Matemática para Computación
Trabajo Práctico 1: Funciones vectoriales y funciones de varias variables reales.

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Cálculo vectorial” de Marsden, J.E. y Tromba, A.J., quinta edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

1. Funciones de varias variables

1. (r) Evalúe la función $f(x,y) = x^2+xy^3$ en los puntos que corresponde, para obtener los siguientes valores:

   a) $f(0,0)$ *b)* $f(-1,1)$ *c)* $f(1,-1)$ *d)* $f(2,3)$ *e)* $f(-3,-2)$

   Además, analice cuáles son los conjuntos de partida y de llegada de f.

2. Para cada una de las siguientes funciones, obtenga y grafique el dominio. Describa las curvas de nivel, la frontera del dominio y el conjunto imagen. Determine si el dominio es una región abierta, cerrada, acotada, o ninguna de las anteriores. Finalmente, indique cuál es el conjunto Imagen en los primeros dos ítems.

   a) (*r*) $f(x,y) = \sqrt{y-x-2}$
   b) (*o*) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(4-x^2-y^2)}$
   b) (*r*) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}(y-x)$
   d) (*r*) $f(x,y) = \ln(9-x^2-y^2)$

3. (r) Obtenga analíticamente y represente gráficamente el dominio D de la función $f : D \to \mathbb{R}$, dada por
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x^2+y^2-1)}.$$

4. Para cada una de las siguientes funciones, obtenga y grafique las curvas de nivel $f(x,y) = c$ para los valores de c indicados, creando un mapa de contorno. Adicionalmente, realice un esbozo de la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$.

   a) (o) $f(x,y) = x^2+4y^2$, para $c = 0,1,4,9$.
   b) (o) $f(x,y) = xy$, para $c = -2,-1,0,1,2$.
   c) (r) $f(x,y) = \sqrt{100-x^2-y^2}$, para $c = 0,2,4,6,8,10$.
   d) (r) $f(x,y) = x-y+2$, para $c = -1,0,1,2$.

5. (o) Siendo $D \subset \mathbb{R}^2$, considere la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{x^2-y}{x^4+y^2}$:

   a) Indique el dominio D, como el mayor conjunto posible.
   b) Evalúe $f(-1,2)$.
   c) Indique ceros de f.
   d) ¿Cuál es el conjunto de puntos del dominio D, donde f es positiva o negativa?

6. (r) Describa, según varía c, el comportamiento de la curva de nivel $f(x,y) = c$ para cada una de las funciones:

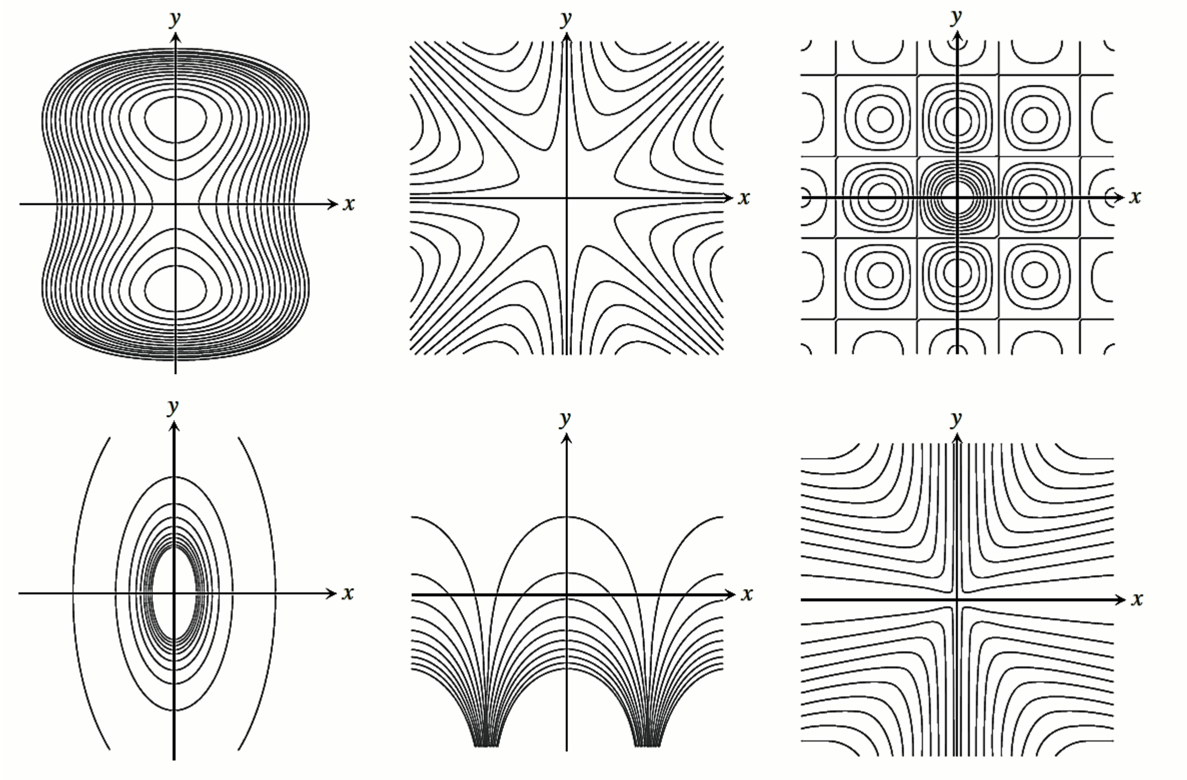
   a) $f(x,y) = x^2+y^2+1$ *b)* $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ *c)* $f(x,y) = x^3-x$

