UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL II

CURSO 2.025

Prof. Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL II

UNIDAD 1

Introducción
Tensiones

CURSO 2.025

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

INTRODUCCIÓN

Cátedra Análisis Estructural II

Prof. Titular: **Daniel E. López** daniel.lopez@ingenieria.uncuyo.edu.ar

J.T.P.:

Ay. 1°:

Ay. 2°/Adsc:

Material e Información

AulaAbierta

Consultas: días y horarios.

Planificación de Actividades, contenidos y fechas de entrega.

Material de la Cátedra.

Reglamento de la Cátedra

Motivación

INTRODUCCIÓN

Curso Análisis Estructural II

¿Porque estoy tomando este curso?

¿Qué voy a aprender en este curso?

¿Cuánto tiempo debo dedicar para acreditar este curso?

¿Cuáles son los requisitos para acreditar este curso?

INTRODUCCIÓN

Contenido

En este curso se desarrolla el análisis de estructuras de continuas mediante varias metodologías y su aplicación a distintos tipos estructurales.

Se identifica el problema físico, modelo matemático y el modelo de análisis; las variables estáticas y cinemáticas asociadas, y se presentan las relaciones entre ellas.

Se calculan tensiones, corrimientos y deformaciones mediante la utilización de métodos clásicos de la teoría de la elasticidad, en estructuras simples.

También se estudian métodos aproximados: diferencias finitas y elementos finitos. El método de los elementos finitos (MEF) permite resolver en forma aproximada todo tipo de estructuras continuas.

Se utiliza software no especializado y específico para análisis estructural.

INTRODUCCIÓN

Expectativas de logro

- Comprender la diferencia en entre estructuras discretas y continuas, y el ámbito de aplicación de las variables generalizadas y las de punto.
- Reconocer las variables de punto, estáticas y cinemáticas de sistemas estructurales compuestos por elementos bi o tri dimensionales, pudiendo comprender como se relacionan entre sí.
- Comprender el alcance y las dificultades de la resolución analítica de las ecuaciones de la elasticidad aplicadas a estructuras simples.
- Comprender el alcance y las limitaciones de la utilización de métodos aproximados para resolver estructuras continuas.
- Relacionar las teorías e hipótesis utilizadas en los métodos aproximados de análisis de estructuras con el comportamiento real de las mismas, de modo tal que permitan sustentar su aplicación, para la toma de decisiones en cuanto a la optimización o reformulación del modelo de análisis.
- Conformar equipos de trabajo que faciliten el desempeño y promuevan el desarrollo del criterio ingenieril.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Análisis de Estructuras

En relación con los conocimientos previos, importante establecer un punto de inicio para el curso.

¿Por qué?

+ Reconocimiento de la situación individual.

+ Establecer estado de situación de conocimientos previos por parte de la Cátedra

Debido a que este curso se refiere al análisis de estructura continuas, la importancia de los conocimientos previos es innegable, pero relativa.

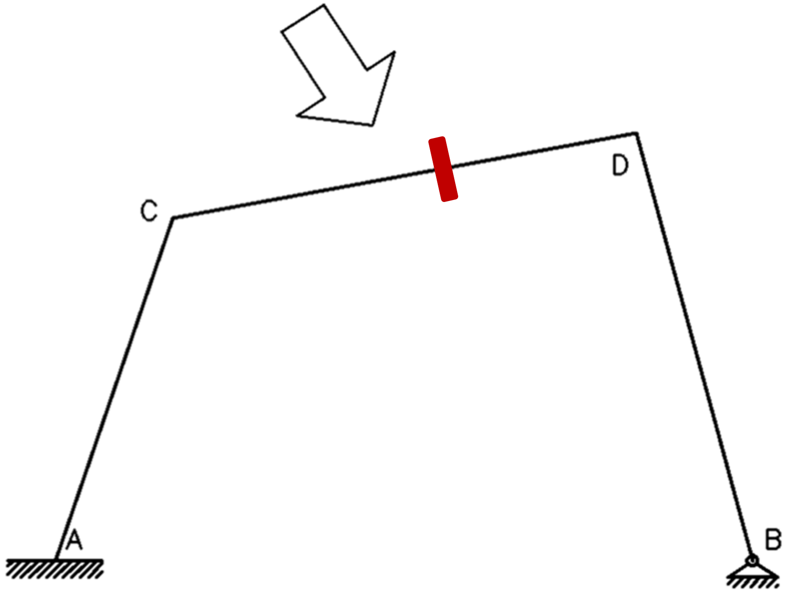
Las estructuras discretas son un caso particular de las continuas.

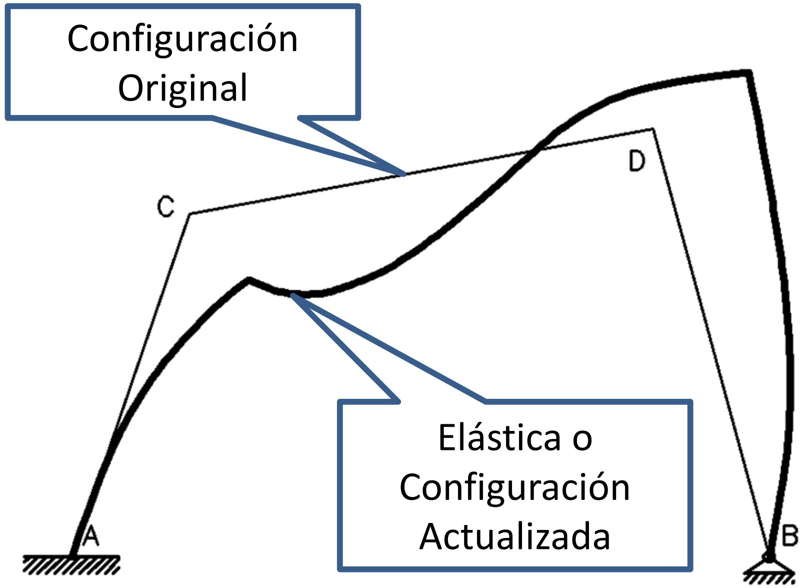
CONOCIMIENTOS PREVIOS

Configuraciones y Esfuerzos

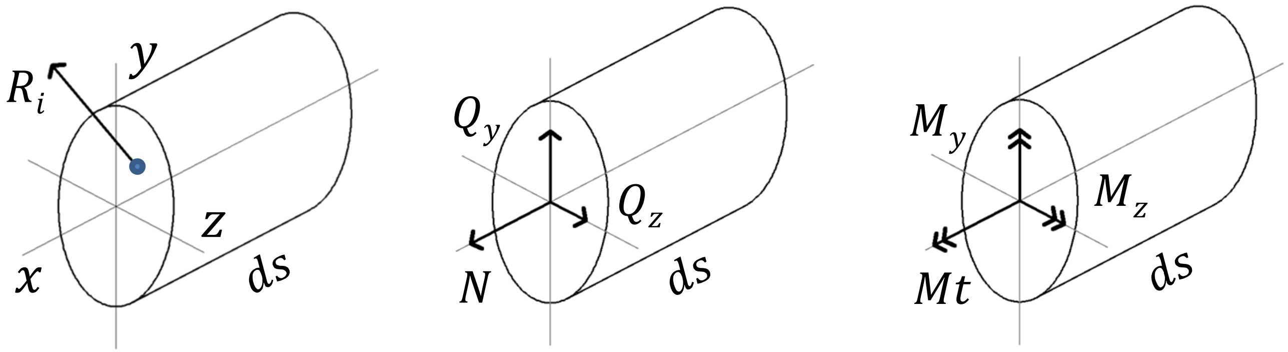
Estructuras Isostáticas / Hiperestáticas

Configuración Actualizada, Deformada o Elástica





Esfuerzos Internos

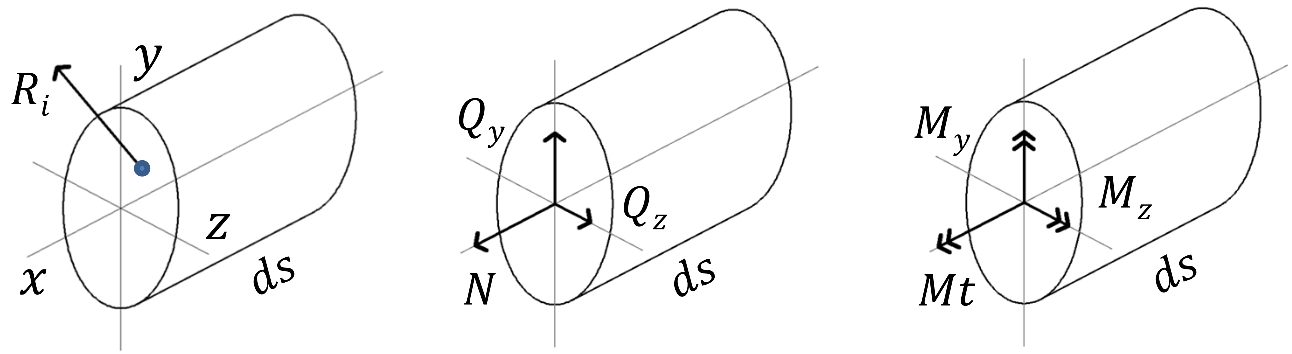


CONOCIMIENTOS PREVIOS

Configuraciones y Esfuerzos

Estructuras Isostáticas / Hiperestáticas

Esfuerzos Internos



$$N = \int_A \sigma \, dS$$

$$M_z = \int_A \sigma \, y \, dS$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} \, dS$$

$$M = \int_A \sigma \, y \, dS$$

$$M_y = \int_A \sigma \, z \, dS$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} \, dS$$

$$Q = \int_A \tau \, dS$$

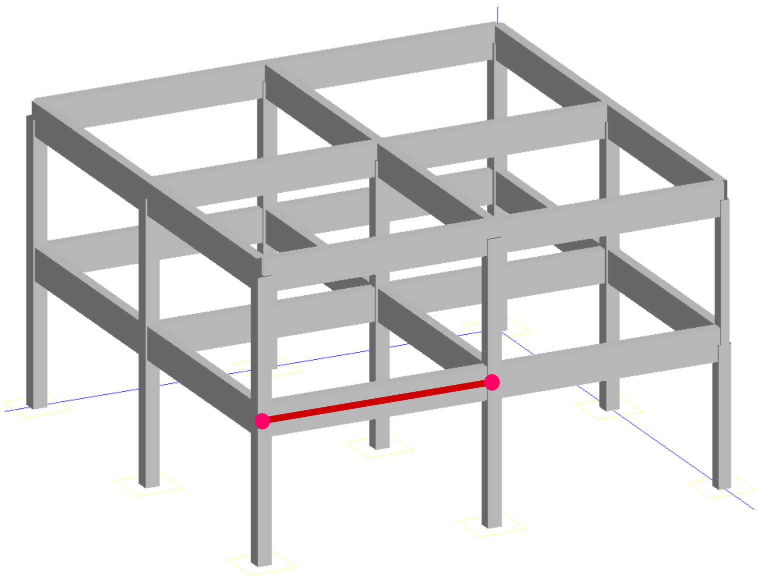
$$M_t = \int_A \tau_{xy} \, z \, dS + \int_A \tau_{xz} \, y \, dS$$

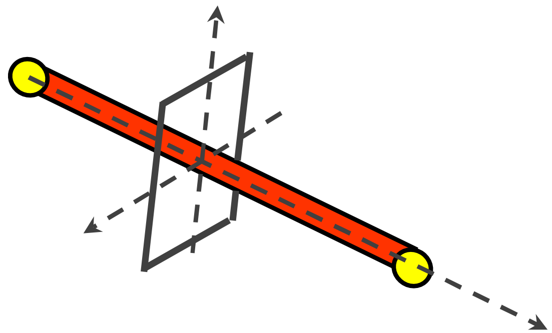
Hipótesis

Tipología

Estructura de barras

Están compuestas por miembros o elementos estructurales que se caracterizan por tener una dimensión preponderante (muy grande) frente a las otras dos dimensiones.





CONOCIMIENTOS PREVIOS. T. CLÁSICA DE LAS ESTRUCTURAS

Hipótesis

Tipología

Estructura de barras

Material

Homogéneo
Isótropo
Continuo
Simple
Elástico (vale la Ley de Hooke)

Hipótesis

Tipología

Estructura de barras

Material

Homogéneo
Isótropo
Continuo
Simple
Elástico

Cinemática

Pequeños desplazamientos
Pequeñas deformaciones

Las deformaciones y los desplazamientos son pequeños respecto de las dimensiones de los miembros estructurales. Tienen una magnitud tal que los cálculos pueden hacerse sobre la configuración original de la estructura.
Así, cuando se produce la rotación de una chapa se considera que el ángulo de giro es igual al arco que describen la trayectoria de los puntos de la chapa y a la tangente del ángulo girado.
Al mismo, tiempo se considera que las cargas no cambian de dirección mientras la estructura alcanza su configuración actualizada.

CONOCIMIENTOS PREVIOS. T. CLÁSICA DE LAS ESTRUCTURAS

Hipótesis

Tipología

Estructura de barras

Material

Homogéneo
Isótropo
Continuo
Simple
Elástico

Cinemática

Pequeños desplazamientos
Pequeñas deformaciones

Cargas

Aplicación Lenta

La velocidad con que se aplican las cargas sobre la estructura es suficientemente lenta como para que se puedan hacer los cálculos sin considerar al tiempo como una variable del problema.
No consideramos procesos dinámicos.

INTRODUCCIÓN

Estructuras Discretas y Continuas

Estructura Discretas

- Las estructuras discretas son las que están conformadas por un conjunto de elementos perfectamente diferenciados entre sí, que se encuentran unidos entre ellos por una serie de puntos.
- En las estructuras discretas se puede definir su configuración deformada en forma completa y exacta si conocemos los movimientos independientes de un conjunto finito de puntos de esa estructura.
- La solución del problema estructural implica resolver un SEL.

Estructura Continuas

- No es posible distinguir un conjunto finito de elementos estructurales para conformar una estructura continua.
- En las estructuras continuas no es posible definir en forma analítica, su configuración deformada en forma completa y exacta salvo para algunos casos particulares.
- La solución del problema estructural implica resolver un conjunto de ED.

INTRODUCCIÓN

Estructuras Discretas. Ejemplos

INTRODUCCIÓN. Estructuras Continuas. Ejemplos

CAPILLA DE BOSJES, WITZENBERG, SUDÁFRICA.

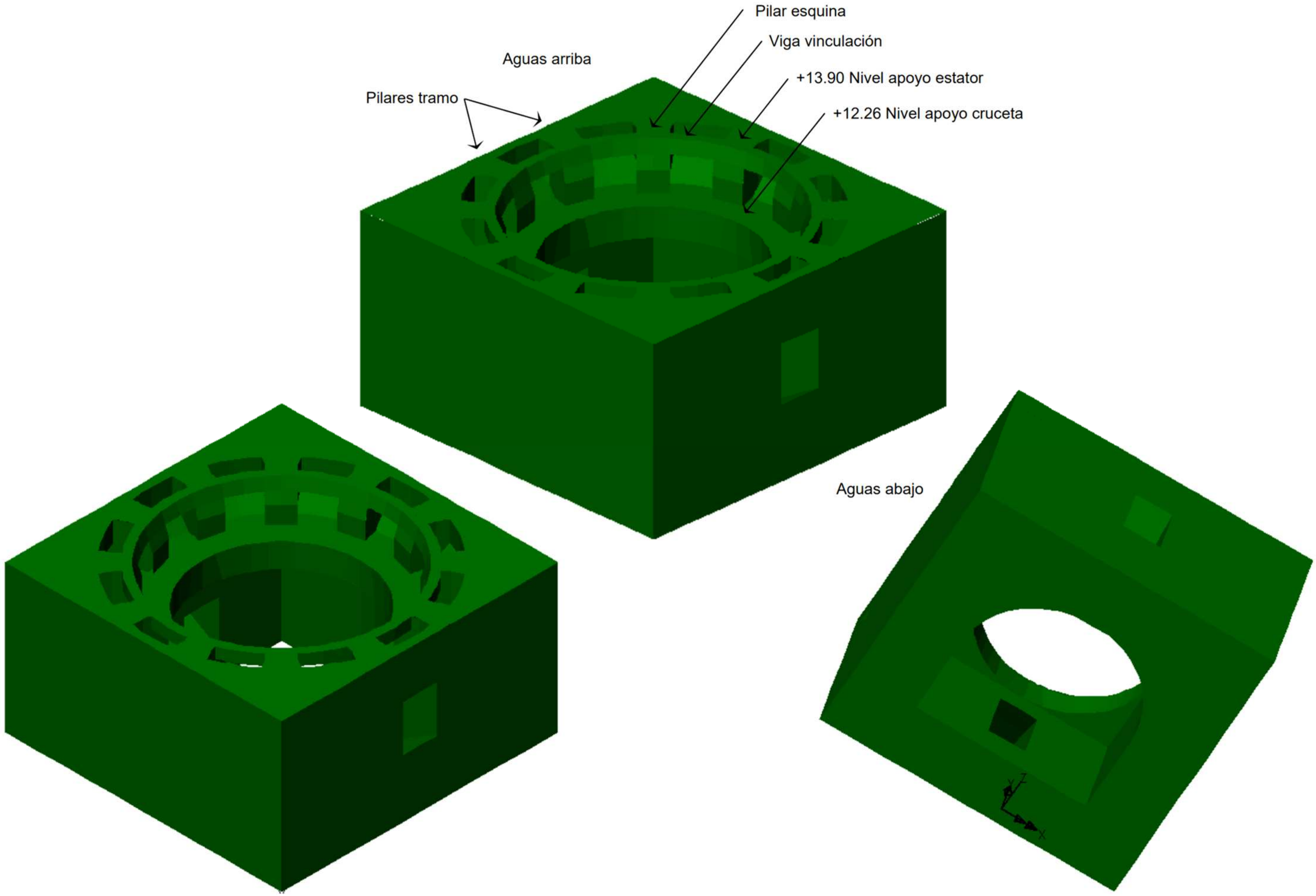
TWA FLIGHT CENTER, NY, USA.

