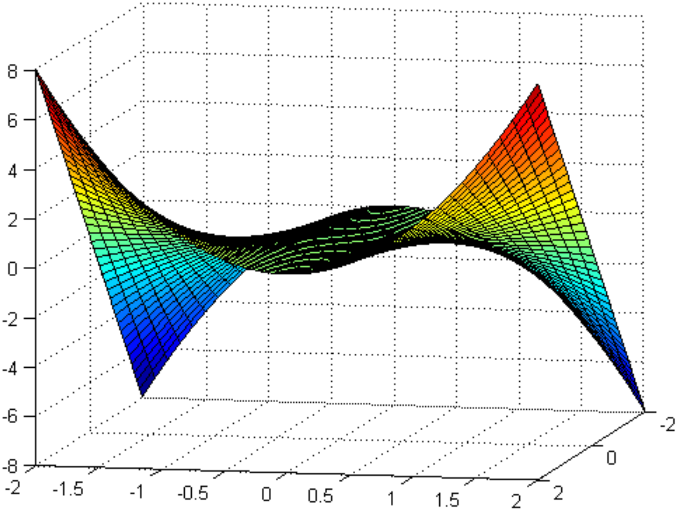
Introducción: $f(a,x) = ax^2$



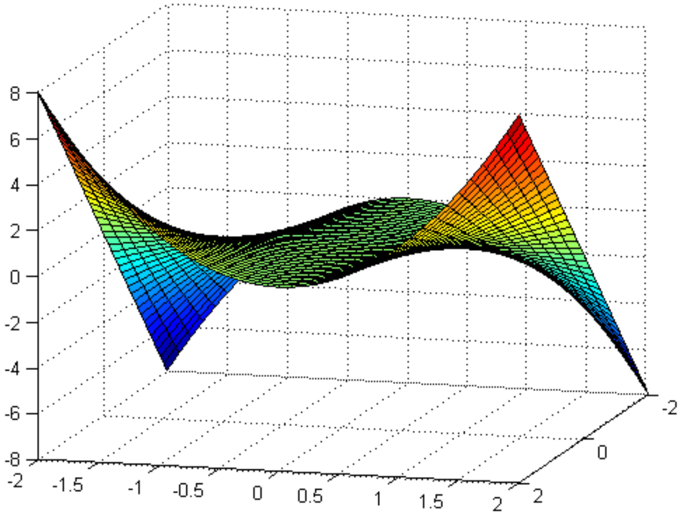
Introducción: $f(a, x) = ax^2$



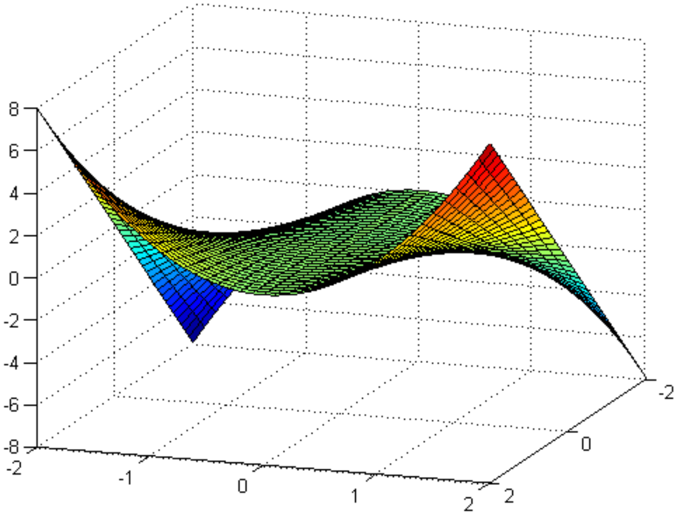
Introducción: $f(a, x) = ax^2$



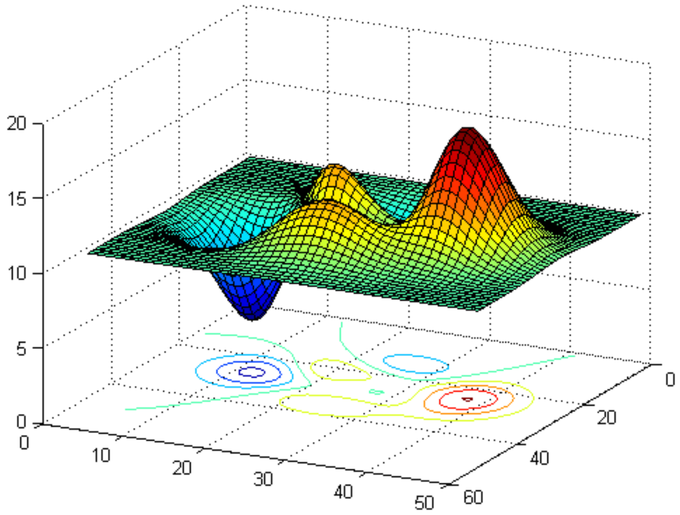
Introducción: $f(a,x) = ax^2$



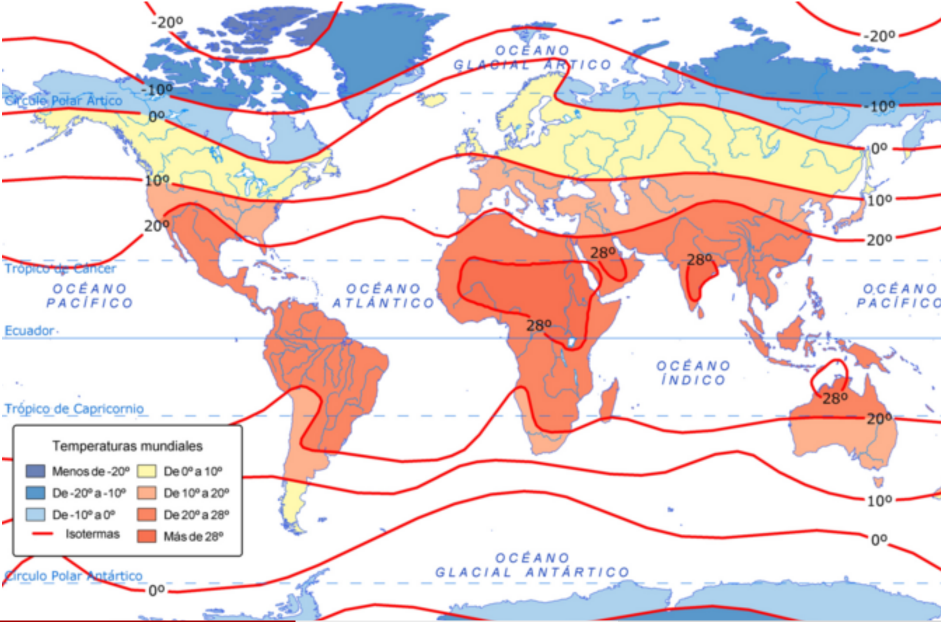
Introducción: $f(a,x) = ax^2$



Introducción: $f(x, y)$

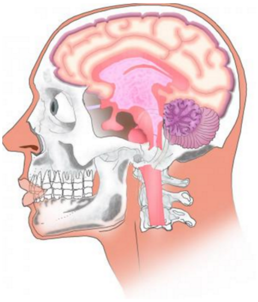


Ejemplos

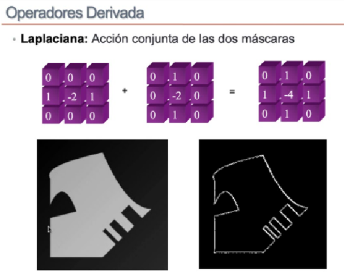


-20º
-10º
0º
10º
20º
28º
OCÉANO
GLACIAL ÁRTICO
Círculo Polar Ártico
Trópico de Cáncer
OCÉANO
PACÍFICO
OCÉANO
ATLÁNTICO
Ecuador
OCÉANO
ÍNDICO
Trópico de Capricornio
OCÉANO
GLACIAL ANTÁRTICO
Círculo Polar Antártico
Temperaturas mundiales
Menos de -20º
De -20º a -10º
De -10º a 0º
Isotermas
De 0º a 10º
De 10º a 20º
De 20º a 28º
Más de 28º

Ejemplos




Densidad
Escaso
Fuerte
Alcoholes
Agua
Zumo de frutas
Bebidas muy azucaradas


Operadores Derivada
Laplaciana: Acción conjunta de las dos máscaras
0 0 0
1 -2 1
0 0 0
+
0 1 0
0 -2 0
0 1 0
=
0 1 0
1 -4 1
0 1 0

Recorrido

Algunas definiciones

Definición

Una función vectorial de varias variables reales es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y asigna a cada vector $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ un vector $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$, es decir que las imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;/\; \bar{\mathbf{x}} \in A \mapsto f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m.$$

Algunas definiciones

Definición

Una función vectorial de varias variables reales es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y asigna a cada vector $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ un vector $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$, es decir que las imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;/\; \bar{\mathbf{x}} \in A \mapsto f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m.$$

Se llaman funciones con valores vectoriales si $m > 1$ y funciones con valores escalares si $m = 1$.