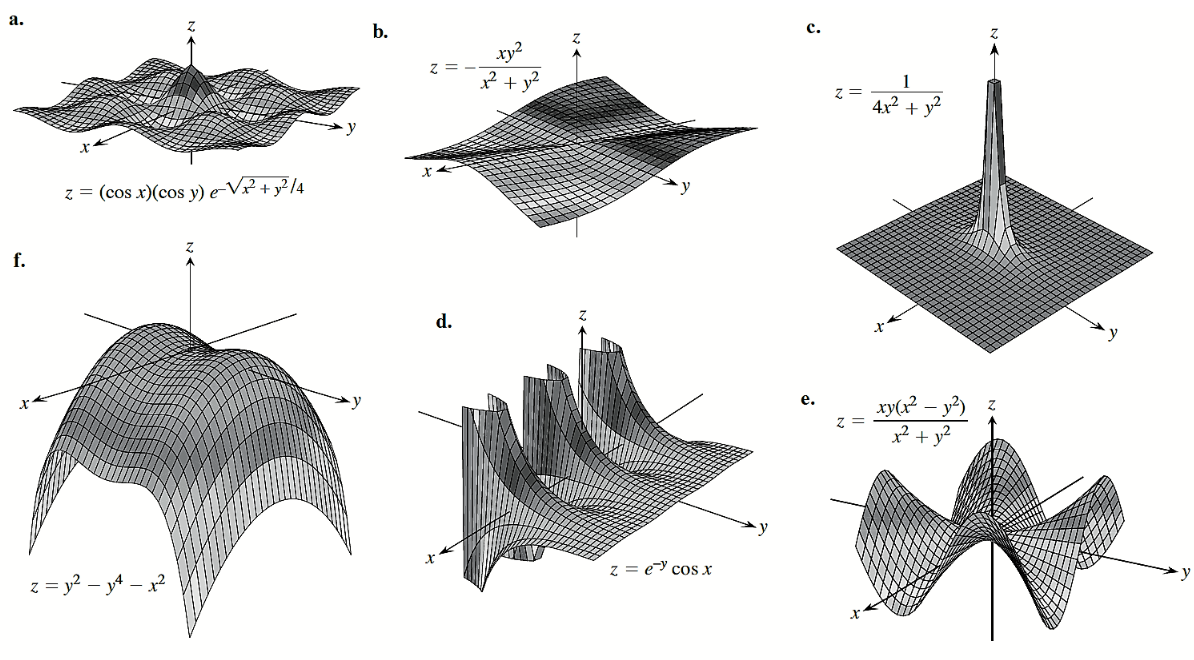
7. Muestre los valores de las siguientes funciones de dos maneras: I) graficando la superficie $z = f(x,y)$, y II) dibujando varias curvas de nivel en el dominio de la función. Marque cada línea de contorno.

   a) (*o*) $f(x,y) = y^2$ *c*) (*r*) $f(x,y) = 1 - |y|$

   b) (*r*) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ *d*) (*r*) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

8. (o) Asocie cada conjunto de curvas de nivel, del primer grupo de gráficos, con la función apropiada del segundo grupo.