INTRODUCCIÓN. Estructuras Continuas. Ejemplos

PRESA FUMADINHA BÓVEDAS MÚLTIPLES, PORTUGAL

INTRODUCCIÓN. Estructuras Continuas. Ejemplos

ESTRUCTURA DE FUNDACIÓN GENERADOR HIDROELECTRICO.

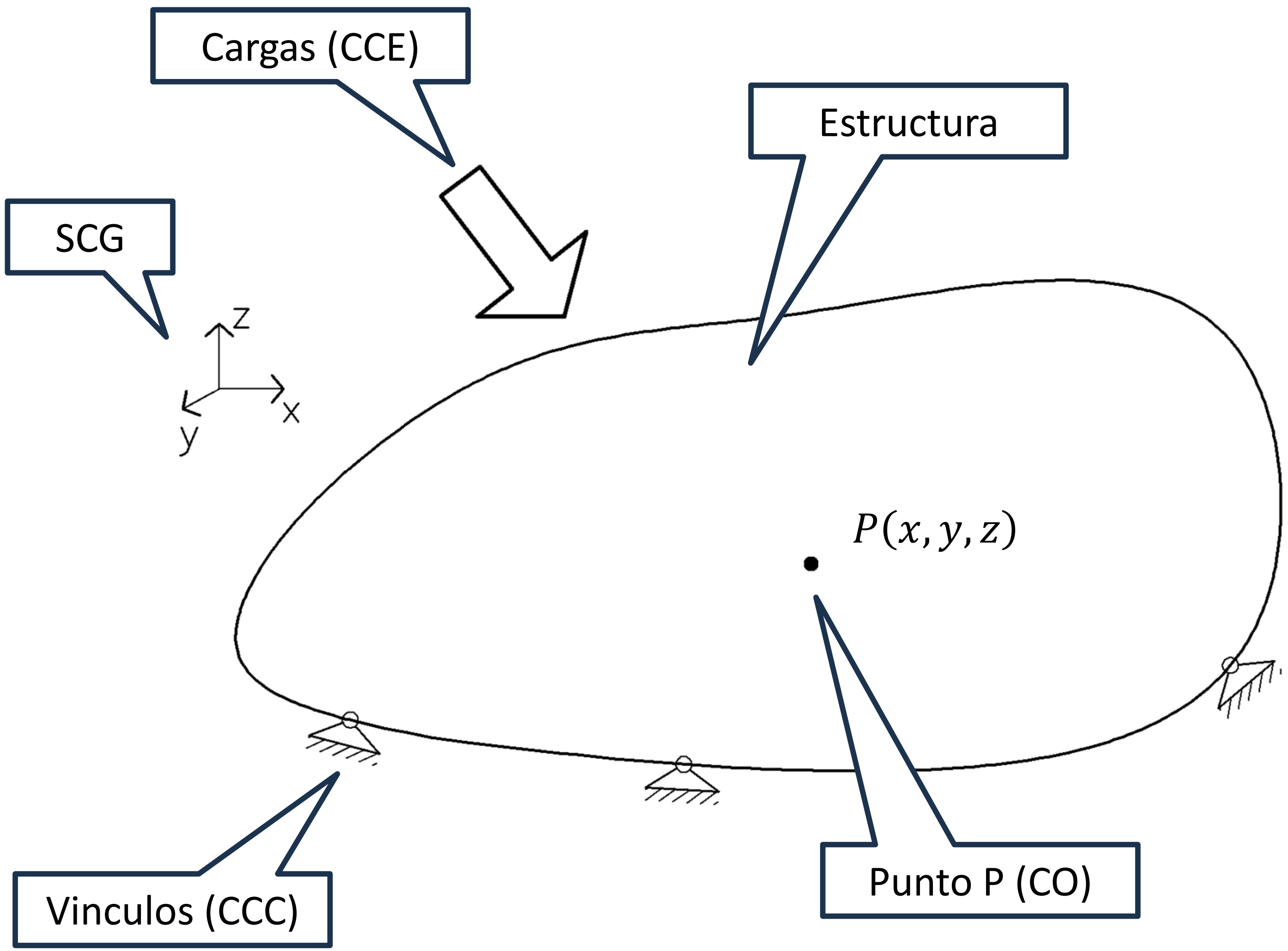


INTRODUCCIÓN

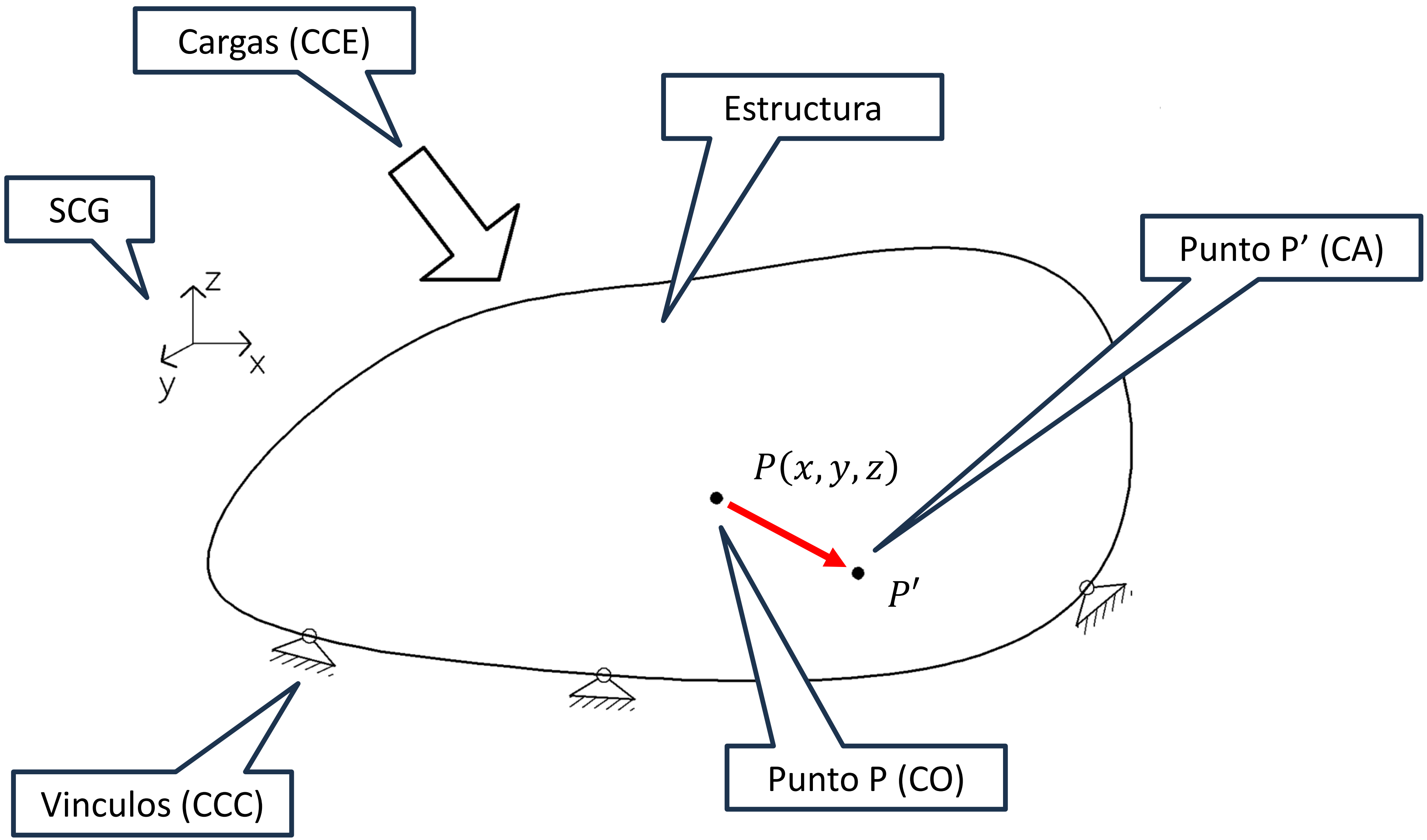
Estructuras Discretas y Continuas

- Vemos que en principio la diferencia entre estructuras discretas y continuas está relacionada a la geometría de estas.
- Mientras que las primeras están compuestas por un conjunto de elementos estructurales, en las segundas no es posible distinguir esos elementos.
- Pero en ambos casos necesitamos conocer los movimientos de sus puntos (configuración deformada) para poder resolver el problema estructural.
- Las estructuras continuas tienen infinitos puntos con movimientos desconocidos, por lo que tienen infinitos grados de libertad.
- Las estructuras continuas solo se pueden resolver analíticamente en casos de geometrías muy sencillas para condiciones de contorno simples. Implica resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales.
- Para resolver el problema se pueden usar técnicas de diferencias finitas.
- También se puede abordar el problema de manera aproximada mediante MEF.