Algunas definiciones

Definición

Una función vectorial de varias variables reales es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y asigna a cada vector $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ un vector $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$, es decir que las imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;/\; \bar{\mathbf{x}} \in A \mapsto f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m.$$

Se llaman funciones con valores vectoriales si $m > 1$ y funciones con valores escalares si $m = 1$.
Si $n > 1$ y $m = 1$ se llaman **funciones de n variables independientes, con valores reales** o campos escalares.

Algunas definiciones

Definición

Una función vectorial de varias variables reales es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y asigna a cada vector $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ un vector $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$, es decir que las imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;/\; \bar{\mathbf{x}} \in A \mapsto f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m.$$

Se llaman funciones con valores vectoriales si $m > 1$ y funciones con valores escalares si $m = 1$.
Si $n > 1$ y $m = 1$ se llaman **funciones de n variables independientes, con valores reales** o campos escalares.
Si $n = 1$ y $m > 1$ se llaman **funciones vectoriales de una variable real** o trayectorias.

Algunas definiciones

El conjunto de valores o imágenes $\mathbf{w}$ asignados por f es el rango o recorrido de la función.

Algunas definiciones

El conjunto de valores o imágenes $\mathbf{w}$ asignados por f es el rango o recorrido de la función.
Cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, es una variable independiente, mientras que $\mathbf{w}$ es la variable dependiente.

El conjunto de valores o imágenes $\mathbf{w}$ asignados por f es el rango o recorrido de la función.
Cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, es una variable independiente, mientras que $\mathbf{w}$ es la variable dependiente.

Definición (Campo escalar)

Un **campo escalar** es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales, es decir, $m = 1$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Algunas definiciones

El conjunto de valores o imágenes $\mathbf{w}$ asignados por f es el rango o recorrido de la función.
Cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, es una variable independiente, mientras que $\mathbf{w}$ es la variable dependiente.

Definición (Campo escalar)

Un **campo escalar** es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales, es decir, $m = 1$.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

La función f que asigna a cada punto del salón, $\bar{\mathbf{x}} \in A \subset \mathbb{R}^3$, la temperatura en dicho punto.

Algunas definiciones

Definición (Función vectorial)

Es una función $\bar{\mathbf{c}}$ que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}$, es decir, $n = 1$, y sus imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$\bar{\mathbf{c}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \quad / \quad t \mapsto \bar{\mathbf{w}} = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)).$$

Algunas definiciones

Definición (Función vectorial)

Es una función $\bar{\mathbf{c}}$ que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}$, es decir, $n = 1$, y sus imágenes son vectores de $\mathbb{R}^m$.

$$\bar{\mathbf{c}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \quad / \quad t \mapsto \bar{\mathbf{w}} = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)).$$

Ejemplo

La función $\mathbf{c}$ que asigna a cada instante de tiempo, $t \in A \subset \mathbb{R}$, el vector posición de un móvil que se desplaza por el espacio.

Ejemplos

Funciones de dos y tres variables

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$

Ejemplos

Funciones de dos y tres variables

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

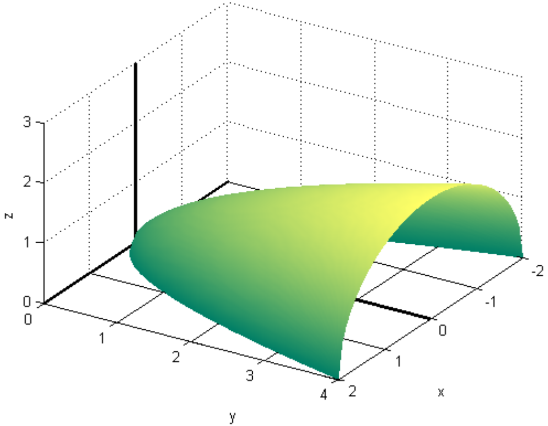
$$I(f) = [0, +\infty)$$

$$g(x,y,z) = z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$D(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x \neq y\}$$

Ejemplos

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$



Recorrido

Definiciones de gráfica o gráfico y conjunto de nivel

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama **gráfico o gráfica de** f

al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$
$G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

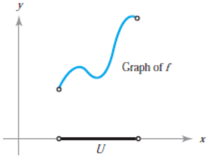
Definiciones de gráfica o gráfico y conjunto de nivel

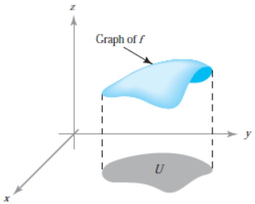
Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama **gráfico o gráfica de** f

al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$
$G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

Si $n = 1$, la gráfica de f es una curva en $\mathbb{R}^2$; si $n = 2$, la gráfica de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Si $n = 3$, la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ y no podemos representarla.





Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto
$\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Si $n = 2$, el conjunto de nivel suele ser una curva, llamada curva de nivel.
Curva de nivel de f es el conjunto $\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.
Curva de contorno de f es el conjunto $\{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto
$\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Si $n = 2$, el conjunto de nivel suele ser una curva, llamada curva de nivel.
Curva de nivel de f es el conjunto $\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.
Curva de contorno de f es el conjunto $\{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Si $n = 3$, el conjunto de nivel suele ser una superficie, llamada superficie de nivel.
Superficie de nivel de f es el conjunto $\{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Curvas de nivel y curvas de contorno, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dada

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

trace curvas de nivel y curvas de contorno para f.

Curvas de nivel y curvas de contorno, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dada

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

trace curvas de nivel y curvas de contorno para f.

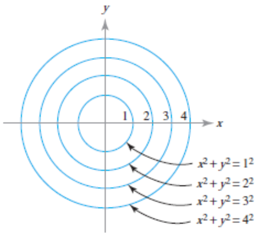


figure 2.1.6 Some level curves for the function $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel

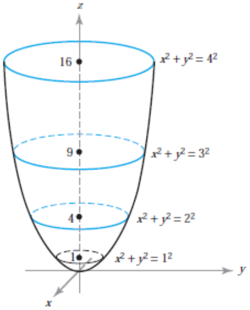


figure 2.1.7 Level curves in Figure 2.1.6 raised to the graph.

Curvas de contorno

Método de las secciones

Definición

Sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical).

Método de las secciones

Definición

Sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical).

Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Método de las secciones

Definición

Sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical).

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2$

En este ejemplo, la gráfica es un paraboloide elíptico.
Si P_1 es el plano $y = 0$, entonces la sección de f es el conjunto $P_1 \cap$ gráfica de $f = \{(x,y,z) : y = 0, z = x^2\}$. Gráficamente, la sección es la parábola $z = x^2$ en el plano $y = 0$. (Buscar otras secciones).

Método de las secciones

Definición

Sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical).

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2$

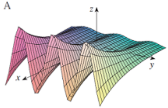
En este ejemplo, la gráfica es un paraboloide elíptico.
Si P_1 es el plano $y = 0$, entonces la sección de f es el conjunto $P_1 \cap$ gráfica de $f = \{(x,y,z) : y = 0, z = x^2\}$. Gráficamente, la sección es la parábola $z = x^2$ en el plano $y = 0$. (Buscar otras secciones).