9. (*) Repaso: ejercicios tomados de geometría analítca.

   Indique ecuaciones para las siguientes familias, adoptando un parámetro apropiado. Represente en cada caso al menos tres superficies de cada familia.

a) Familia de esferas de centro $(1,-3,5)$.

b) Familia de paraboloides de revolución de vértice $V(0,3,0)$.

c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, eje de revolución el eje y.

10. Para las siguientes funciones, describa y realice un esbozo de la superficie de nivel indicada.

a) (o) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, para el nivel $c=1$.

b) (r) $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$, para el nivel $c=0$.

c) (o) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, para la superficie que pasa por el punto $P(1,-1,\sqrt{2})$.

d) (r) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y+z^2)$, para la superficie que pasa por el punto $P(-1,2,1)$.

2. Límite y continuidad

11. Calcule los siguientes límites:

a) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

b) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x\tan y$

c) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

d) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

e) (*o*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy}$

f) (*r*) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos(2x)$

12. (o) Si dado el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se hallan

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{\substack{y\to b\\ x\neq a}} f(x,y)\right) \quad \text{o} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ y\neq b}} f(x,y)\right),$$

se dice que se ha tomado **límites iterados**. Este procedimiento no siempre conduce al valor del límite. Analice los siguientes ejemplos.

a) Para analizar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2},$$

halle los límites iterados. Verifique que ambos valores coinciden con el valor del límite doble.

b) Para la función dada por

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ sí existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

c) Para la función dada por $f(x,y)=(x+y)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)$, verifique que los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ **no** existen pero el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ sí existe.

13. Calcular, si existe, $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$:

a) (r) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to|x|$, $x_0=1$.

b) (o) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}_0$ es arbitrario.

c) (r) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $x\to(x^2,e^x)$, $x_0=1$.

d) (o) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\to\dfrac{1}{\|(x,y)\|}(\operatorname{sen}(x-y),e^{x(y+1)}-x-1)$, $\mathbf{x}_0=(0,0)$.

14. ¿En cuáles puntos (x, y) del plano las siguientes funciones son continuas?

   a) (o) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

   b) (r) $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

   c) (r) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2 + \cos x}$

15. ¿En cuáles puntos (x, y, z) del espacio las siguientes funciones son continuas?

   a) (o) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$

   b) (r) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

   c) (r) $h(x, y, z) = \frac{1}{z - \sqrt{x^2+y^2}}$

16. Considerando **diferentes trayectorias** de aproximación, demuestre que las siguientes funciones no tienen límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

$$a)\,(o)\, f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad b)\,(r)\, g(x, y) = \frac{x^2 + y}{y}$$

17. (r) Demuestre que el siguiente límite no existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^2 - 1}{y - 1}$.

18. (o) Demuestre que la función $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ presenta una tendencia a *cero* a lo largo de todas las líneas rectas que tienden a $(0, 0)$, pero no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$.

3. Diferenciación

19. Obtenga $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para cada una de las siguientes funciones.

   a) (o) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

   b) (r) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

   c) (o) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$.

   d) (r) $f(x, y) = x^y$.

   e) (o) $f(x, y, z) = x^2 - 3z$.

20. (o) Calcule la matriz de derivadas parciales de las siguientes funciones y además, pruebe (por definición) que f es diferenciable en su dominio. Indique cuál es C^1.

   a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

   b) $f(x, y, z) = x^2 - 3z$.

21. (o) Calcule la derivada parcial de las siguientes funciones con respecto a cada variable.

   a) $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$.

   b) $h(\rho, \phi, \theta) = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$.

22. Calcule la matriz de derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) (o) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y)$.

   b) (o) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xe^y + \cos(y), x, x + e^y)$.

c) (o) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$.

d) (r) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xye^{xy}, x\,\mathrm{sen}(y), 5xy^2)$.

e) (r) $f(x, y) = (e^x, \mathrm{sen}(xy))$.

23. Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

   a) (o) $f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$.

   b) (r) $h(x, y) = xe^y + y + 1$.