INTRODUCCIÓN

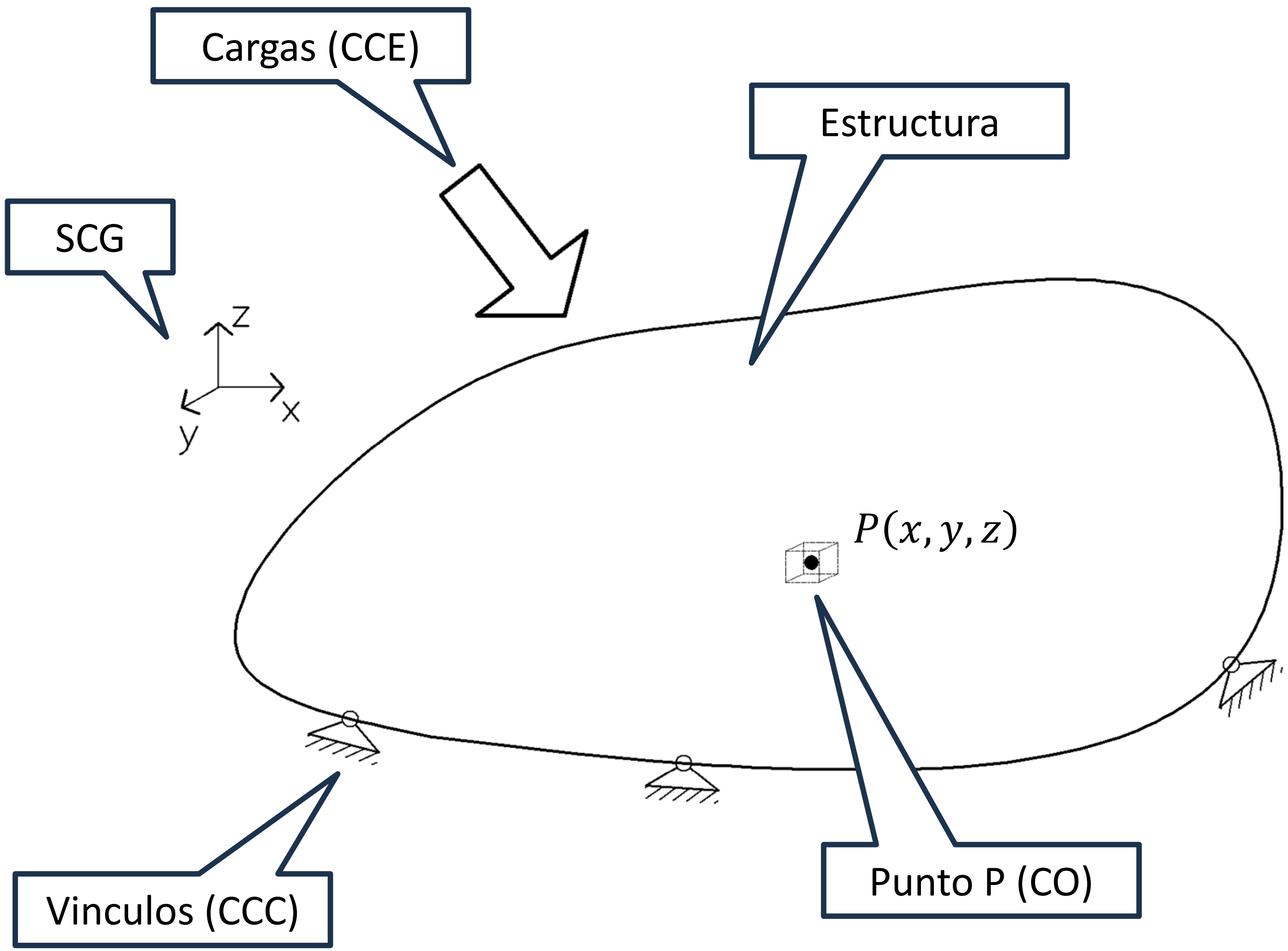


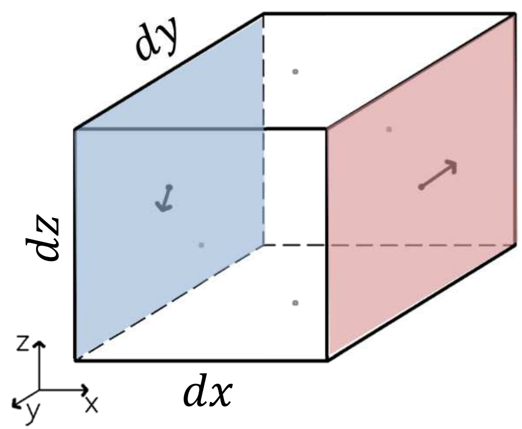
INTRODUCCIÓN



TENSIONES

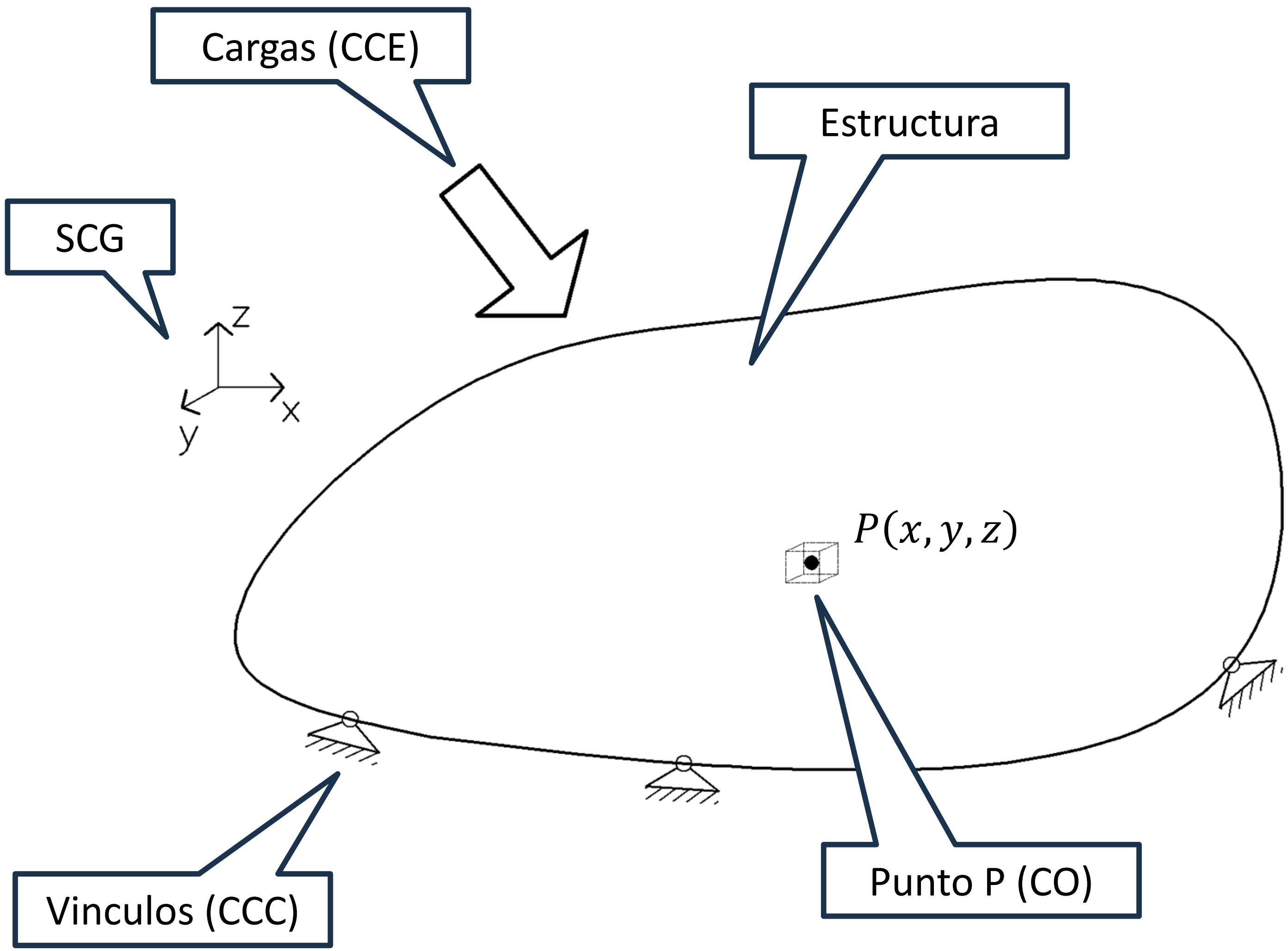
INTRODUCCIÓN

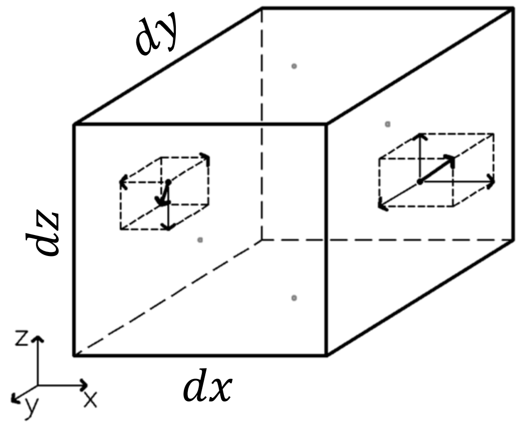




TENSIONES

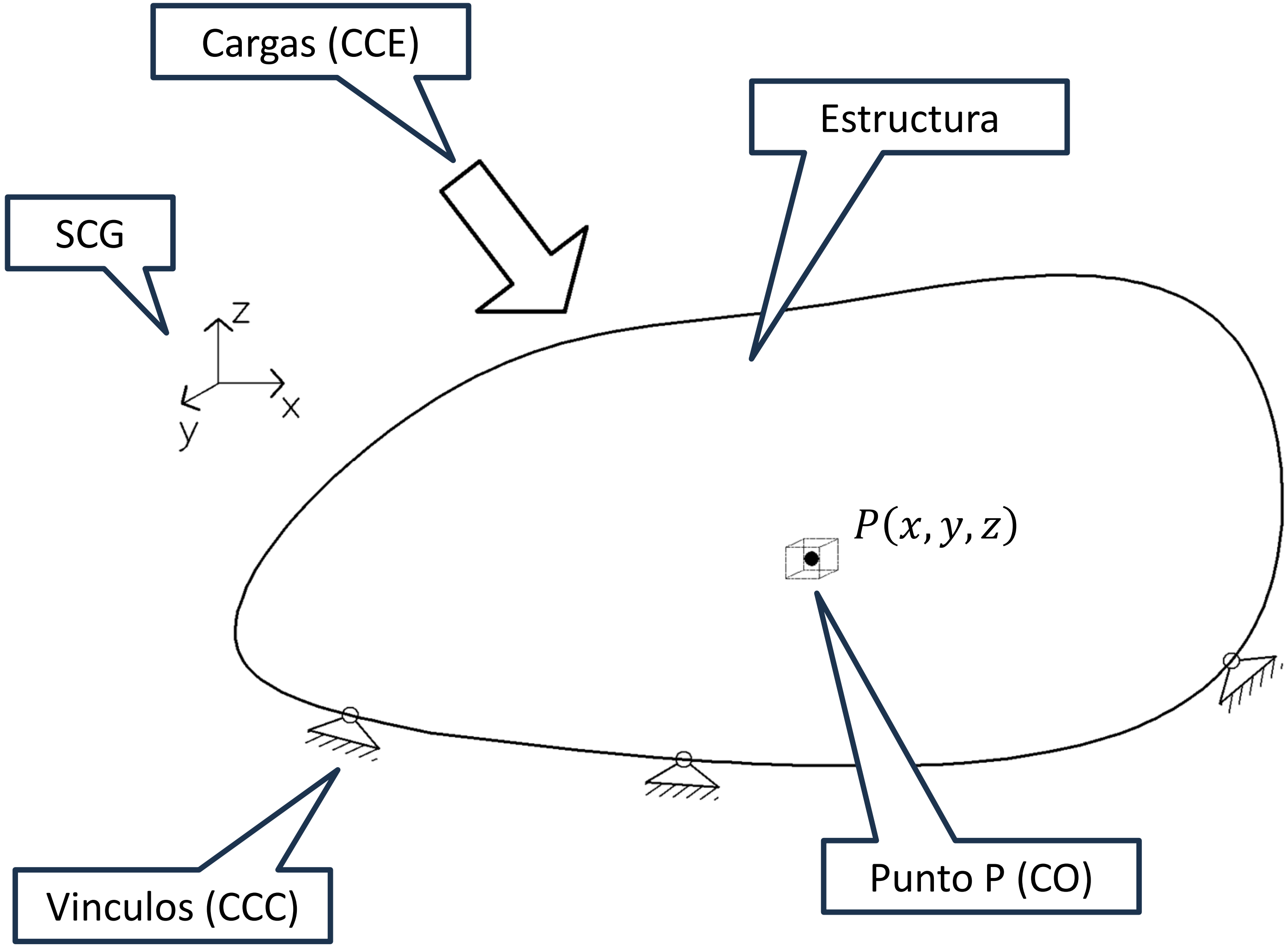
COMPONENTES

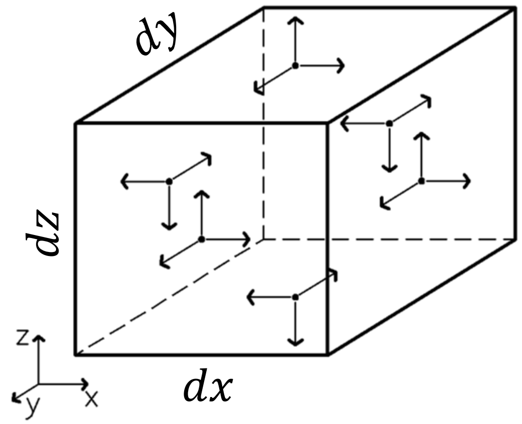




TENSIONES

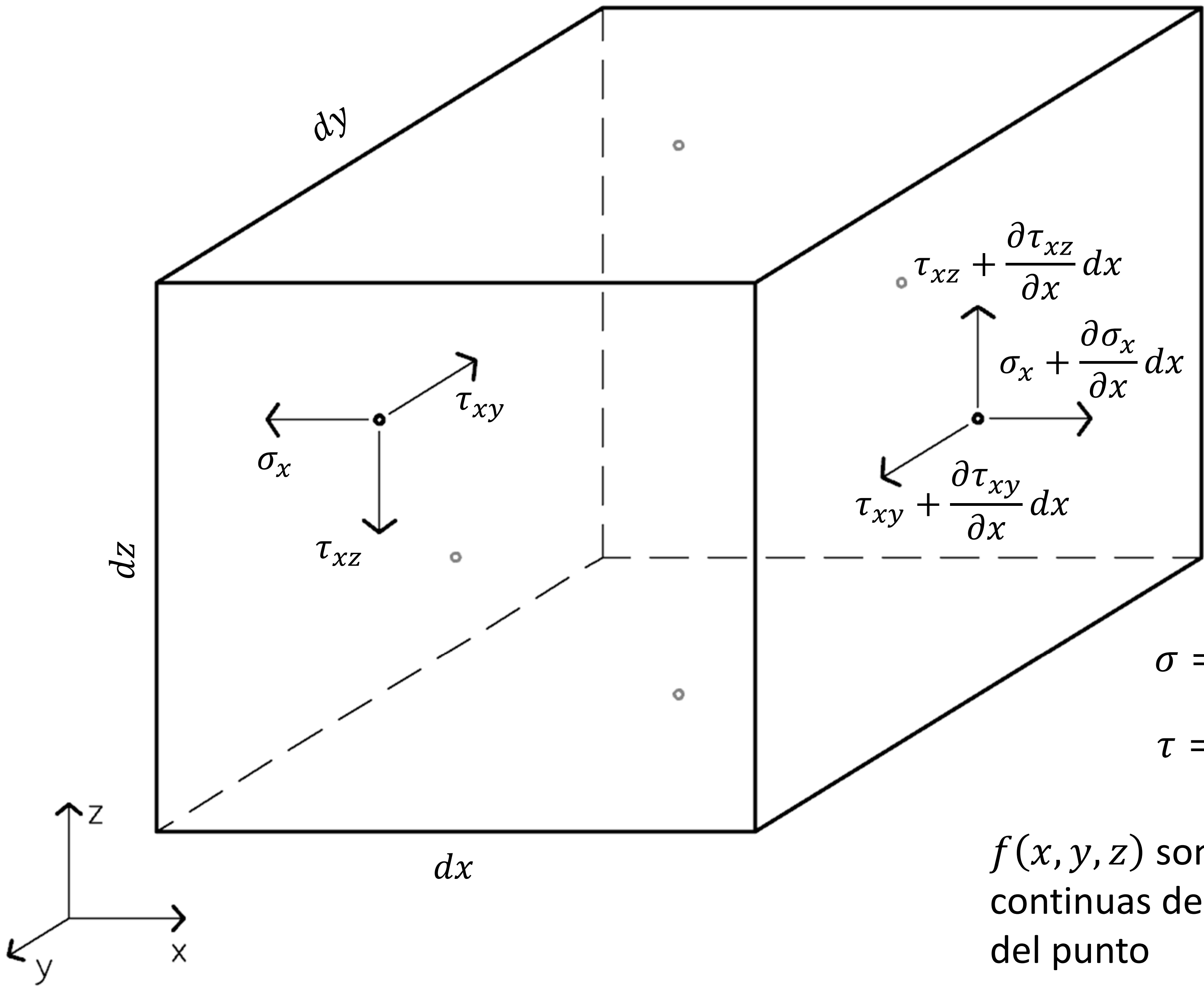
COMPONENTES





TENSIONES

COMPONENTES. Caras con n//X



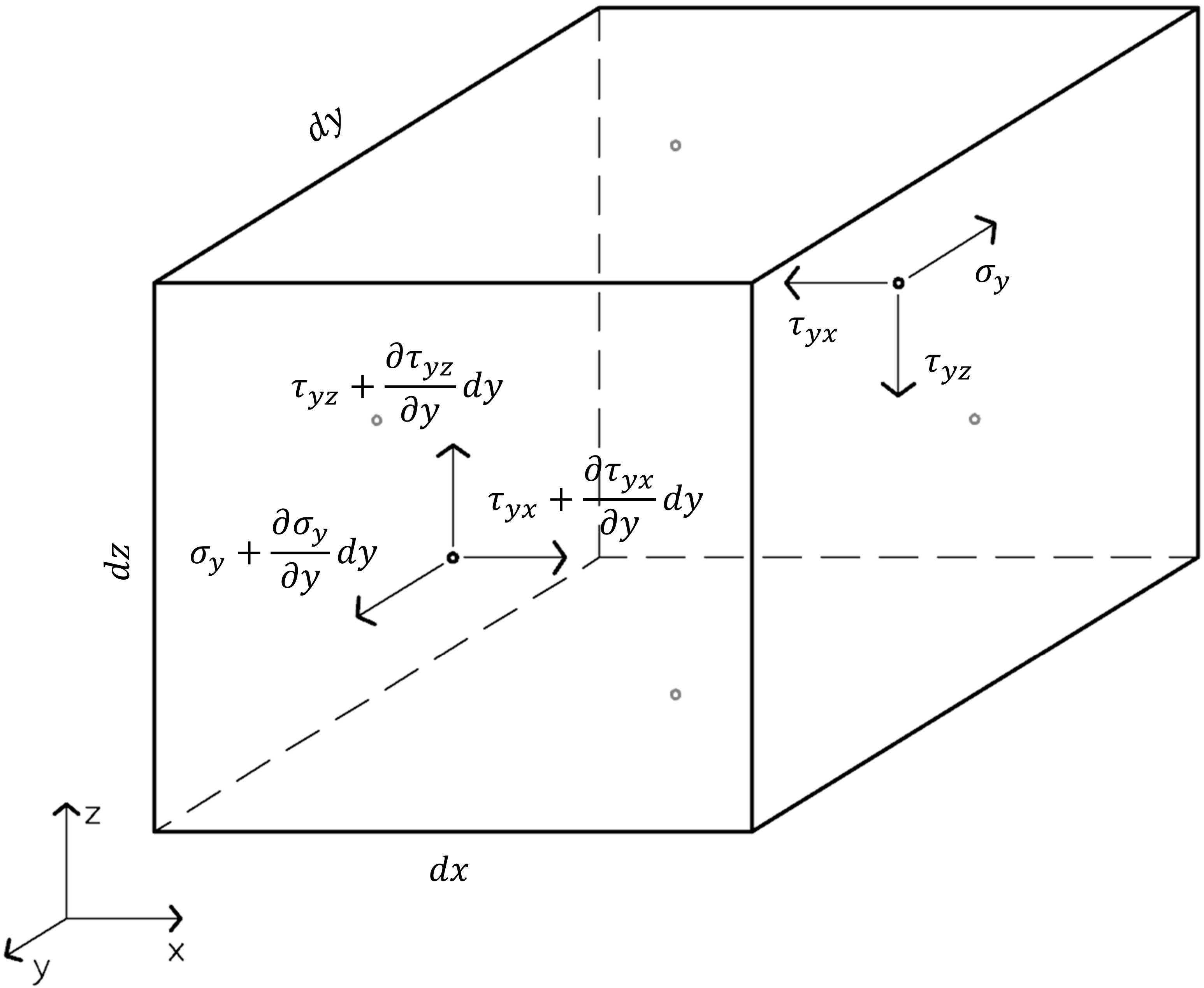
$$\sigma = f(x, y, z)$$

$$\tau = f(x, y, z)$$

$f(x, y, z)$ son funciones continuas de las coord. del punto

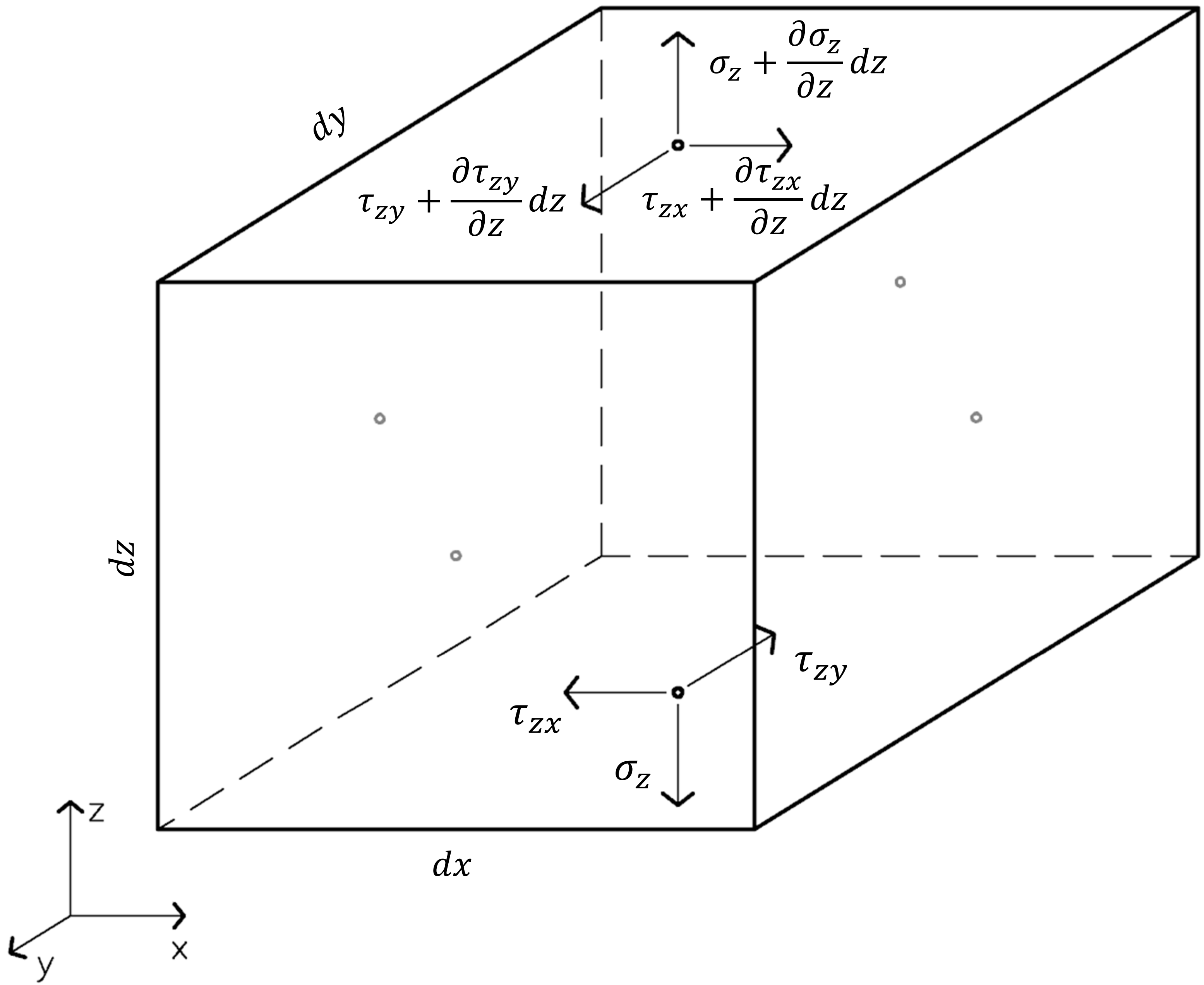
TENSIONES

COMPONENTES. Caras con n//Y



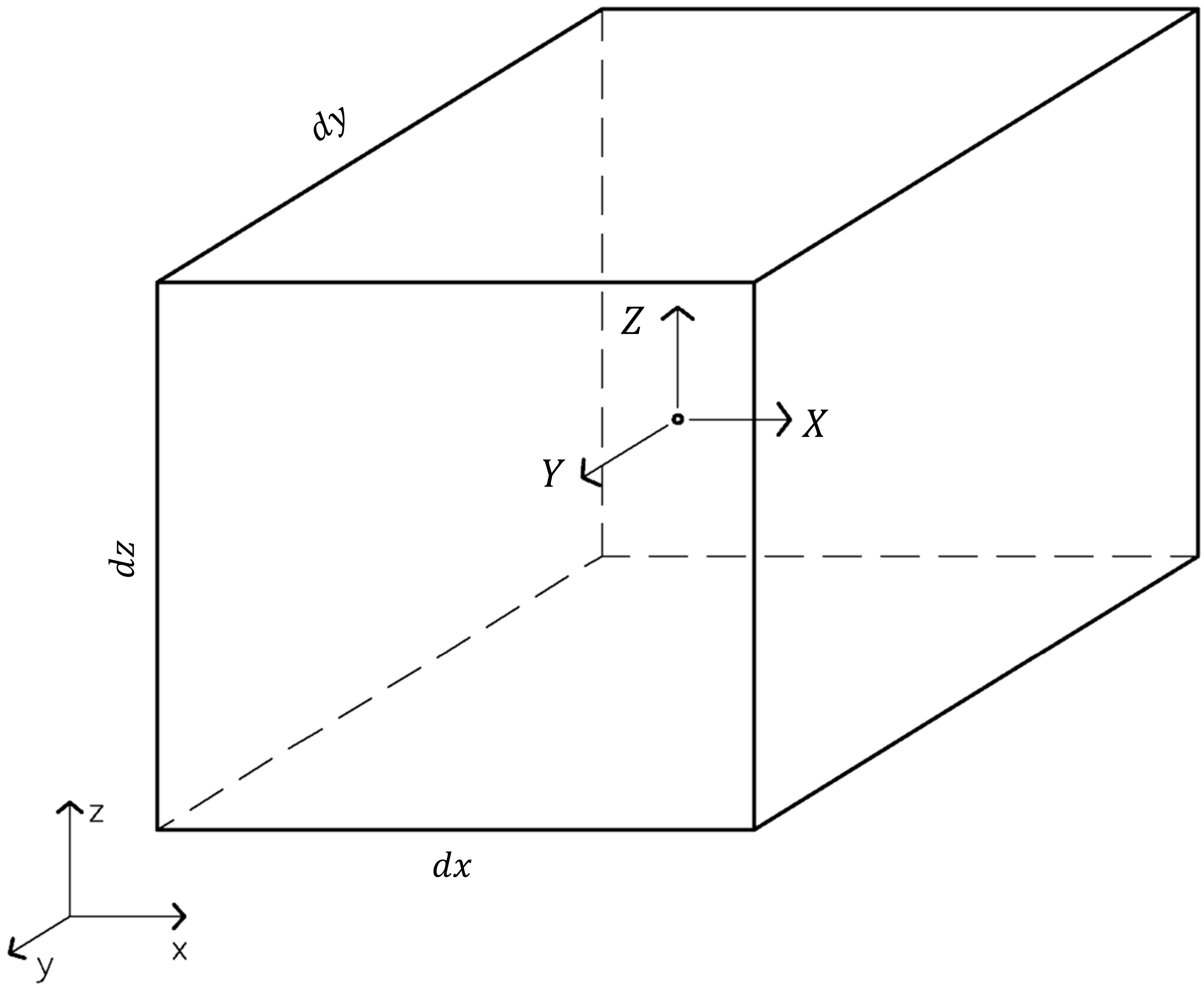
TENSIONES

COMPONENTES. Caras con n//Z



FUERZAS MASICAS

COMPONENTES

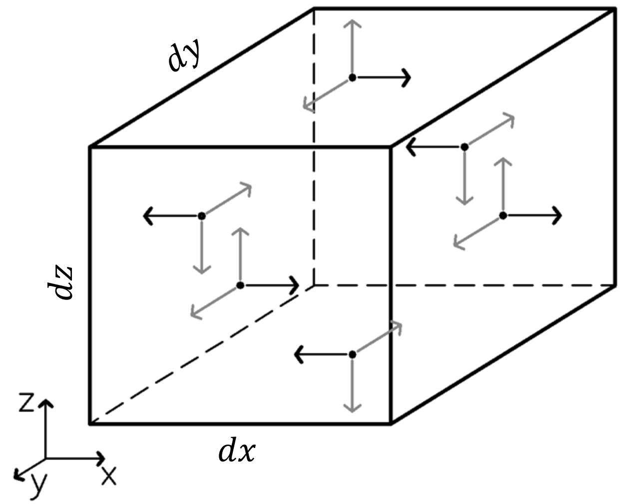


EQUILIBRIO INTERNO

Equilibrio en la Dirección X

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx}\right) dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx}\right) dxdy + Xdxdydz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\, dydz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\, dxdz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\, dxdy + X\, dxdydz = 0$$



Equilibrio en las Direcciones Y / Z

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\, dxdz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\, dydz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\, dxdy + Y\, dxdydz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\, dxdy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\, dydz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\, dxdz + Z\, dxdydz = 0$$