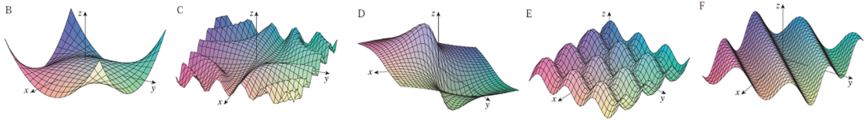
TP1 ejercicio 2b (sin conceptos topológicos)

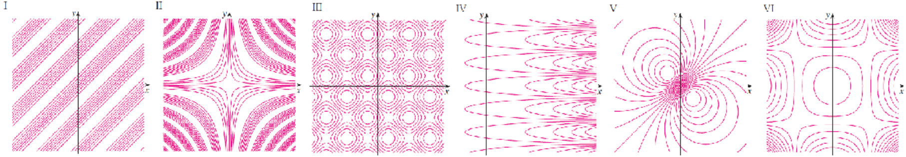
Ejercicio tomado del libro de Stewart

59. $z = \sin(xy)$ **60.** $z = e^x \cos y$ **61.** $z = \sin(x - y)$

62. $z = \sin x - \sin y$ **63.** $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ **64.** $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$



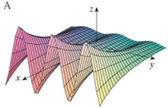


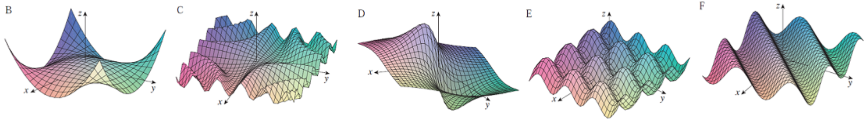


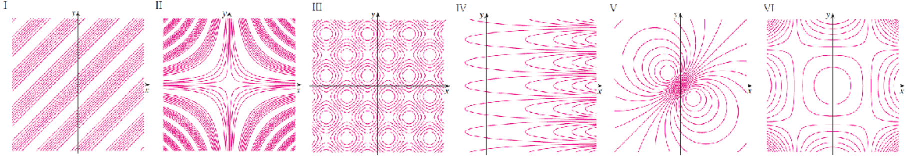
Ejercicio tomado del libro de Stewart

59. $z = \sin(xy)$ **60.** $z = e^x \cos y$ **61.** $z = \sin(x - y)$

62. $z = \sin x - \sin y$ **63.** $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ **64.** $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$







59 c II; 60 a IV; 61 f I; 62 e III; 63 b VI; 64 d V

Conjuntos de nivel de funciones de tres variables: superficies de nivel

La gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ es

$$gph(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Conjuntos de nivel de funciones de tres variables: superficies de nivel

La gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ es

$$gph(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Las superficies de nivel de f son

$$L_c = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = c\}$$

y se encuentran haciendo $x^2 + y^2 - z^2 = c$.

Conjuntos de nivel de funciones de tres variables: superficies de nivel

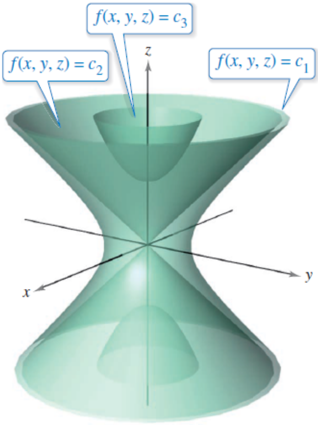
La gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ es

$$gph(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Las superficies de nivel de f son

$$L_c = \{(x, y, z) : x^2+y^2-z^2 = c\}$$

y se encuentran haciendo $x^2 + y^2 - z^2 = c$.



Método de las secciones (aplicado al caso $n = 3$)

Recordemos que la sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical). ¿Qué es un “hiperplano vertical” en este escenario?

Método de las secciones (aplicado al caso $n = 3$)

Recordemos que la sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical). ¿Qué es un "hiperplano vertical" en este escenario?

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Método de las secciones (aplicado al caso $n = 3$)

Recordemos que la sección de una gráfica es la intersección de la misma con un plano (vertical). ¿Qué es un "hiperplano vertical" en este escenario?

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

La gráfica es

$$gph(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Tomemos, por ejemplo, el subespacio $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) : y = 0\}$. La sección correspondiente a $S_{y=0}$ es

$$\begin{aligned} S_{y=0} \cap gph(f) &= \{(x, y, z, t) : y = 0, t = x^2 + y^2 - z^2\} \\ &= \{(x, y, z, t) : y = 0, t = x^2 - z^2\}, \end{aligned}$$

que podemos pensar como una silla de montar en el espacio xzt.

Recorrido

Conceptos topológicos

Definición

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y r un número real positivo.
Llamamos bola abierta o disco abierto de centro $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

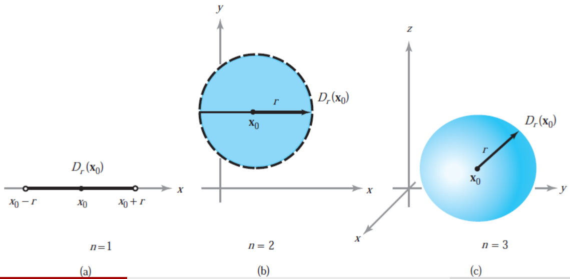
$$D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

Definición

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y r un número real positivo.
Llamamos bola abierta o disco abierto de centro $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

En $\mathbb{R}$: $D_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.
En $\mathbb{R}^2$: $D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.
En $\mathbb{R}^3$: $D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.



Conceptos topológicos

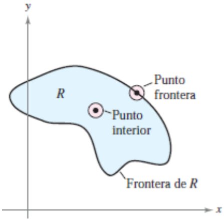
Definición

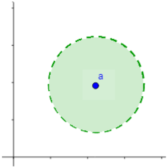
U es abierto si para todo punto $\mathbf{x}_0 \in U$ existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$.

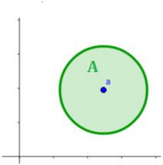
Un entorno de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un conj. abierto U que contiene a $\mathbf{x}$.

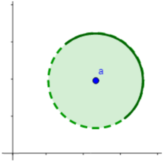
Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de U si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de U y al menos un punto que no pertenece a U.

U es cerrado si todos los puntos frontera de U pertenecen a U.









Definición

U es un conjunto acotado si existe una bola B tal que $U \subset B$.

U es un conjunto no acotado si ninguna bola lo incluye.

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ es $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ es $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ es $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es

Ejemplos

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Ejemplos

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2}}$ es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Un disco plano sin borde, como subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

Ejemplos

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Un disco plano sin borde, como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, no es abierto, no es cerrado y es acotado.

Ejemplos

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Un disco plano sin borde, como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, no es abierto, no es cerrado y es acotado.

TP1 Ejercicio 2b, analizar conceptos topológicos.

Recorrido

Definición informal de límite

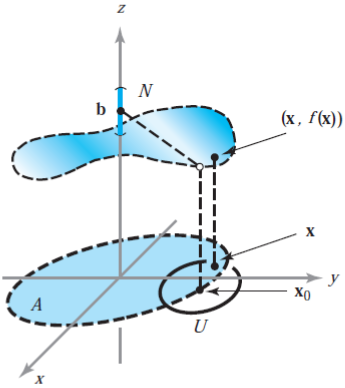
Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto; $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A; $\mathbf{b}$ un vector de $\mathbb{R}^m$ y N un entorno de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
Decimos que f **finaliza en** N **cuando** $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ si existe un entorno U de $\mathbf{x}_0$ tal que para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ que pertenezca a $U \cap A$, se cumple $f(\mathbf{x}) \in N$.
Decimos que f **tiende al límite** $\mathbf{b}$ **cuando** $\mathbf{x}$ **tiende a** $\mathbf{x}_0$, y escribimos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

si dado **cualquier entorno** N **de** $\mathbf{b}$, f finaliza en N cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$.
Es decir, si $f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ está próximo a $\mathbf{x}_0$.
Si esto no pasa, entonces $f(\mathbf{x})$ no se aproxima a ningún número cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ y decimos que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ no existe.