24. (r) Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$:

   a) $w = \ln(2x + 3y)$.

   b) $w = e^x + x \ln y + y \ln x$.

25. *a*) (r) Verifique que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$ para $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$.

   b) (o) Compruebe que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x, y, z, w) = e^{xyz}\,\mathrm{sen}(xw)$.

26. (*)

   - Demuestre que la función $f(x, y, z) = e^{3x+4y}\cos(5z)$ satisface una ecuación de Laplace. ¿En qué conjunto? (*Ecuación de Laplace:* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$).
   - Sea la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; indique cuál es su dominio D y pruebe que es una función **armónica** en D, es decir, que satisface una ecuación de Laplace en D.

27. (*) Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden. Compruebe que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(Sugerencia: calcule las derivadas parciales involucradas por definición y compruebe que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y que $f_{yx}(0, 0) = 1$.)

4. Curvas y trayectorias

28. Dibujar las curvas que son imagen de las trayectorias de los siguientes ejercicios, donde se indican los intervalos de t.

   a) (o) $x = \mathrm{sen}\, t,\ y = 4\cos t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

   b) (r) $x = 2\,\mathrm{sen}\, t,\ y = 4\cos t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

   c) (o) $\mathbf{c}(t) = (2t - 1,\ t + 2,\ t)$.

   d) (r) $\mathbf{c}(t) = (-t,\ 2t,\ 1/t),\ 1 \leq t \leq 3$.

29. Calcular el vector tangente a la trayectoria dada en los siguientes ejercicios.

   a) (o) $\mathbf{c}(t) = (e^t,\ \cos t)$.

   b) (r) $\mathbf{c}(t) = (3t^2,\ t^3)$.

   c) (r) $\mathbf{c}(t) = (t\,\mathrm{sen}\, t,\ 4t)$.

   d) (r) $\mathbf{c}(t) = (t^2,\ e^{2t})$.

30. Para cada una de las siguientes trayectorias:

   (*i*) Calcule el vector velocidad.

(ii) Determine la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en el valor de t especificado.

a) (o) $\mathbf{c}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, en $t = 0$.

b) (r) $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2t^{5/2})$, en $t = 1$.

c) (r) $\mathbf{c}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$, en $t = 0$.

d) (r) $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t, t)$, en $t = 0$.

31. (r) Si la posición en el instante t de una partícula en el espacio es $(6t,\ 3t^2,\ t^3)$, ¿cuál es su vector velocidad en el instante $t = 0$?

32. (*) Demostrar que si la aceleración de un objeto es siempre perpendicular a la velocidad, entonces la rapidez del objeto es constante.

33. (*) Demostrar que en un máximo o mínimo local de $\|\mathbf{r}(t)\|$, el vector $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$.

34. (r) Hallar la trayectoria $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}(0) = (0, -5, 1)$ y $\mathbf{c}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

35. (r) Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ con aceleración nula. Demostrar que $\mathbf{c}$ es una línea recta o un punto.

36. Hallar trayectorias $\mathbf{c}(t)$ cuyas imágenes sean las siguientes curvas:

a) (o) $\{(x, y) : y = e^x\}$

b) (r) Una línea recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y por otro punto (a, b, c).

c) (r) $\big\{(x, y) : 9x^2 + 16y^2 = 4\big\}$

37. Halle la longitud de arco de la curva dada en el intervalo especificado.

a) (o) $(2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ t)$, para $0 \le t \le 2\pi$.

b) (r) $(1,\ 3t^2,\ t^3)$, para $0 \le t \le 1$.

c) (r) $(t,\ t,\ t^2)$, para $1 \le t \le 2$.

d) (r) $(t,\ t\operatorname{sen} t,\ t\cos t)$, para $0 \le t \le \pi$.

38. (o) Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t)$, definida por $\mathbf{c}(t) = (t,\ t\operatorname{sen} t,\ t\cos t)$. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los dos puntos $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.