Ecuaciones de Equilibrio Interno

Planteando el equilibrio según los tres ejes del SCG, se obtienen tres ecuaciones diferenciales que se deben verificar en todos los puntos del interior del sólido cualquiera sea la dirección de los ejes del SCG.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

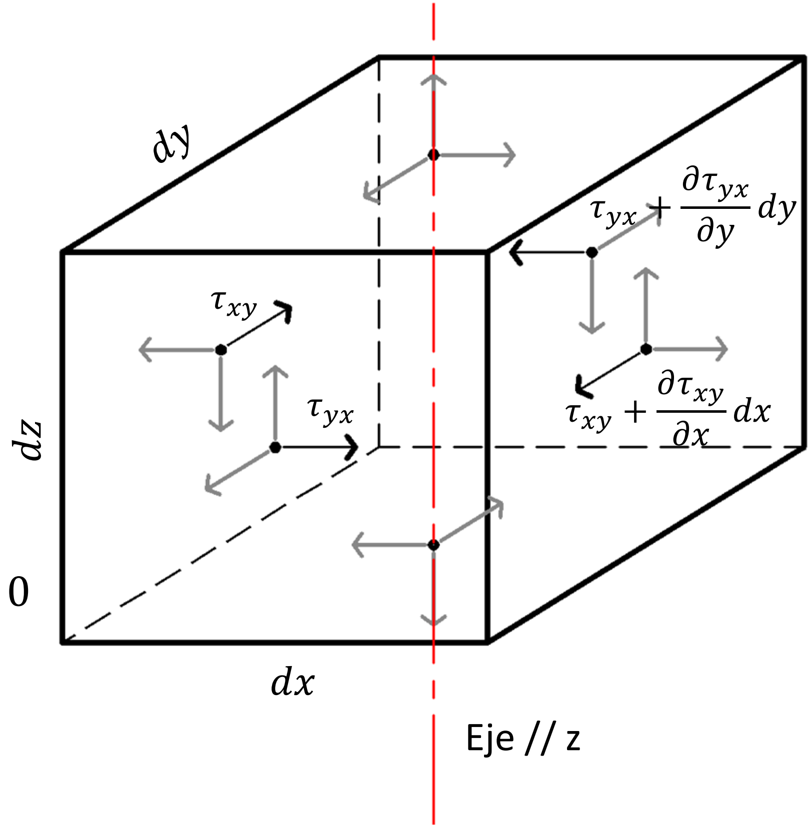
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

RECIPROCIDAD DE TENCIONES TANGENCIALES

Equilibrio de Momentos. Por ejemplo respecto a un eje //Z

$$\left[\tau_{xy} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right)\right] dydz\frac{dx}{2} +$$

$$-\left[\tau_{yx} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right)\right] dxdz\frac{dz}{2} = 0$$



$$\tau_{xy}dydz\frac{dx}{2} + \tau_{xy}dydz\frac{dx}{2} - \left[\tau_{yx}dxdz\frac{dz}{2} + \tau_{yx}dxdz\frac{dz}{2}\right] = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

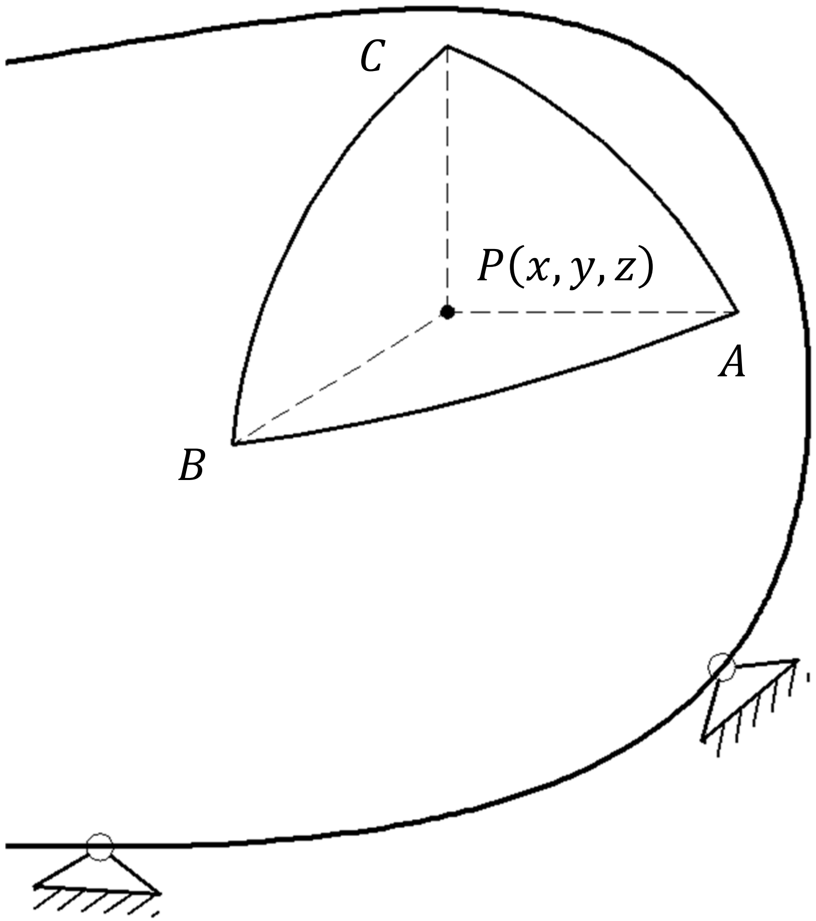
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

TETRAEDRO. ELEMENTOS

Consideramos un punto P en el interior del sólido, su posición queda definida por las coordenadas (x, y, z)



Por P pasan 3 planos // a los que pasan por el origen del SCG (⊥ a los ejes coordenados)

La intersección de esos planos con el contorno del sólido forma la superficie ABC

EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

TETRAEDRO. ELEMENTOS

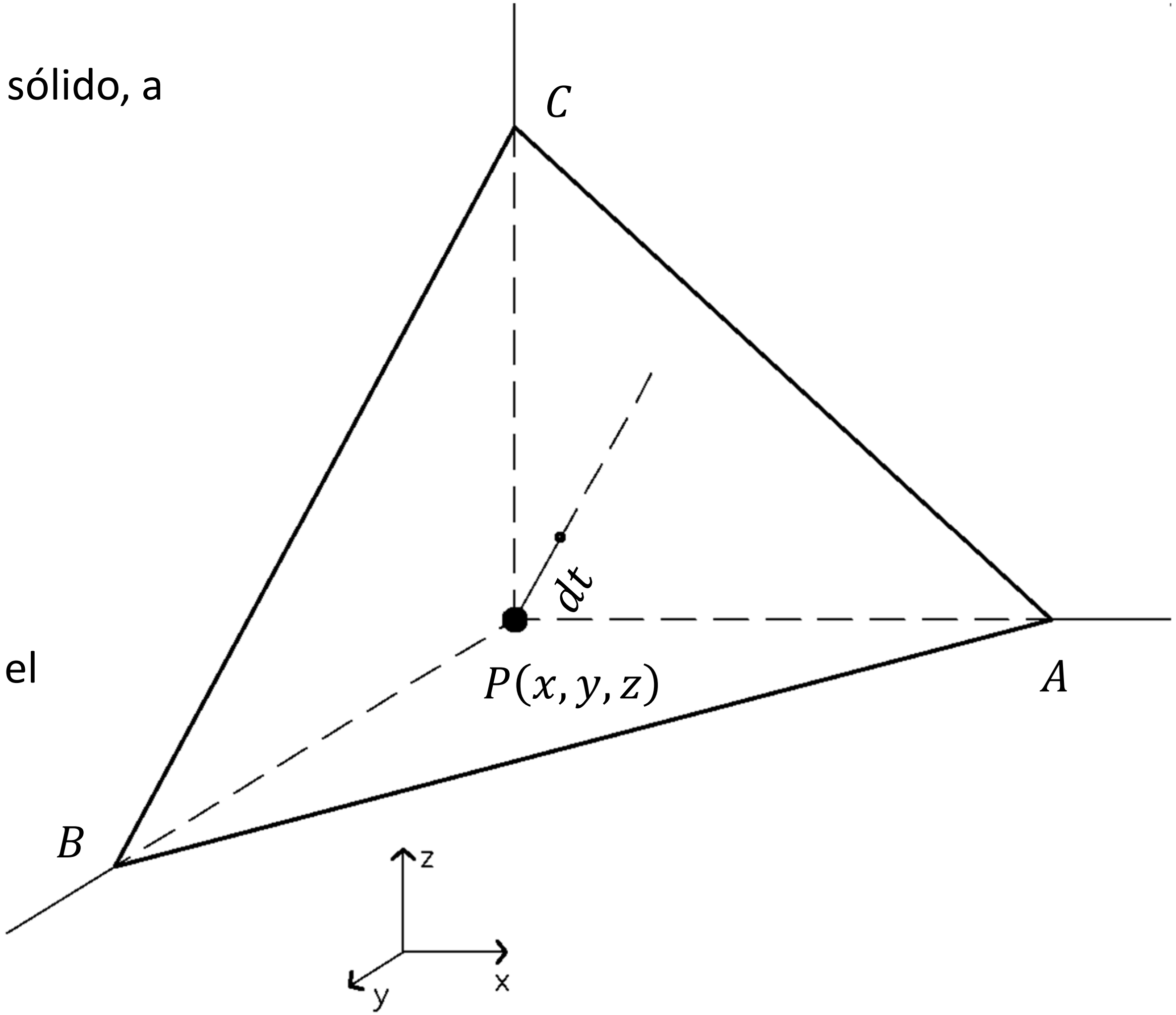
Ubicamos P próximo a la superficie del sólido, a una distancia dt