Definición de límite para $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Definición de límite

Notación: Se escribe equivalentemente

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} L.$$

Notación: Se escribe equivalentemente

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} L.$$

Notar que: siempre que hablemos del concepto de $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, supondremos que $\mathbf{x}_0$ pertenece a un conjunto abierto $A \subset D(f)$ o bien $\mathbf{x}_0$ está en la frontera de ese conjunto.

Notación: Se escribe equivalentemente

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\longrightarrow} L.$$

Notar que: siempre que hablemos del concepto de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, supondremos que $\mathbf{x}_0$ pertenece a un conjunto abierto $A \subset D(f)$ o bien $\mathbf{x}_0$ está en la frontera de ese conjunto.
Propiedad de unicidad del límite: si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_2$, $L_1 = L_2$.

Ejemplo: $\mathbf{c} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Dada la función vectorial

$$\mathbf{c} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{c}(t) = (t-2, \sqrt{t}),$$

graficamos su **imagen** y buscamos el límite

$$\lim_{t \to 1} \mathbf{c}(t) =$$

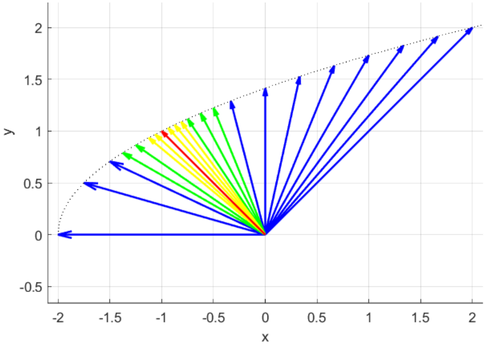
Ejemplo: $\mathbf{c} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Dada la función vectorial

$$\mathbf{c} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{c}(t) = (t-2, \sqrt{t}),$$

graficamos su **imagen** y buscamos el límite

$$\lim_{t\to 1} \mathbf{c}(t) = (-1, 1).$$



(ver gif)

Ejemplo

Dado el límite:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

Ejemplo

Dado el límite:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

- ¿Cuál es la función f? Indique dominio y codominio.

Ejemplo

Dado el límite:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

- ¿Cuál es la función f? Indique dominio y codominio.
- Calcule el límite, interpretando qué podrían ser N, U y $\mathbf{b}$, que aparecen en la definición.

Ejemplo

Dado el límite:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

- ¿Cuál es la función f? Indique dominio y codominio.
- Calcule el límite, interpretando qué podrían ser N, U y $\mathbf{b}$, que aparecen en la definición.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

Ejemplo

Dado el límite:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}$$

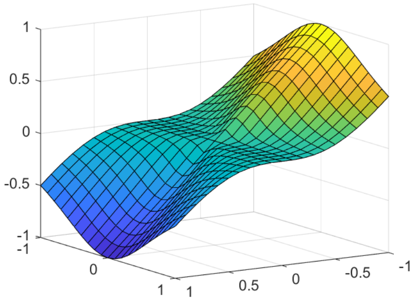
- ¿Cuál es la función f? Indique dominio y codominio.
- Calcule el límite, interpretando qué podrían ser N, U y $\mathbf{b}$, que aparecen en la definición.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0.$$

Ejemplo

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

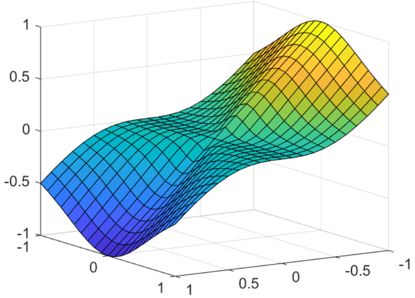


- Indique dominio y codominio.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

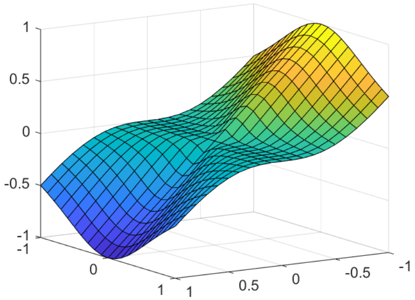


- Indique dominio y codominio. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\right\}$.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

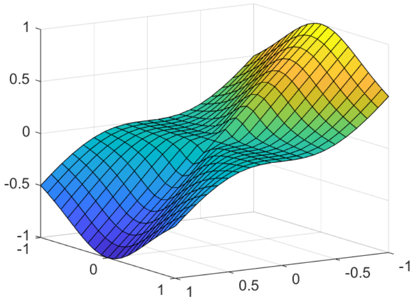


- Indique dominio y codominio. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\right\}$.
- Estudie gráficamente el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ejemplo

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



(ver gráficos en compu)

- Indique dominio y codominio. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
- Estudie gráficamente el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
- Estudie gráficamente el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, para cualquier $(x_0,y_0) \in D$.

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Operaciones usuales entre funciones:

cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Operaciones usuales entre funciones:

cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\, f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Si $m = 1$, fg y $1/f$ definidas de A en $\mathbb{R}$ por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.
Operaciones usuales entre funciones:
cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.
Si $m = 1$, fg y $1/f$ definidas de A en $\mathbb{R}$ por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Teorema (Propiedades de los límites)

1. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *sii* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$.

SIN DEMOSTRAR

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Operaciones usuales entre funciones:

cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Si $m = 1$, fg y $1/f$ definidas de A en $\mathbb{R}$ por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Teorema (Propiedades de los límites)

1. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *sii* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.

SIN DEMOSTRAR

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Operaciones usuales entre funciones:

cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Si $m=1$, fg y $1/f$ definidas de A en $\mathbb{R}$ por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Teorema (Propiedades de los límites)

1. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *sii* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.
3. *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

SIN DEMOSTRAR

Definiciones necesarias para dar las propiedades de los límites

Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in A$ o $\mathbf{x}_0$ en la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$.

Operaciones usuales entre funciones:

cf y $f+g$ funciones de A en $\mathbb{R}^m$, definidas por $(cf)(\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x})$ y $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

Si $m = 1$, fg y $1/f$ definidas de A en $\mathbb{R}$ por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ y $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Teorema (Propiedades de los límites)

1. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *sii* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.
3. *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.
4. *Si* $m = 1$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1\, b_2$. *Si, además,* $b_1 \neq 0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para toda* $\mathbf{x} \in A$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (1/f)(\mathbf{x}) = 1/b_1$.

SIN DEMOSTRAR

Ejemplos: límites que existen.

Ejemplos de límites que existen

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Ejemplos: límites que existen.

Ejemplos de límites que existen

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

Ejemplos: límites que existen.

Ejemplos de límites que existen

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0\end{aligned}$$

Límites iterados

No siempre existen a la vez ni son iguales $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. El primero es el límite doble; los segundos son límites iterados.

Límites iterados

No siempre existen a la vez ni son iguales $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. El primero es el límite doble; los segundos son límites iterados.

Teorema (Propiedades)

- *Si existen los límites iterados y existe el límite doble, entonces los tres coinciden.*
- *Si los límites iterados son distintos, el límite doble no existe.*
- *Aunque ambos límites iterados existan y sean iguales, el límite doble podría no existir.*

Límites iterados

No siempre existen a la vez ni son iguales $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. El primero es el límite doble; los segundos son límites iterados.

Teorema (Propiedades)

- *Si existen los límites iterados y existe el límite doble, entonces los tres coinciden.*
- *Si los límites iterados son distintos, el límite doble no existe.*
- *Aunque ambos límites iterados existan y sean iguales, el límite doble podría no existir.*

Ejemplos

Estudiar, mediante límites iterados, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$.