39. (r) Sea $\vec{c}(t) = (2t,\ t^2,\ \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\vec{c}$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

40. (*) Sea $\vec{c}(t)$ una trayectoria dada con $a \le t \le b$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, donde α es una función C^1 estrictamente creciente, definida en $[a, b]$, para cada $t \in [a, b]$ existe un único s tal que $\alpha(0) = s$. Defínase la función $\vec{d} : [\alpha(a), \alpha(b)] \to \mathbb{R}^3$ mediante la ecuación $\vec{d}(s) = \vec{c}(t)$.

a) Justificar razonadamente que las curvas $\vec{c}$ y $\vec{d}$ tienen la misma imagen.

b) Demostrar que $\vec{c}$ y $\vec{d}$ tienen la misma longitud de arco.

c) Sea $s = \alpha(t) = \displaystyle\int_a^t \|\vec{c}\,'(t)\|\, dt$. Defínase $\vec{d}$ igual que antes, $\vec{d}(s) = \vec{c}(t)$. Demostrar que

$$\left\| \frac{d}{ds}\vec{d}(s) \right\| = 1.$$

La trayectoria $s \mapsto \vec{d}(s)$ se denomina ***reparametrización de $\vec{c}$ por la longitud de arco***.

4.1. Campos vectoriales y líneas de flujo

41. Esbozar en cada caso el campo vectorial dado o un pequeño múltiplo suyo.

    a) (o) $\mathbf{F}(x, y) = (2, 2)$.
    b) (o) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.
    c) (o) $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$.
    d) (r) $\mathbf{F}(x, y) = (2y, -x)$.
    e) (r) $\mathbf{F}(x, y) = (y, -2x)$.
    f) (r) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.
    g) (r) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

42. En los siguientes ejercicios, esbozar algunas líneas de flujo del campo vectorial dado.

    a) (o) $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.
    b) (r) $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$.
    c) (o) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
    d) (r) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$.

43. En los siguientes ejercicios, demostrar que la curva dada $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo del campo de velocidades dado $\mathbf{F}(x, y, z)$.

    a) (o) $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, e^t)$; $\quad \mathbf{F}(x, y, z) = (y,\ -x,\ z)$.
    b) (r) $\mathbf{c}(t) = (e^t, \log |t|, 1/t),\ t \neq 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$.
    c) (r) $\mathbf{c}(t) = (t^2,\ 2t - 1,\ \sqrt{t}),\ t > 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1,\ 2,\ 1/2z)$.
    d) (r) $\mathbf{c}(t) = \left(\dfrac{1}{t^3},\ e^t,\ \dfrac{1}{t} \right)$; $\quad \mathbf{F}(x, y, z) = (-3z^4,\ y,\ -z^2)$.

44. (o) Sea $\mathbf{c}(t)$ una línea de flujo de un campo gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V$. Demostrar que $V(c(t))$ es decreciente como función de t.

45. (r) Supongamos que todas las isotermas en una región son esferas concéntricas centradas en el origen. Demostrar que el campo vectorial que representa el flujo de energía apunta en la dirección del radio, bien hacia el origen, bien hacia fuera.

5. Propiedades de la derivada

46. (o) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, demostrar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable y calcular su derivada en función de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

47. (r) Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar sus derivadas en un punto cualquiera:

    a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2$.
    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$.
    c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2 + x + y$.
    d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
    e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto e^{xy}$.
    f) $f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, donde $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
    g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^4 - y^4$.

5.1. Regla de la cadena

48. (o) Dadas $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$ y $w(t) = f(x(t), y(t))$, exprese $\dfrac{dw}{dt}$ como una función de t usando la regla de la cadena; luego halle $\dfrac{dw}{dt}$ expresando w en términos de t y derivando directamente con respecto a t. Finalmente evalúe $\dfrac{dw}{dt}$ en el valor de $t = 0$.

49. Dar la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones y justificar en cada caso la respuesta por medio del teorema apropiado.

    a) (r) $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y) = f(x, u(x,y))$.
    b) (o) $\dfrac{dh}{dx}$, donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.
    c) (r) $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$.

50. (r) Verificar la regla de la cadena para $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, donde $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ y

$$f(u,v) = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \quad u(x,y) = e^{-x-y}, \quad v(x,y) = e^{xy}.$$

51. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de los casos siguientes:

    a) (o) $f(x,y) = xy, \quad \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$.
    b) (r) $f(x,y) = e^{xy}, \quad \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$.

52. (r) Determinar el vector velocidad para cada uno de los caminos $\mathbf{c}(t)$ dados en el Ejercicio 51:

    a) $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$.
    b) $\mathbf{c}(t) = (t, -t)$.