Cuando $dt \rightarrow 0$

dt: la distancia de la superficie ABC al punto P es infinitesimal

ABC: es una superficie infinitesimal en el contorno del sólido (también puede ser interior)

ABC: puede considerarse plana



EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

TETRAEDRO. ELEMENTOS

$\boldsymbol{n}$: normal al plano ABC por P

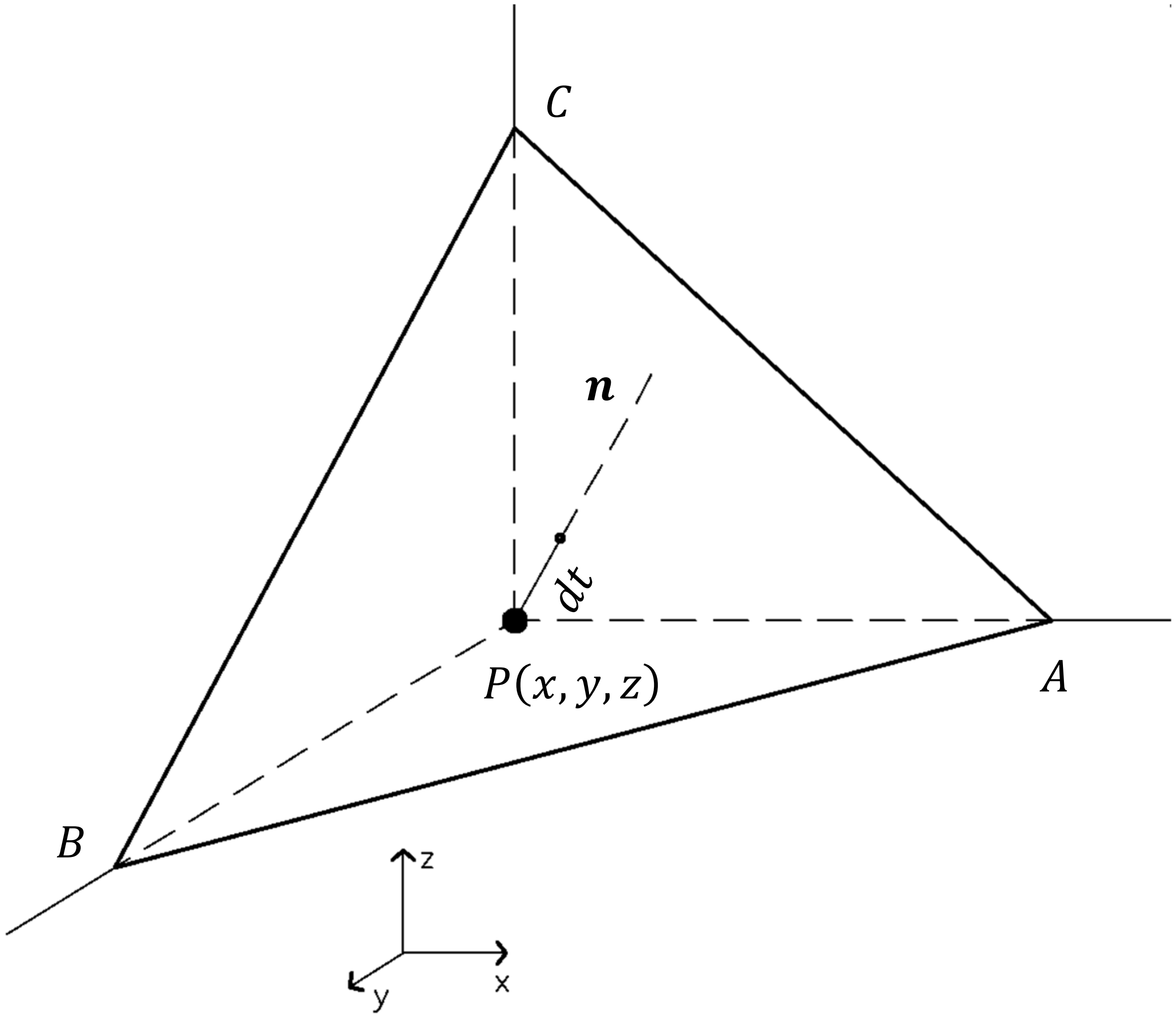
$\widehat{\boldsymbol{n}\,x} = \alpha \qquad \cos\alpha = l$
$\widehat{\boldsymbol{n}\,y} = \beta \qquad \cos\beta = m$
$\widehat{\boldsymbol{n}\,z} = \gamma \qquad \cos\gamma = n$

$Sup\ ABC = S$

$Sup\ BCP = l\,.S$

$Sup\ CAP = m\,.S$

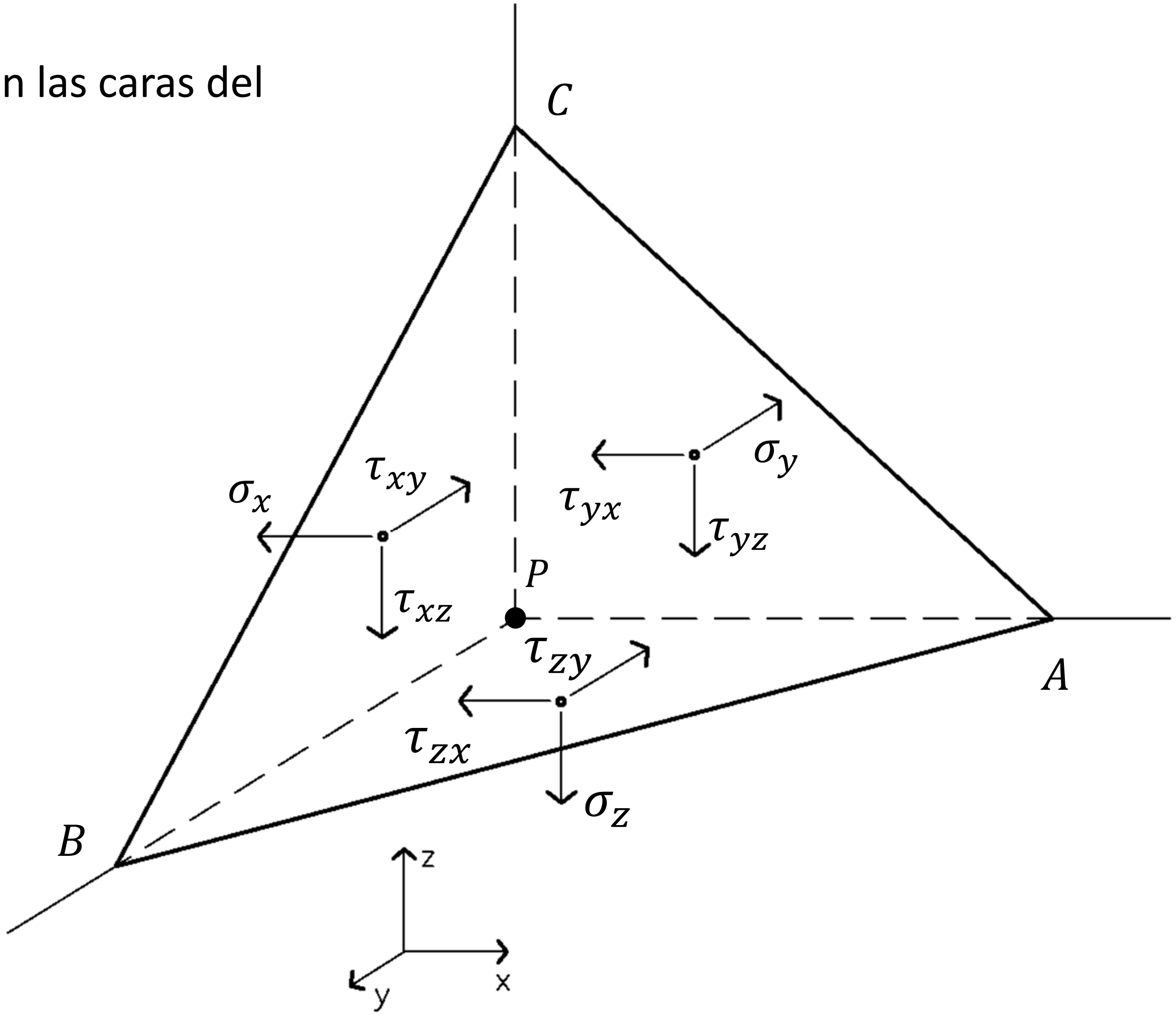
$Sup\ ABP = n\,.S$



EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

TETRAEDRO. TENSIONES

Suponemos conocidas las tensiones en las caras del tetraedro que pasan por el punto P

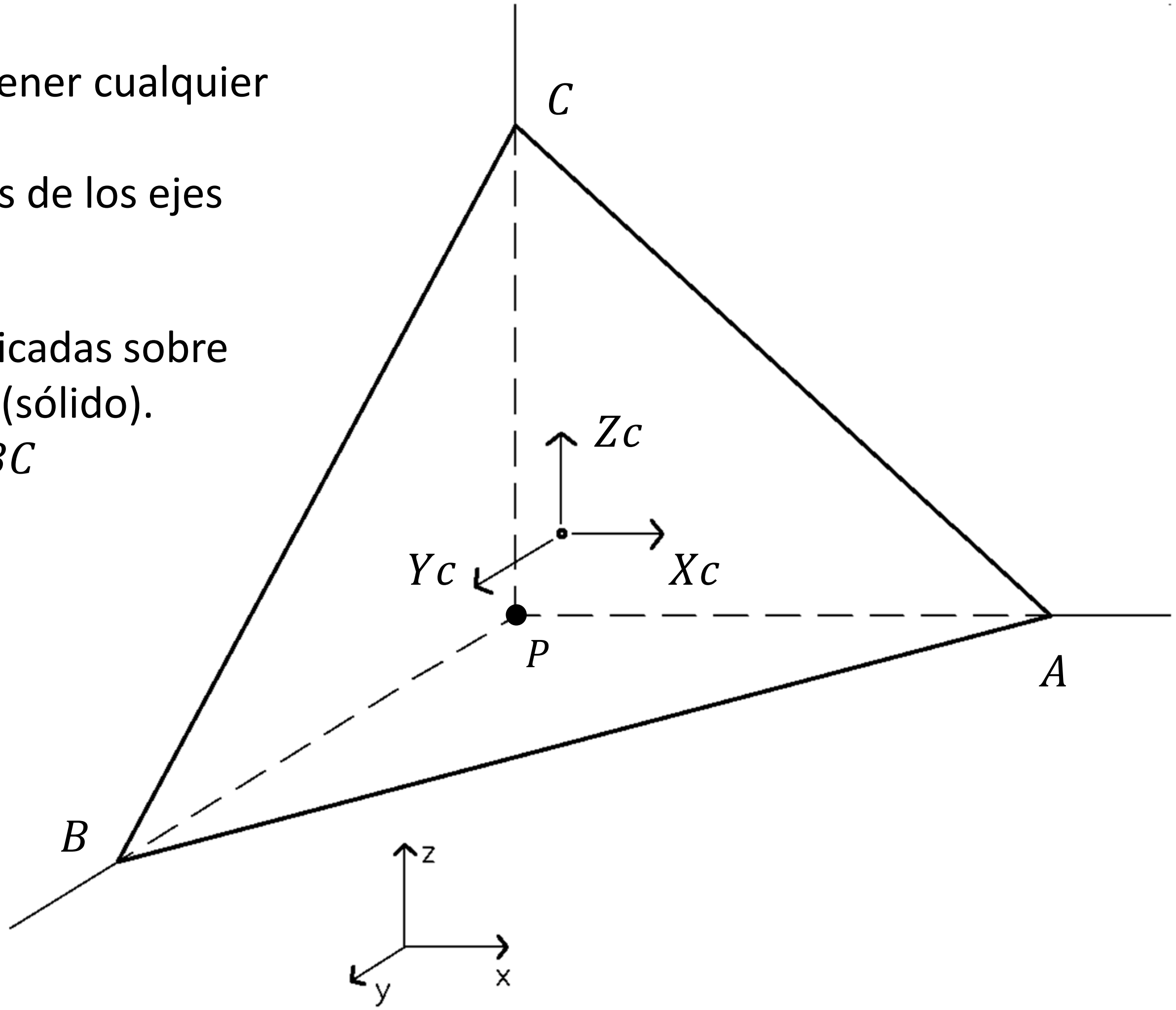


EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

TETRAEDRO. ACCIONES EN EL CONTORNO

Las acciones en el contorno pueden tener cualquier dirección y pueden proyectarse para descomponerlas según las direcciones de los ejes del SGC

Las acciones en el contorno están aplicadas sobre la superficie exterior de la estructura (sólido). Estan aplicadas sobre la superficie ABC



EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

Equilibrio en la Dirección X

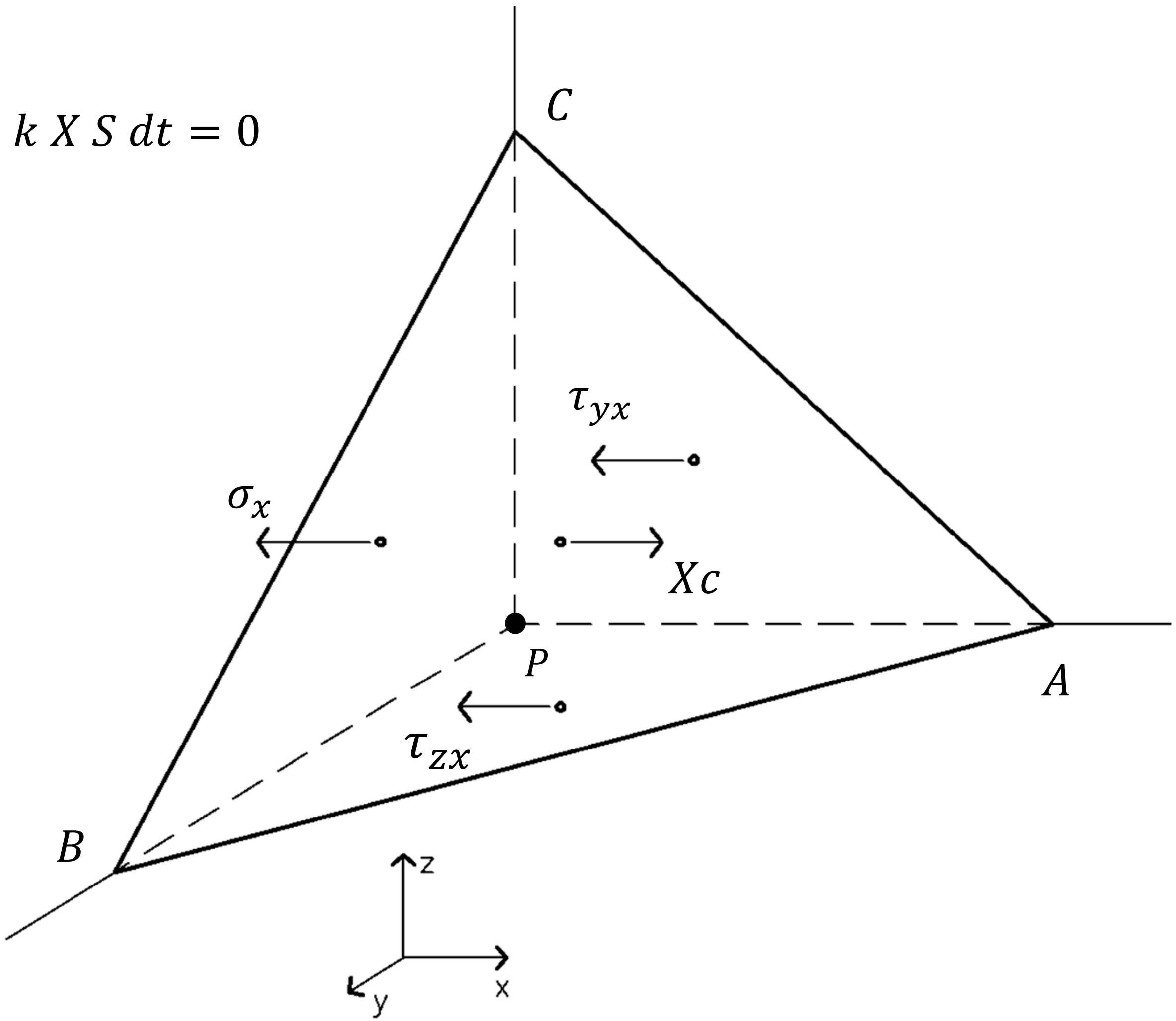
$$X_c\,S\ -\sigma_x\,l\,S\ -\tau_{yx}\,m\,S-\tau_{zx}\,n\,S+k\,X\,S\,dt=0$$