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

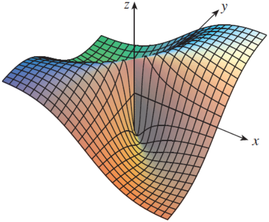
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\; f(x,0) = 0;\; f(0,y) = 0;$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \textbf{ no existe}$$



$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

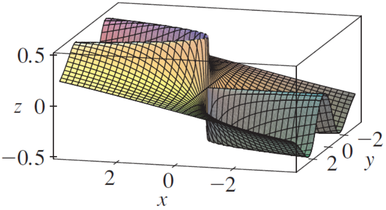
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

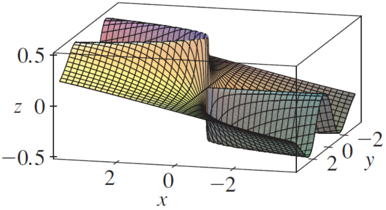


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0;$$



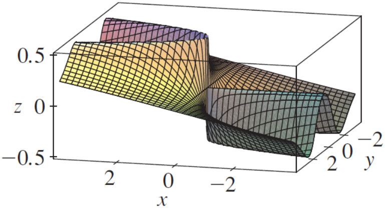
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0;$$

$$f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$



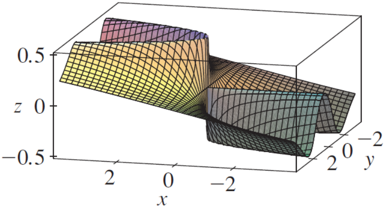
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \textbf{ no existe}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0;$$

$$f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$



Recorrido

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función dada con dominio A, y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Continuidad

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función dada con dominio A, y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si f es continua en cada punto de A, se dice que f es **continua en $\mathbf{A}$**.

Continuidad

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función dada con dominio A, y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si f es continua en cada punto de A, se dice que f es **continua en $\mathbf{A}$**.
Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es **discontinua en $\mathbf{x}_0$**.

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función dada con dominio A, y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si f es continua en cada punto de A, se dice que f es **continua en $\mathbf{A}$**.
Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es **discontinua en $\mathbf{x}_0$**.
Si f es discontinua en algún punto de A, se dice que f es **discontinua en $\mathbf{A}$**.

Continuidad

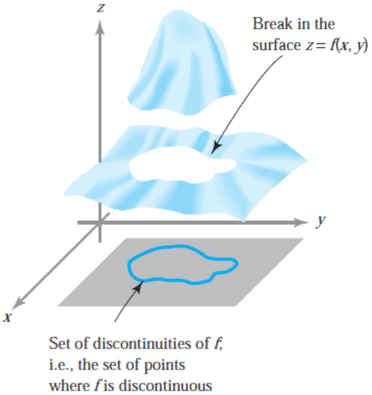
Definición

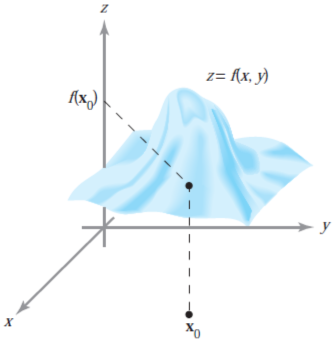
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una función dada con dominio A, y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es **continua** en $\mathbf{x}_0$ si y solo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si f es continua en cada punto de A, se dice que f es **continua en $\mathbf{A}$**.
Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es **discontinua en $\mathbf{x}_0$**.
Si f es discontinua en algún punto de A, se dice que f es **discontinua en $\mathbf{A}$**.

Los polinomios y las funciones racionales son continuos en los puntos de sus respectivos dominios.


z
Break in the
surface $z = f(x, y)$
y
x
Set of discontinuities of f,
i.e., the set of points
where f is discontinuous


z
$z = f(x, y)$
$f(\mathbf{x}_0)$
y
x
$\mathbf{x}_0$

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad y \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*
2. *Si* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* cf*.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. *f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ sii cada función componente de f lo es.*
2. *Si f es continua en $\mathbf{x}_0$, entonces también lo es cf.*
3. *Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces también lo es $f + g$. Si, además, $m = 1$, entonces $f \cdot g$ también es continua en $\mathbf{x}_0$.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad y \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*
2. *Si* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* cf*.*
3. *Si* f *y* g *son continuas en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* $f + g$*. Si, además,* $m = 1$*, entonces* $f \cdot g$ *también es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
4. *Si* $m = 1$*,* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para toda* $\mathbf{x} \in A$*, entonces* $1/f$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*
2. *Si* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* cf*.*
3. *Si* f *y* g *son continuas en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* $f + g$*. Si, además,* $m = 1$*, entonces* $f \cdot g$ *también es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
4. *Si* $m = 1$*,* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para toda* $\mathbf{x} \in A$*, entonces* $1/f$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
5. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$*, entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *sii* f_i *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$*.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad y \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*
2. *Si* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* cf*.*
3. *Si* f *y* g *son continuas en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* $f + g$*. Si, además,* $m = 1$*, entonces* $f \cdot g$ *también es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
4. *Si* $m = 1$*,* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para toda* $\mathbf{x} \in A$*, entonces* $1/f$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
5. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$*, entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *sii* f_i *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$*.*

SIN DEMOSTRAR

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Sean

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad y \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. f *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *sii cada función componente de* f *lo es.*
2. *Si* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* cf*.*
3. *Si* f *y* g *son continuas en* $\mathbf{x}_0$*, entonces también lo es* $f+g$*. Si, además,* $m=1$*, entonces* $f \cdot g$ *también es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
4. *Si* $m=1$*,* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para toda* $\mathbf{x} \in A$*, entonces* $1/f$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*
5. *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$*, entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *sii* f_i *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$*.*

SIN DEMOSTRAR

Ejemplo

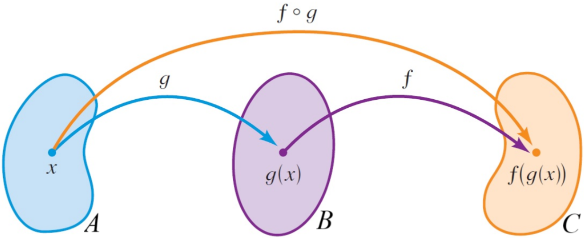
Indicar dimensión del dominio y del codominio y estudiar la continuidad de

$$f(x,y) = \left(x^2 y, \frac{x^3+y}{x^2+1} \right) \text{ y de } g(x,y) = \left(x\sqrt{y}, \frac{x+y}{x^2-1}, \ln(x) \right).$$

Continuidad de la composición

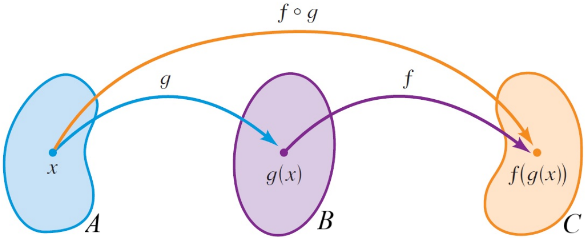
Definición

Si g aplica A en B y f aplica B en C, la **composición** de f con g, se denota $f \circ g$, aplica A en C y se define por $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$.



Definición

Si g aplica A en B y f aplica B en C, la **composición** de f con g, se denota $f \circ g$, aplica A en C y se define por $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$.



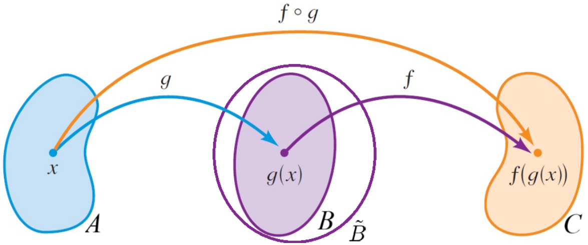
Si $g : A \to \tilde{B}$, de manera que $D(g) = A$ y $f : B \subset \tilde{B} \to C$, de modo que $D(f) = B \subset \tilde{B}$, el dominio de $f \circ g$ será

$$D(f \circ g) = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) \in B\}\,.$$

Continuidad de la composición

Definición

Si g aplica A en B y f aplica B en C, la **composición** de f sobre g, se denota $f \circ g$, aplica A en C y se define por $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$.