53. (r) Demostrar que para funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se cumple que

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

54. (r) Supóngase que la temperatura en el punto (x,y,z) del espacio es $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Una partícula sigue la hélice circular $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el instante t.

    a) Calcular $T'(t)$.
    b) Hallar el valor aproximado de la temperatura en el instante $t = \pi/2 + 0{,}01$.

55. (r) Supongamos que un pato nada sobre la circunferencia $x = \cos t$, $y = \sin t$, y que la temperatura del agua está dada por $T = x^2 e^y - xy^3$. Hallar dT/dt, el cambio de la temperatura por unidad de tiempo que el pato notaría:

    a) Por medio de la regla de la cadena, y derivando.
    b) Expresando T en función de t y derivando.

56. (r) Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Hallar $\nabla f(x,y)$.

57. (r) La regla de la cadena no se puede aplicar si f no es diferenciable: considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Probar que existen las derivadas parciales $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

b) Sea $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ para constantes a y b. Probar que $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable y $(f \circ \mathbf{g})'(0) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, pero $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

6. Derivadas direccionales y vectores gradiente

58. (o) Determine el gradiente de la función en el punto dado y dibújelo junto a la curva de nivel que pasa por el punto.

    a) $f(x,y) = y - x$, $(2,1)$

    b) $g(x,y) = xy^2$, $(2,-1)$

59. (r) Obtenga ∇f en el punto dado: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$, $(-1,2,-2)$.

60. (o) Encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de un vector unitario paralelo a $\vec{\mathbf{u}}$:

    a) $g(x,y) = \dfrac{x-y}{xy+2}$, $P_0(1,-1)$, $\vec{\mathbf{u}} = 12\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$

    b) $h(x,y,z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$, $P_0(1,0,1/2)$, $\vec{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$

61. (o) Obtenga la dirección en la cual la función crece y decrece más rápidamente en P_0. Luego obtenga la derivada de la función en esas direcciones, si $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0(-1,1)$.

62. (o) Dada $f(x,y) = x^2 + y^2$, grafique la curva $f(x,y) = 4$ junto con ∇f en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y la recta tangente a la dicha curva de nivel en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Luego escriba la ecuación para la recta tangente.

63. (o) Sea $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Obtenga las direcciones $\vec{\mathbf{u}}$ y los valores de $D_u f(1,-1)$ para los cuales:

    a) $D_u f(1,-1)$ es el más grande

    b) $D_u f(1,-1)$ es el más pequeño

    c) $D_u f(1,-1) = 0$

    d) $D_u f(1,-1) = 4$

    e) $D_u f(1,-1) = -3$

64. (r) Para la función dada por $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ calcule el gradiente e indique cuál es la dirección de máximo crecimiento en $(1,1,1)$. Repita este ejercicio para la función dada por $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

65. (o) Pruebe que la función continua, presentada previamente en el ejercicio 57, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

Sugerencia: para probar que f no es diferenciable en $(0,0)$ puede probar que la derivada direccional de f en $(0,0)$ en ciertas direcciones $\mathbf{u}$ no es igual a $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$.

66. (*) Verifique que la función g definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x+y}, & x+y \neq 0; \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$ aunque sus derivadas parciales de primer orden no son continuas en $(0,0)$. Para ello:

a) calcule las derivadas parciales de primer orden de g en $(0,0)$ y en (x,y) para (x,y) tal que $x+y\neq 0$.

b) Compruebe que g_x no es continua en $(0,0)$ verificando que no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_x(x,y)$.

c) Verifique que g es diferenciable en $(0,0)$ aplicando la definición. (Sugerencia: plantee $\Delta g(0,0)$ y desarrolle la potencia que aparece en la expresión.)

6.1. Linealización, planos tangentes y diferenciales

67. Calcular el gradiente de las siguientes funciones:

    a) (o) $f(x,y,z) = x\,e^{-x^2-y^2-z^2}$.

    b) (r) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

    c) (r) $f(x,y,z) = z^2 e^x \cos(y)$.

68. (r) Calcular $\nabla h(1,1,1)$ si $h(x,y,z) = (x+z)\,e^{x-y}$.

69. (o) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2+y^3$ en el punto $(3,1,10)$.

70. (o) Obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ en el punto $(0,0,1)$.