$$\sigma_x\,l+\tau_{yx}\,m+\sigma_{zx}\,n=X_c$$

Equilibrio en las Direcciones Y / Z

$$\tau_{xy}\,l+\sigma_y\,m+\tau_{zy}\,n=Y_c$$

$$\tau_{xz}\,l+\tau_{yz}\,m+\sigma_z\,n=Z_c$$



EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

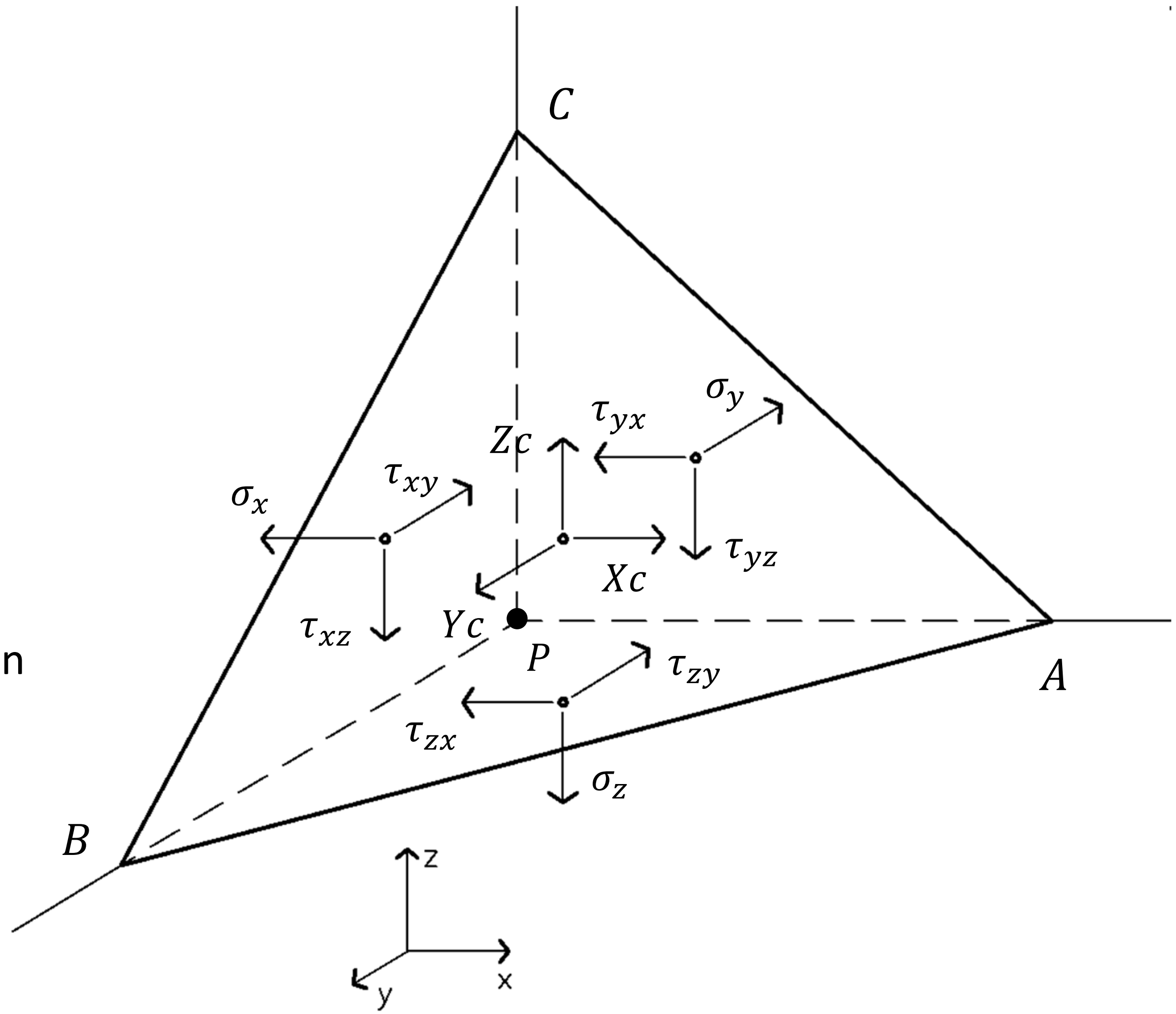
Ecuaciones de Equilibrio en el Contorno

$$\sigma_x \, l + \tau_{yx} \, m + \tau_{zx} \, n = X_c$$

$$\tau_{xy} \, l + \sigma_y \, m + \tau_{zy} \, n = Y_c$$

$$\tau_{xz} \, l + \tau_{yz} \, m + \sigma_z \, n = Z_c$$

Estas ecuaciones lineales en σ y τ, son válidas en el contorno, pero también son válidas en cualquier punto del interior del sólido



TENSIONES

Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

Vemos que tenemos 6 funciones incógnita (σ y τ).
Las tres ecuaciones diferenciales de las EEI, mas las tres ecuaciones lineales de las EEC, **no** son suficientes para determinar los valores de las funciones σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz}. Al tratarse de ecuaciones diferenciales, luego de integrarlas aparecerán funciones de integración desconocidas.

Pueden establecerse una infinidad de funciones de (x, y, z) para σ y τ , que satisfacen las condiciones de equilibrio mecánico en todos lo puntos, tanto del interior como de la superficie de la estructura, cuando actúan fuerzas de masa y de superficie.

Para resolver el problema y que la solución sea real, es necesario establecer las relaciones entre σ y τ, y las deformaciones que sufre la estructura debido al movimiento de los puntos que la componen.

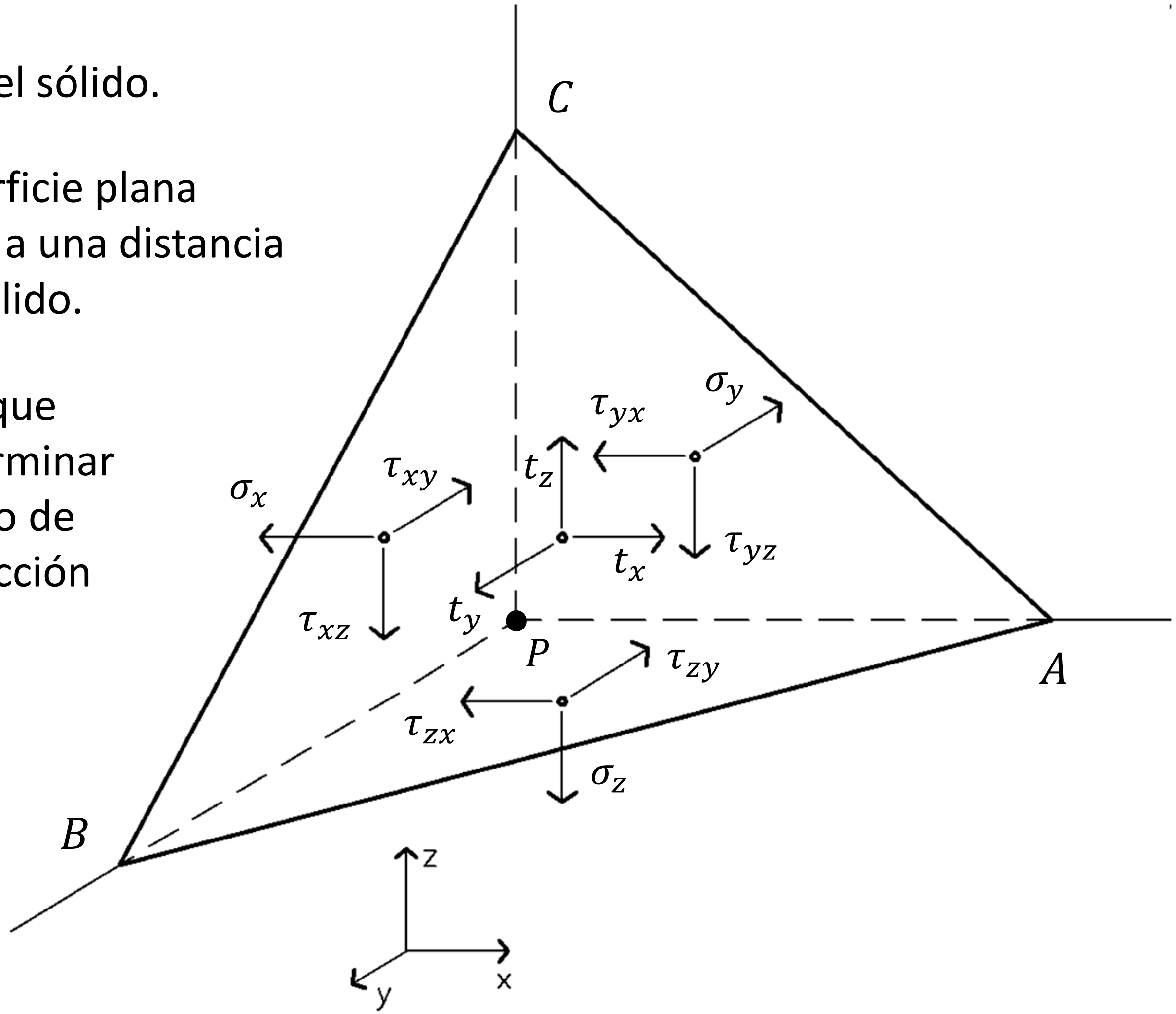
Antes de establecer esas relaciones debemos estudiar como varía las σ y τ cuando cambia la orientación del elemento de superficie sobre el que actúan.

Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

Las EEC valen también en el interior del sólido.

Consideremos un punto P y una superficie plana ABC orientada en cualquier dirección a una distancia infinitesimal de P, en el interior del sólido.

Conocidas las tensiones en el triedro que conforma el tetraedro, se puede determinar la tensión que actúa sobre el elemento de superficie orientado en cualquier dirección



$$t_x = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n$$

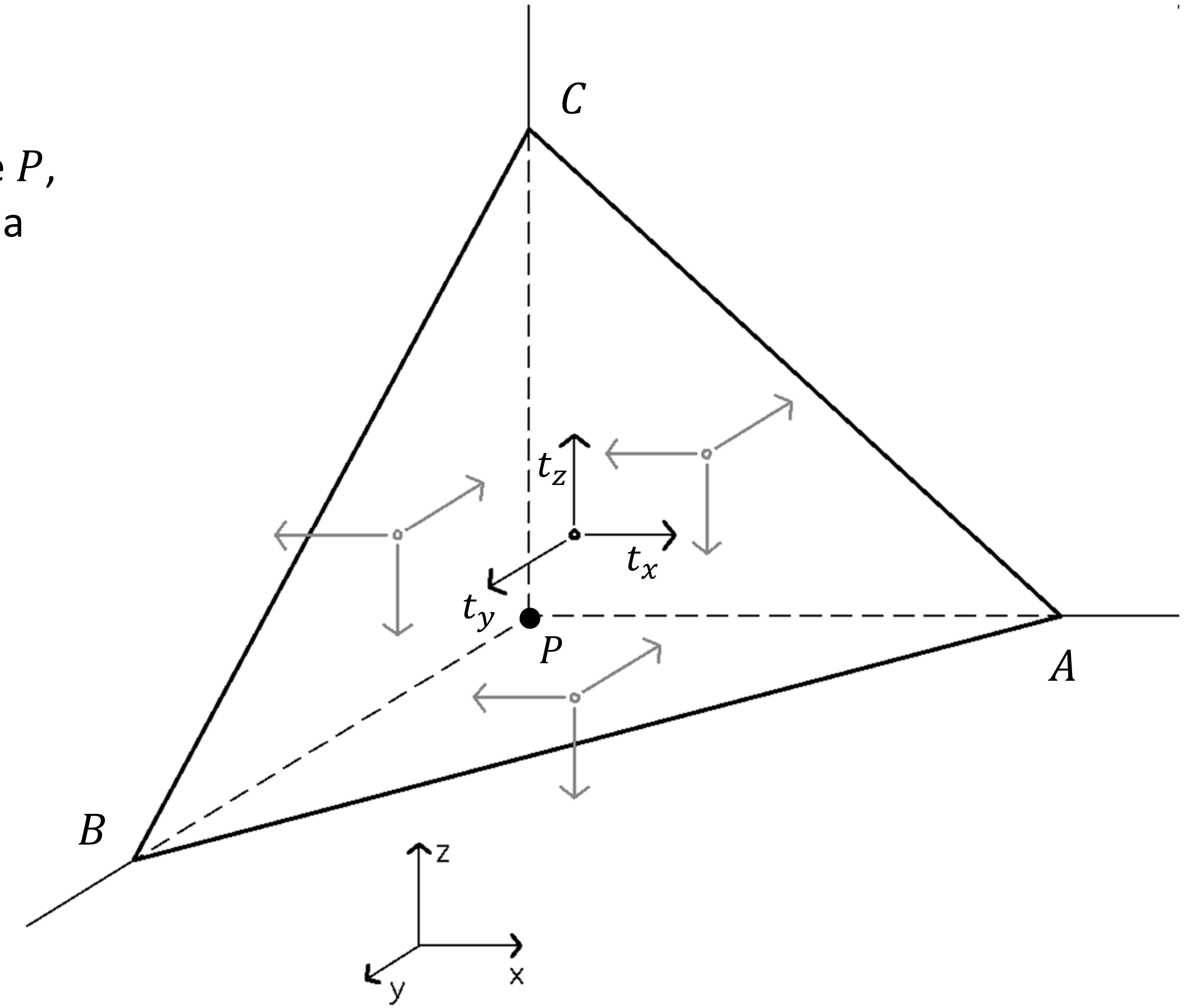
$$t_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n$$

$$t_z = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n$$

t_x , t_y , t_z : Son las componentes de la tensión total t que actúa sobre la superficie infinitesimal ABC

Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

Al variar la posición del elemento de superficie ABC, girando alrededor de P, cambian l, m y n, por lo que cambia la magnitud de t_x, t_y, y t_z



$$t_x = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n$$

$$t_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n$$

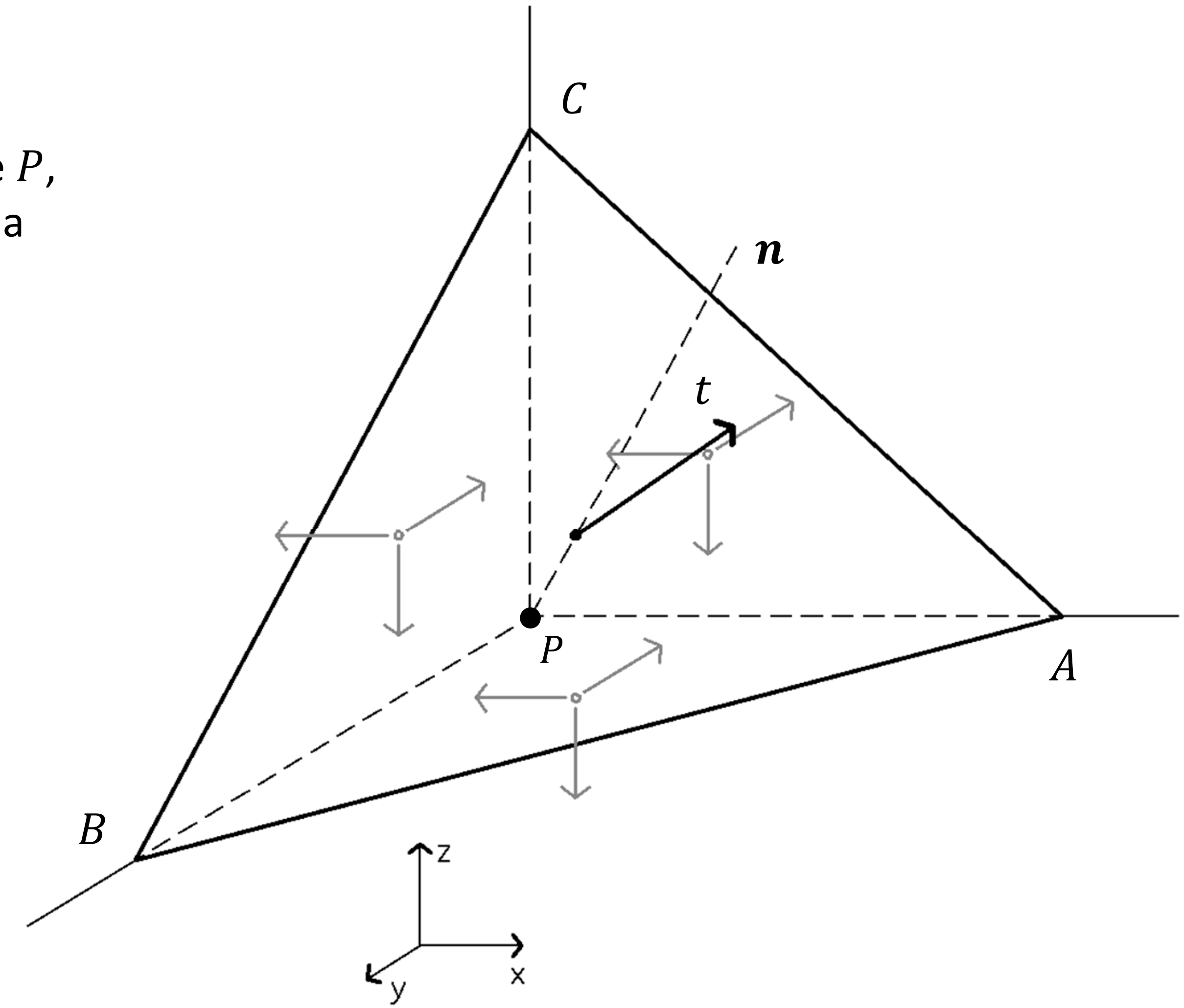
$$t_z = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n$$

Al componer t_x, t_y, y t_z, la tensión total t puede tener cualquier dirección respecto de la normal al plano ABC, definido por $\boldsymbol{n}$

TENSIONES

Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

Al variar la posición del elemento de superficie ABC, girando alrededor de P, cambian l, m y n, por lo que cambia la magnitud de t_x, t_y, y t_z



$$t_x = \sigma_x \, l + \tau_{yx} \, m + \tau_{zx} \, n$$

$$t_y = \tau_{xy} \, l + \sigma_y \, m + \tau_{zy} \, n$$

$$t_z = \tau_{xz} \, l + \tau_{yz} \, m + \sigma_z \, n$$

Al componer t_x, t_y, y t_z, la tensión total t puede tener cualquier dirección respecto de la normal al plano ABC, definido por $\boldsymbol{n}$

TENSIONES

Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

La tensión total t se puede descomponer en dos direcciones. Una normal al plano ABC y otra tangencial al mismo.