Si $g : A \to \tilde{B}$, de manera que $D(g) = A$ y $f : B \subset \tilde{B} \to C$, de modo que $D(f) = B \subset \tilde{B}$, el dominio de $f \circ g$ será

$$D(f \circ g) = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) \in B\}\,.$$

Continuidad de la composición

Teorema (Continuidad de la composición)

Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y sea* $f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$*. Supongamos que* $g(A) \subset B$*, de forma que* $f \circ g$ *esté definida en* A*. Si* g *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *y* f *es continua en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$*, entonces* $f \circ g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Continuidad de la composición

Teorema (Continuidad de la composición)

Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y sea* $f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$*. Supongamos que* $g(A) \subset B$*, de forma que* $f \circ g$ *esté definida en* A*. Si* g *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *y* f *es continua en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$*, entonces* $f \circ g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Ejemplo: propiedades de la continuidad

Dada

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{10} + \operatorname{sen}^3 z - \cos(x^2),$$

indicar dominio, codominio y estudiar la continuidad de f, justificando mediante las propiedades vistas.

Recorrido

Recorrido

Definición de derivada parcial

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$, se define la derivada parcial de f con respecto a x_j por

Definición de derivada parcial

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$, se define la derivada parcial de f con respecto a x_j por

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_n) = \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_j + h, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n)}{h} \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},
\end{aligned}
$$

si el límite existe. Acá $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector canónico.

El dominio de la función $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ es el subconjunto de U donde el límite anterior existe.

Derivadas parciales de una función de dos variables

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Derivadas parciales de una función de dos variables

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de $f(x, y) = x + x^2y - y^3$.

Derivadas parciales de una función de dos variables

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Ejemplo

Halle las derivadas parciales de $f(x, y) = x + x^2y - y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2.$$

Derivadas parciales de una función de dos variables

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Ejemplo

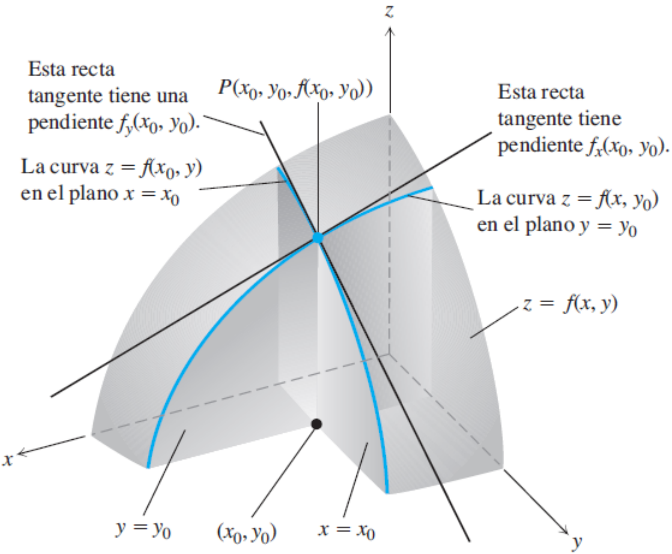
Halle las derivadas parciales de $f(x, y) = x + x^2y - y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2.$$

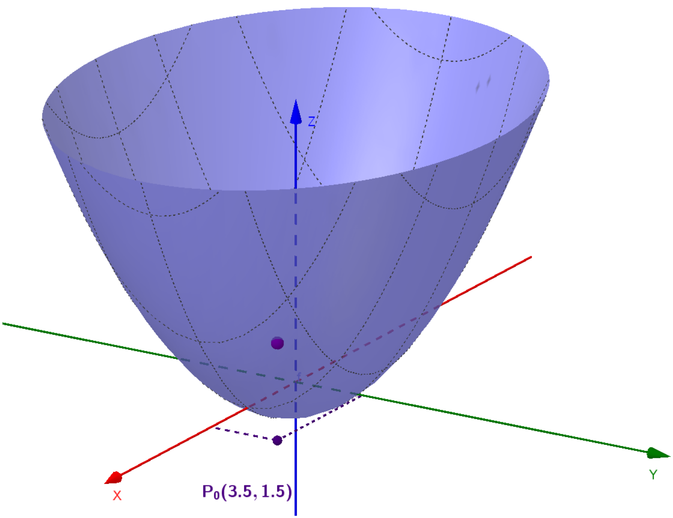
Para indicar que una derivada parcial se evalúa en un punto, se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0).$$

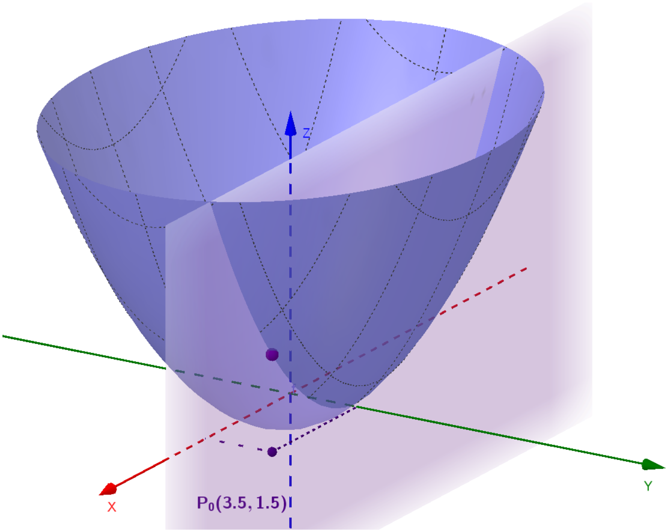
Interpretación geométrica derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^2$)



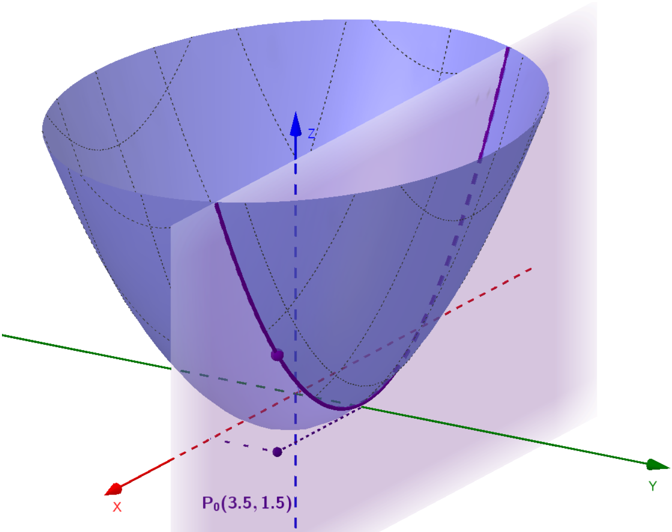
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



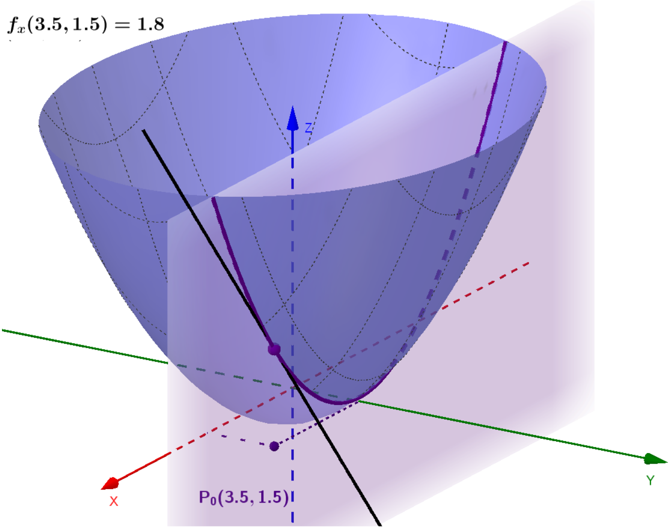
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



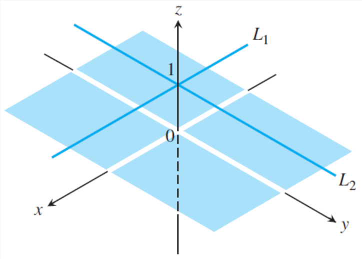
Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