71. (r) Encuentre la ecuación para el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel $x^2+y^2+z^2 = 3$ en los puntos indicados: $P_0(1,1,1)$, $P_1(\sqrt{3},0,0)$ y $P_2(0,0,\sqrt{3})$.

72. (r) Justifique que el gráfico de una función $z = f(x,y)$ puede considerarse como la superficie de nivel $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$. Use este hecho para deducir la fórmula general del plano tangente al gráfico de f en un punto (x_0,y_0,z_0).

73. (r) ¿Por qué deben llamarse *tangentes* en $(0,0)$ las gráficas de $f(x,y) = x^2+y^2$ y de $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$?

74. (o) Obtenga la aproximación lineal $L(x,y)$ de la función $f(x,y) = x^2+y^2+1$ en el punto $(0,0)$ y en el punto $(1,1)$.

75. (o) Obtenga la aproximación lineal $L(x,y,z)$ de la función $f(x,y,z) = xy+yz+xz$ en los puntos $(1,1,1)$ y $(1,0,0)$.

    la aproximación lineal de una función adecuada para estimar los siguientes valores:

    a) (o) $(0{,}99\,e^{0{,}02})^8$.

    b) (r) $(0{,}99)^3 + (2{,}01)^3 - 6(0{,}99)(2{,}01)$.

    c) (r) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (2{,}02)^2}$.

76. (r) ¿Alrededor de cuánto cambiará el valor de $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde $P_0(3,4,12)$ una distancia $ds \approx 0,1$ unidades en la dirección de $3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$?

77. (r) La lata cilíndrica de un refresco tiene $12cm$ de alto y $3cm$ de radio. El fabricante planea reducir la altura en $0,2cm$ y el radio en $0,3cm$. Utilizando diferenciales, estime cuánto disminuirá el volumen de la lata.

78. (o) Supóngase que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde $a,b,c > 0$. En el punto $(1,1)$:

    a) ¿En qué dirección del plano xy crece la altitud más rápidamente?

    b) Si se soltara una canica en ese punto, ¿en qué dirección comenzaría a rodar?

79. (r) El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave en (x, y, z) es $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$. Él se encuentra en $(1, 1, 1)$.

   a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura descienda lo más rápidamente posible?

   b) Si la nave viaja a e^8 m/s, ¿a qué velocidad (en grados/s) cambiará la temperatura si se mueve en esa dirección?

   c) El casco se fracturará si se enfría a una velocidad mayor que $\sqrt{14}e^2$ grados/s. Describa el conjunto de direcciones seguras para el capitán.

80. (r) Halle los valores máximo y mínimo que la función f alcanza a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$:

   a) $f(x, y) = xy$; $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; para $0 \leq t \leq 2\pi$.

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$; para $0 \leq t \leq 2\pi$.

81. (o) Supóngase que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. ¿Cuál es la derivada de f?

7. Ejercicios integradores (*)

82. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$:

   a) Halle la ecuación de la curva de nivel $f(x, y) = z$ para $z = f(1, 2)$ y grafique.

   b) Encuentre el gradiente de f en el punto $(1, 2)$ y represente el gradiente en el gráfico anterior.

   c) Calcule la derivada direccional de f en el mismo punto, en la dirección del vector $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 1)$.

   d) Calcule la derivada de f en la dirección que forma un ángulo $\alpha = \pi/6$ con el semieje positivo de las x.

   e) Calcule la derivada de f en el punto $(1, 2)$ en la dirección que va del punto $P(2, 1)$ al punto $Q(1, 3)$.

   f) Determine la dirección y el valor de la máxima derivada direccional en el punto $(1, 2)$.

   g) Determine la dirección y el valor de la mínima derivada direccional en el punto $(1, 2)$.

   h) Determine la dirección en la que se anula la derivada en dicho punto e interprete por qué.

   i) Determine en qué dirección la derivada en dicho punto toma el valor 1.

83. Dada la función $f(x, y) = x^2 - y^2$

   a) Calcule el incremento de la función al pasar de $P(-1, -1)$ a $Q(-0,98; -1,01)$

   b) Calcule el valor de la diferencial de la función en P y utilícelo para aproximar el incremento de la función.

   c) Determine si es buena la estimación. Justifique.

   d) Halle la aproximación lineal y utilícela para determinar el valor de la función en Q.