Ubicando al plano ABC de modo que $\boldsymbol{n}$ coincida con t, resulta: $\sigma = t,\ \tau = 0$

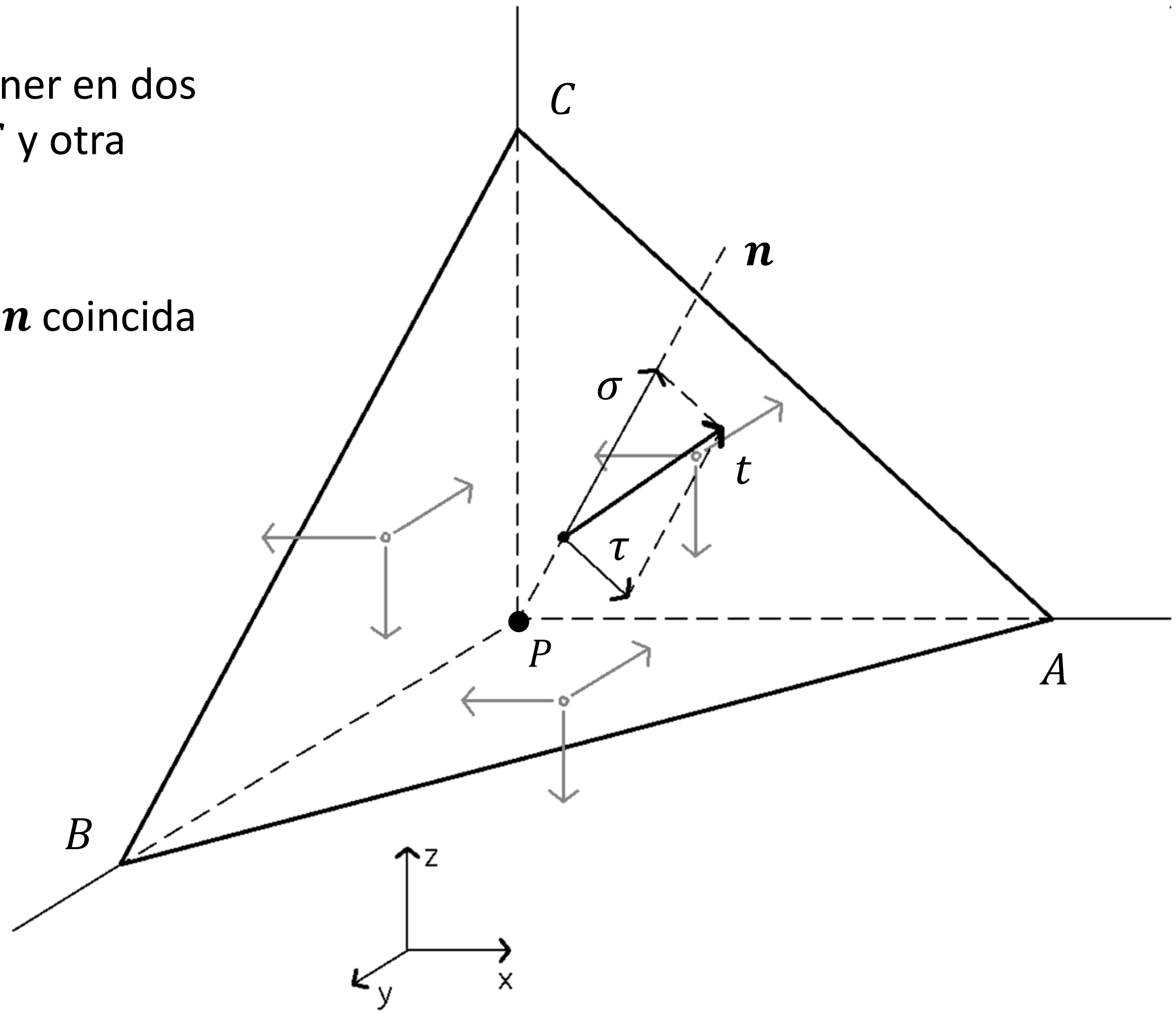
$$\sigma\, l = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n$$

$$\sigma\, m = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n$$

$$\sigma\, n = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n$$

Considerando que:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



Variación de Tensiones Alrededor de un Punto

La tensión total t se puede descomponer en dos direcciones. Una normal al plano ABC y otra tangencial al mismo.

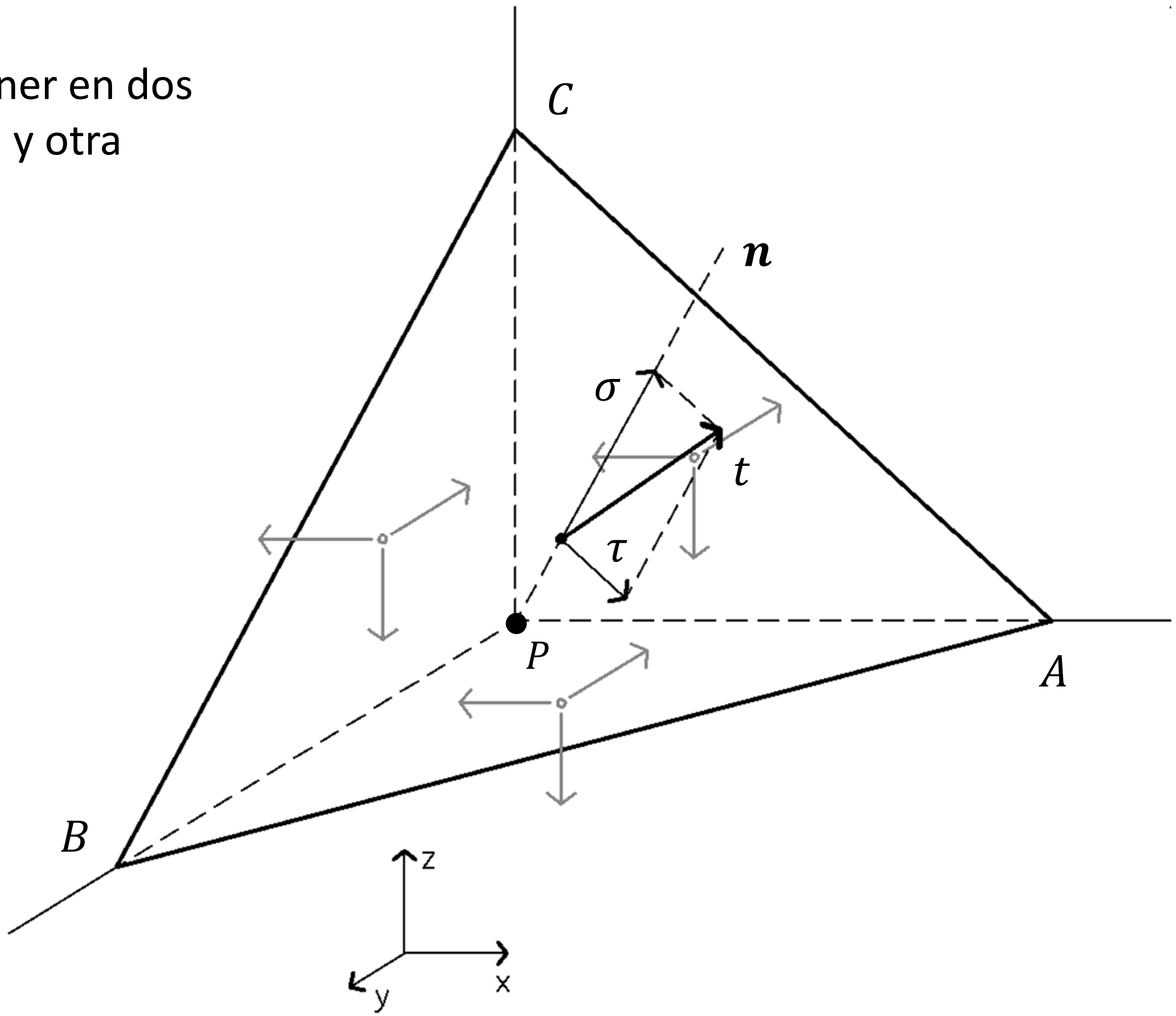
Se puede escribir

$$0 = (\sigma_x - \sigma)\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n$$

$$0 = \tau_{xy}\, l + \left(\sigma_y - \sigma\right) m + \tau_{zy}\, n$$

$$0 = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + (\sigma_z - \sigma)\, n$$

Que permite calcular l, m y n



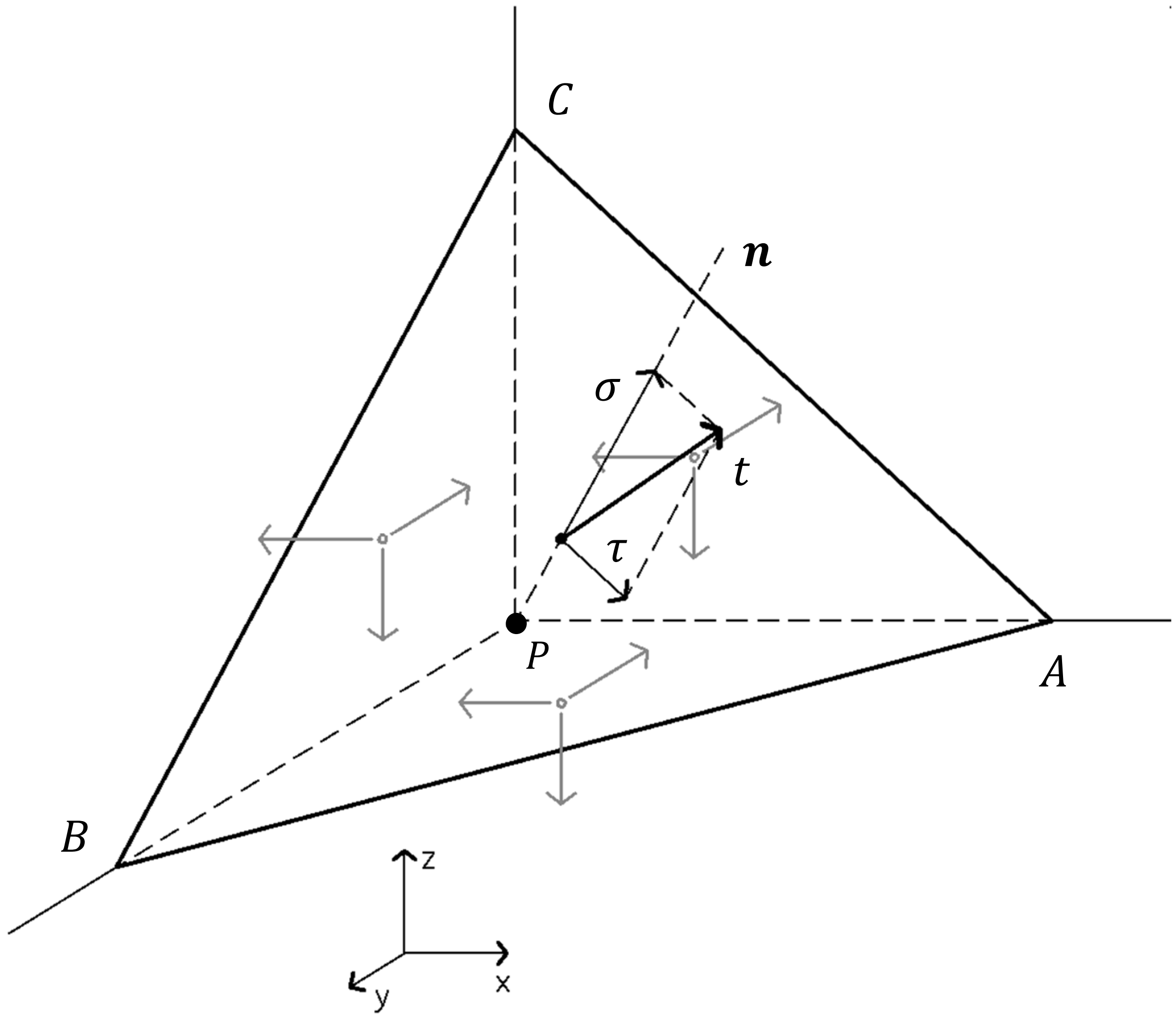
Para satisfacer el sistema homogéneo

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \sigma_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

TENSIONES

Tensiones Principales

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$



Es una ecuación de 3° en σ, con tres raíces reales, que nos permite calcular σ_I, σ_{II} y σ_{III}

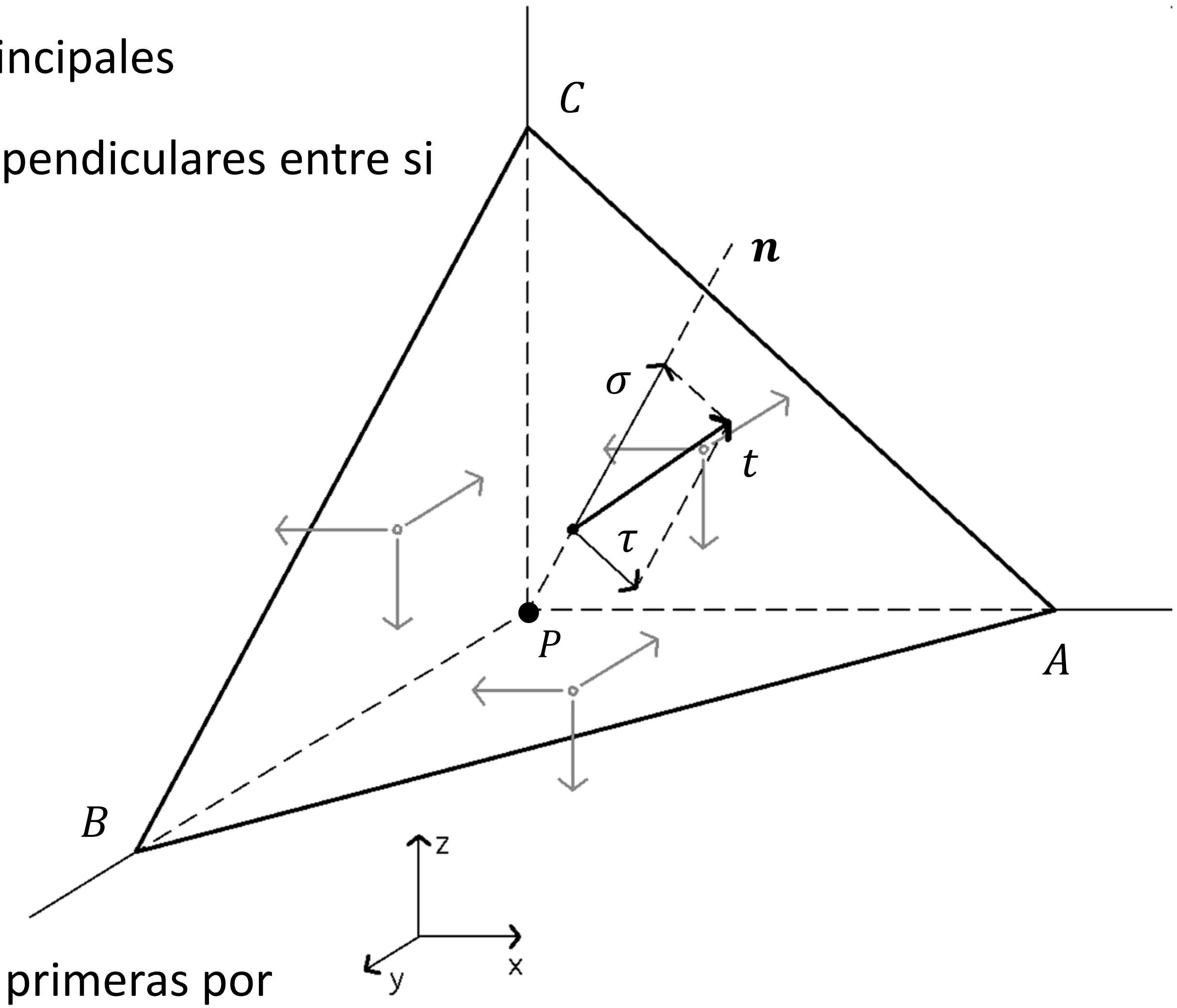
Con σ_I, σ_{II} y σ_{III} y la relación Pitagórica, podemos calcular tres ternas l, m, n, que nos dan la posición de tres planos donde solo existen tensiones normales