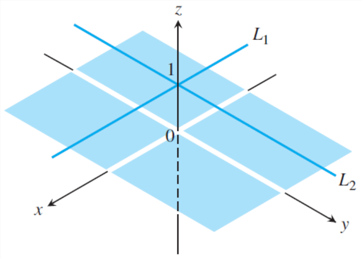
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



Ejemplo (de Thomas): sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{si } xy\neq 0;\\ 1, & \text{si } xy=0.\end{cases}$$

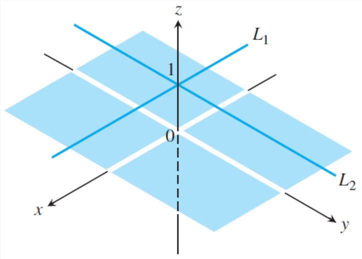
- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,



Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

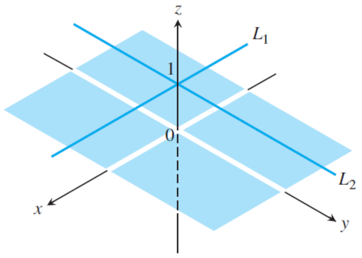
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,



Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

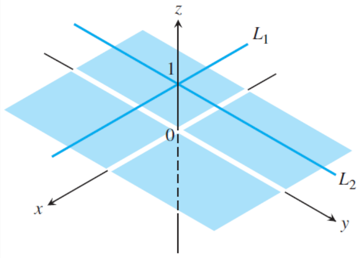
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



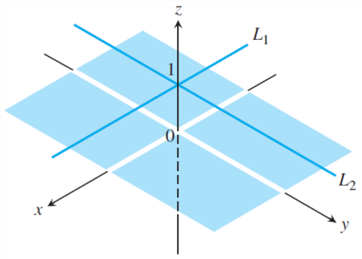
- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Observación: la existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

Recorrido

Un gráfico suave y otro, que no lo es

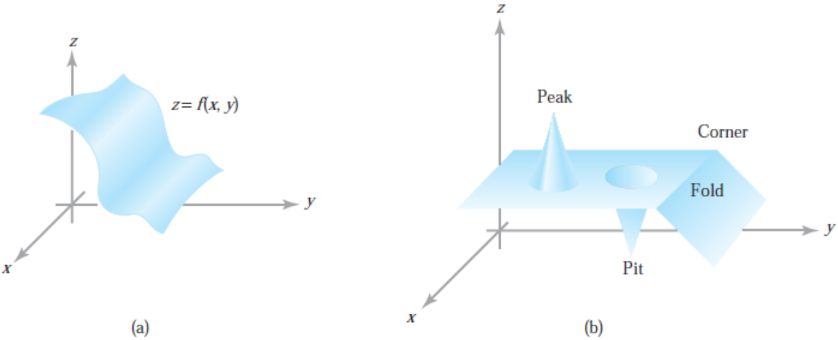


figure 2.3.1 (a) A smooth graph and (b) a nonsmooth one.

Aproximación lineal

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, si el gráfico es suave alrededor del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es:

Aproximación lineal

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, si el gráfico es suave alrededor del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es:

$$z = ax + by + c \qquad \leftarrow \text{ ecuación de un plano no vertical en } \mathbb{R}^3$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0); \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0).$$

Aproximación lineal

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, si el gráfico es suave alrededor del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es:

$$z = ax + by + c \qquad \leftarrow \text{ ecuación de un plano no vertical en } \mathbb{R}^3$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0); \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0).$$

Debe pasar por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) : f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$

Aproximación lineal

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, si el gráfico es suave alrededor del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es:

$$z = ax + by + c \qquad \leftarrow \text{ ecuación de un plano no vertical en } \mathbb{R}^3$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0); \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0).$$

Debe pasar por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) : f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y + f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$L_{\mathbf{x}_0}(x, y) = f(x_0, y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Representación gráfica de la linealización

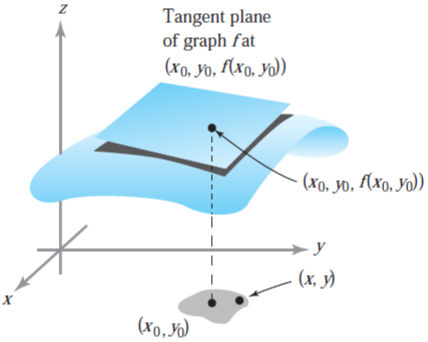


figure **2.3.3** For points (x, y) near (x_0, y_0), the graph of the tangent plane is close to the graph of f.

Motivación definición función diferenciable

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0, se tiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Recorrido

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Definición

Una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \longrightarrow 0$$

cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \longrightarrow 0$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Observación: Esta ecuación expresa lo que queremos decir cuando decimos que

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es una **buena aproximación** de la función f (en un entorno de (x_0, y_0)).

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple

$$\frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \right|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} \longrightarrow 0$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Observación: Esta ecuación expresa lo que queremos decir cuando decimos que

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

es una **buena aproximación** de la función f (en un entorno de (x_0, y_0)).

El plano tangente

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama plano tangente de la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

El plano tangente

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama plano tangente de la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

También nos referimos a ese plano como plano tangente de la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Matriz derivada $\mathbf{D}$

Escribamos $\mathbf{D}f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]$. Eso implica que

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + \quad & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \\ & = f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es una buena aproximación (lineal) de $f(x, y)$ cerca de (x_0, y_0).

Matriz derivada $\mathbf{D}$

Escribamos $\mathbf{D}f(x_0,y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$. Eso implica que

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0)+ \quad & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = \\ & = f(x_0,y_0) + \mathbf{D}f(x_0,y_0)\left[\begin{array}{c} x-x_0 \\ y-y_0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

es una buena aproximación (lineal) de $f(x,y)$ cerca de (x_0,y_0).
En la definición de diferenciabilidad podemos sustituir:

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\mathbf{D}f(x_0,y_0)\left[\begin{array}{c} x-x_0 \\ y-y_0 \end{array}\right]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

Recorrido

Función diferenciable, caso general

Definición

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ y $\mathbf{x}_0 \in U$, la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \ldots \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Función diferenciable, caso general

Definición

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ y $\mathbf{x}_0 \in U$, la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \ldots \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz de las derivadas parciales o matriz Jacobiana de f.

Función diferenciable, caso general

Definición

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ y $\mathbf{x}_0 \in U$, la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \ldots \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz de las derivadas parciales o matriz Jacobiana de f.

Definición

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto, y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$ si existe la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ y

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Ejemplo

Matriz de derivadas parciales de f o Jacobiana

Dada f, halle los espacios donde están incluidos dominio e imagen y exprese la matriz Jacobiana de f.

1) $f(t) = (e^t, 5t^2, -3t)$.

Ejemplo

Matriz de derivadas parciales de f o Jacobiana

Dada f, halle los espacios donde están incluidos dominio e imagen y exprese la matriz Jacobiana de f.

1) $f(t) = (e^t, 5t^2, -3t)$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{D}f(t_0) = \begin{bmatrix} (\partial f_1/\partial t)(t_0) \\ (\partial f_2/\partial t)(t_0) \\ (\partial f_3/\partial t)(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t_0} \\ 10t_0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Matriz de derivadas parciales de f o Jacobiana

Dada f, halle los espacios donde están incluidos dominio e imagen; halle la matriz Jacobiana de f.

2) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

Ejemplo

Matriz de derivadas parciales de f o Jacobiana

Dada f, halle los espacios donde están incluidos dominio e imagen; halle la matriz Jacobiana de f.

2) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) &= \begin{bmatrix} (\partial f_1/\partial x)(\mathbf{x}_0) & (\partial f_1/\partial y)(\mathbf{x}_0) & (\partial f_1/\partial z)(\mathbf{x}_0) \\ (\partial f_2/\partial x)(\mathbf{x}_0) & (\partial f_2/\partial y)(\mathbf{x}_0) & (\partial f_2/\partial z)(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_0 & 0 & e^{x_0} \\ 0 & -e^{z_0} & -ye^{z_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Recorrido

Gradiente

En el caso

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la derivada es una matriz $1 \times n$

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right].$$

El vector correspondiente se llama vector gradiente y se denota por ∇f o $\operatorname{grad} f$:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right).$$

Así,

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = xe^z$. Entonces

$$\nabla f(x,y,z) =$$

Gradiente

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xe^z$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (e^z, 0, xe^z).$$

∇f es una nueva función:

Gradiente

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xe^z$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (e^z, 0, xe^z).$$

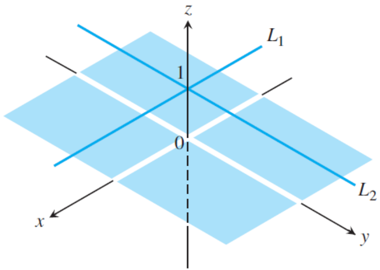
∇f es una nueva función:

$$\nabla f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \nabla f(x, y, z) = (e^z, 0, xe^z).$$

Recorrido

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

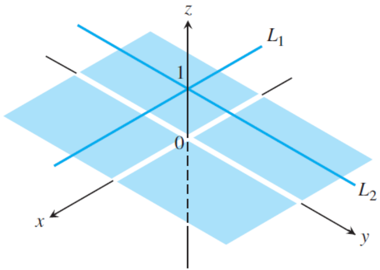
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

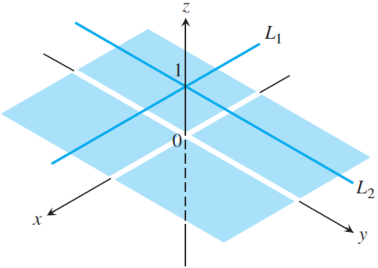
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0$;

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

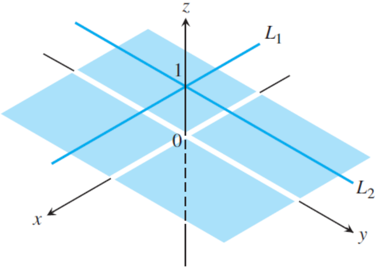
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0; \nabla f(0,0) = (0,0)$.

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0; \nabla f(0,0) = (0,0)$.

Observación: la existencia de gradiente en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x} \in U$. *Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}$.

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x} \in U$. *Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}$.

Demostración.

Desmotración del caso $m = 1$: $\mathbf{D}f(\mathbf{x})_{1\times m} = \nabla f(\mathbf{x})$.

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}$*.*

Demostración.

Desmotración del caso $m = 1$: $\mathbf{D}f(\mathbf{x})_{1\times m} = \nabla f(\mathbf{x})$.

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) =$$

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}$.

Demostración.

Desmotración del caso $m = 1$: $\mathbf{D}f(\mathbf{x})_{1\times m} = \nabla f(\mathbf{x})$.

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}) \\
&= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} |\mathbf{h}| + \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \right)}_{0, \text{ por ser } f \text{ diferenciable}} \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} |\mathbf{h}|}_{0} + \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h})}_{0}
\end{aligned}$$

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}$*.*

Demostración.

Desmotración del caso $m = 1$: $\mathbf{D}f(\mathbf{x})_{1\times m} = \nabla f(\mathbf{x})$.

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}) \\
&= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} |\mathbf{h}| + \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \right)}_{0, \text{ por ser } f \text{ diferenciable}} \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} |\mathbf{h}|}_{0} + \underbrace{\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{h})}_{0}
\end{aligned}$$

Luego f es continua en $\mathbf{x}$. $\square$

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i/\partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$*.*

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i / \partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$*.*

Una función es de clase C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

Una función es de clase C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas.

Desmotración del caso $m = 1$.

Sea $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

Una función es de clase C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas.

Desmotración del caso $m = 1$.

Sea $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$.

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \\
&\quad = f(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n) - f(x_1, \cdots, x_n) \\
&\quad = f(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \cdots, x_n + h_n) \\
&\qquad\quad + f(x_1, x_2 + h_2, \cdots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \cdots, x_n + h_n) \\
&\qquad\qquad \cdots \\
&\qquad\quad + f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

Demostración.

$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) =$

$$= f_{x_1}\underbrace{(c_1, x_2 + h_2 \cdots, x_n + h_n)}_{\mathbf{y}_1} h_1 + f_{x_2}\underbrace{(x_1, c_2, x_3 + h_3 \cdots, x_n + h_n)}_{\mathbf{y}_2} h_2$$

$$+ \cdots + f_{x_n}\underbrace{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, c_n)}_{\mathbf{y}_n} h_n$$

Demostración.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) =$$

$$= f_{x_1}\underbrace{(c_1, x_2+h_2 \cdots, x_n+h_n)}_{\mathbf{y}_1} h_1 + f_{x_2}\underbrace{(x_1, c_2, x_3+h_3 \cdots, x_n+h_n)}_{\mathbf{y}_2} h_2$$
$$+ \cdots + f_{x_n}\underbrace{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, c_n)}_{\mathbf{y}_n} h_n$$

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} =$$

$$\begin{aligned} &= f_{x_1}(\mathbf{y}_1)h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{y}_n)h_n - (f_{x_1}(\mathbf{x})h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})h_n) \\ &= (f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x}))h_1 + \cdots + (f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x}))h_n \end{aligned}$$

Demostración.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) =$$

$$= f_{x_1}\underbrace{(c_1, x_2 + h_2 \cdots, x_n + h_n)}_{\mathbf{y}_1} h_1 + f_{x_2}\underbrace{(x_1, c_2, x_3 + h_3 \cdots, x_n + h_n)}_{\mathbf{y}_2} h_2$$

$$+ \cdots + f_{x_n}\underbrace{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, c_n)}_{\mathbf{y}_n} h_n$$

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} =$$

$$\begin{aligned} &= f_{x_1}(\mathbf{y}_1)h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{y}_n)h_n - (f_{x_1}(\mathbf{x})h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})h_n) \\ &= (f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x}))h_1 + \cdots + (f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x}))h_n \end{aligned}$$

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq \frac{|(f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x}))h_1 + \cdots + (f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x}))h_n|}{|\mathbf{h}|}$$

Demostración.

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1)-f_{x_1}(\mathbf{x})|\underbrace{\frac{|h_1|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1}+\cdots+|f_{x_n}(\mathbf{y}_n)-f_{x_n}(\mathbf{x})|\underbrace{\frac{|h_n|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1}$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1)-f_{x_1}(\mathbf{x})|+\cdots+|f_{x_n}(\mathbf{y}_n)-f_{x_n}(\mathbf{x})|$$

Demostración.

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})| \underbrace{\frac{|h_1|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1} + \cdots + |f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})| \underbrace{\frac{|h_n|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1}$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})| + \cdots + |f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})|$$

Y si cada una de las derivadas parciales es continua en $\mathbf{x}$:

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})|}_{\underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0} + \cdots + \underbrace{|f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})|}_{\underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0} \underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0$$

Demostración.

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})| \underbrace{\frac{|h_1|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1} + \cdots + |f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})| \underbrace{\frac{|h_n|}{|\mathbf{h}|}}_{\leq 1}$$

$$\leq |f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})| + \cdots + |f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})|$$

Y si cada una de las derivadas parciales es continua en $\mathbf{x}$:

$$\frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_{x_1}(\mathbf{y}_1) - f_{x_1}(\mathbf{x})|}_{\underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0} + \cdots + \underbrace{|f_{x_n}(\mathbf{y}_n) - f_{x_n}(\mathbf{x})|}_{\underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0} \underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0$$

Luego f es diferenciable en $\mathbf{x}$. $\square$

Recíprocos falsos

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}$*.*

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Supongamos que* f *es de clase* C^1 *en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$*.*

Recíprocos falsos

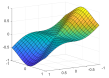
Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}$.

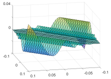
Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que f es de clase C^1 en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \end{cases}$$



$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$



La función f es continua pero no diferenciable en $(0,0)$; la función g es diferenciable en $(0,0)$ pero sus derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$.