$\boldsymbol{\sigma_I}$**,** $\boldsymbol{\sigma_{II}}$ **y** $\boldsymbol{\sigma_{III}}$ son las Tensiones Principales

Tensiones Principales

σ_I, σ_{II} y σ_{III} son las Tensiones Principales

Se puede demostrar que son perpendiculares entre si



$$\sigma_I\, l_I = \sigma_x\, l_I + \tau_{yx}\, m_I + \tau_{zx}\, n_I$$

$$\sigma_I\, m_I = \tau_{xy}\, l_I + \sigma_y\, m_I + \tau_{zy}\, n_I$$

$$\sigma_I\, n_I = \tau_{xz}\, l_I + \tau_{yz}\, m_I + \sigma_z\, n_I$$

$$\sigma_{II}\, l_{II} = \sigma_x\, l_{II} + \tau_{yx}\, m_{II} + \tau_{zx}\, n_{II}$$

$$\sigma_{II}\, m_{II} = \tau_{xy}\, l_{II} + \sigma_y\, m_{II} + \tau_{zy}\, n_{II}$$

$$\sigma_{II}\, n_{II} = \tau_{xz}\, l_{II} + \tau_{yz}\, m_{II} + \sigma_z\, n_{II}$$

Multiplicando y sumando las tres primeras por l_{II}, m_{II}, n_{II}, luego multiplicando y sumando las tres últimas por l_I, m_I, n_I, y restado

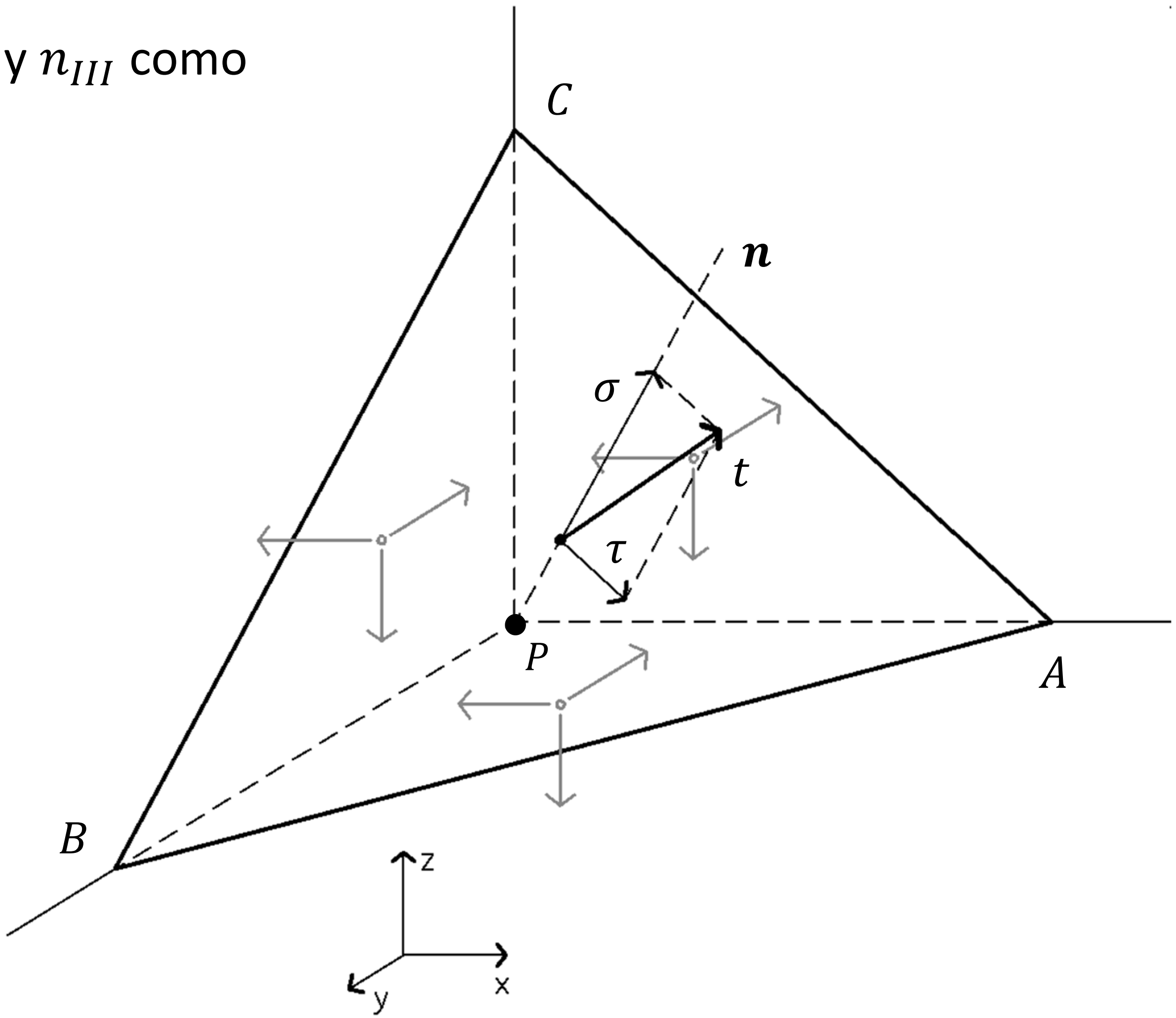
$(\sigma_I - \sigma_{II})\,(l_I\ l_{II} + m_I\, m_{II} + n_I\, n_{II}) = 0 \ \rightarrow\ \sigma_I$ y σ_{II} son perpendiculares entre sí.

TENSIONES

Elipsoide de Tensiones

Adoptando las direcciones n_I, n_{II} y n_{III} como ejes coordenados del SCG

Las $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$



$t_x = \sigma_I \, l$

$t_y = \sigma_{II} \, m$

$t_z = \sigma_{III} \, n$

Considerando que:

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\frac{\boldsymbol{t_x}^2}{\boldsymbol{\sigma_I}^2} + \frac{\boldsymbol{t_y}^2}{\boldsymbol{\sigma_{II}}^2} + \frac{\boldsymbol{t_z}^2}{\boldsymbol{\sigma_{III}}^2} = \mathbf{1}$$

Ecuación que representa el Elipsoide de Tensiones

TENSIONES

Tensiones Tangenciales

La tensión total t se puede calcular como

$$t = \sqrt{{t_x}^2 + {t_y}^2 + {t_z}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

$$t_x = \sigma_I\, l,\ t_y = \sigma_{II}\, m,\ t_z = \sigma_{III}\, n$$

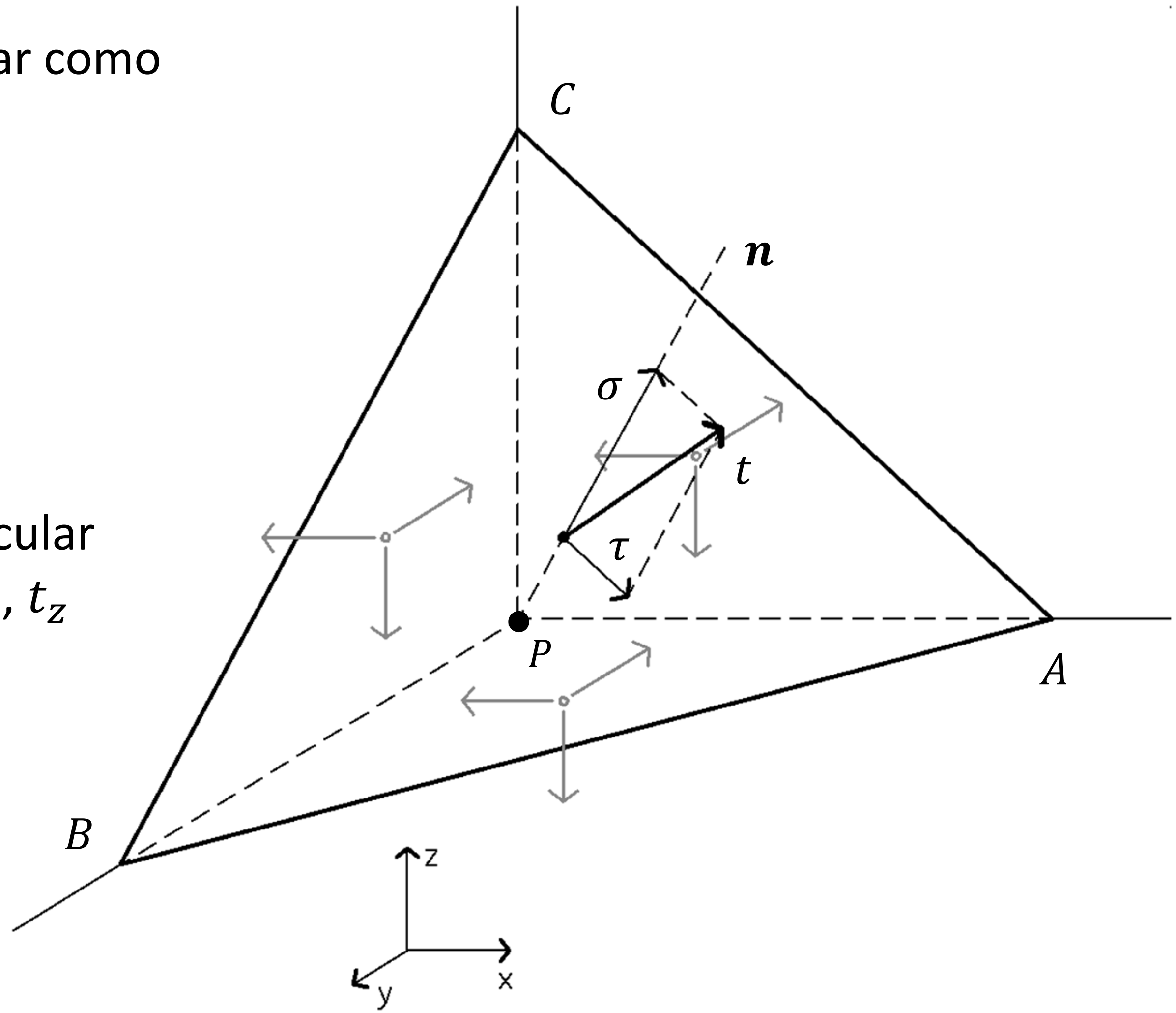
$$t = \sqrt{{\sigma_I}^2 l^2 + {\sigma_{II}}^2 m^2 + {\sigma_{III}}^2 n^2}$$

La tensión normal σ se puede calcular como la suma de la proy de t_x, t_y, t_z

$$\sigma = t_x\, l + t_y\, m + t_z\, n$$

$$\sigma = \sigma_I\, l^2 + \sigma_{II}\, m^2 + \sigma_{III}\, n^2$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2}$$



TENSIONES

Tensiones Tangenciales

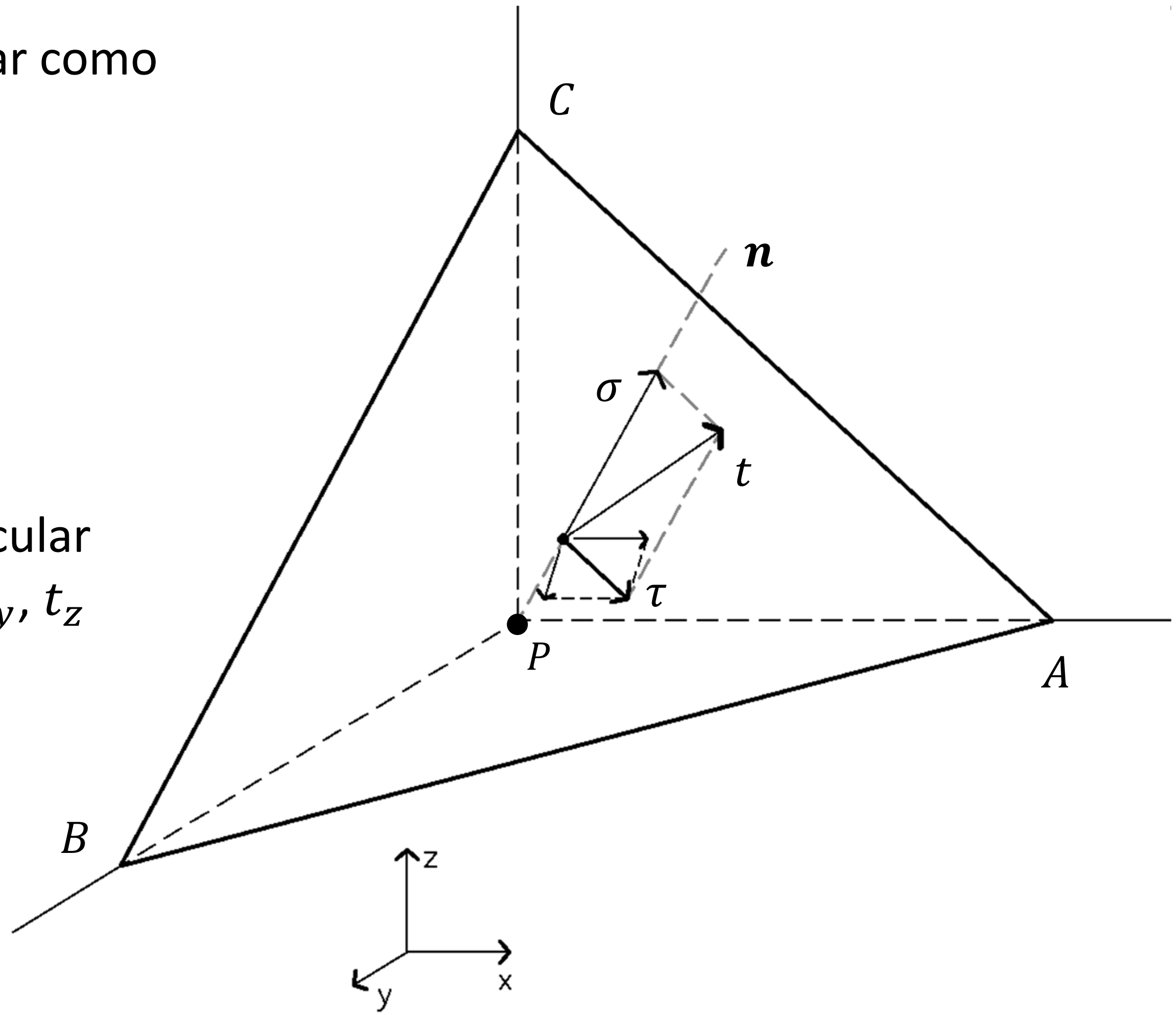
La tensión total t se puede calcular como

$$t = \sqrt{{t_x}^2 + {t_y}^2 + {t_z}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

$$t_x = \sigma_I\, l,\ t_y = \sigma_{II}\, m,\ t_z = \sigma_{III}\, n$$

$$t = \sqrt{{\sigma_I}^2 l^2 + {\sigma_{II}}^2 m^2 + {\sigma_{III}}^2 n^2}$$

La tensión normal σ se puede calcular como la suma de las proy de t_x, t_y, t_z



$$\sigma = t_x\, l + t_y\, m + t_z\, n$$

$$\sigma = \sigma_I\, l^2 + \sigma_{II}\, m^2 + \sigma_{III}\, n^2$$

$$\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2}$$

$$\tau = \sqrt{{\sigma_I}^2 l^2 + {\sigma_{II}}^2 m^2 + {\sigma_{III}}^2 n^2 - (\sigma_I\, l^2 + \sigma_{II}\, m^2 + \sigma_{III}\, n^2)^2}$$, es la tensión tangencial total

Tensiones Tangenciales

Se puede eliminar uno de los cosenos (p.e. n) con la relación $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, luego derivando respecto de los otros dos e igualando a cero:

$$l\left[(\sigma_I - \sigma_{III})l^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})\right] = 0$$

$$m\left[(\sigma_I - \sigma_{III})l^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})\right] = 0$$

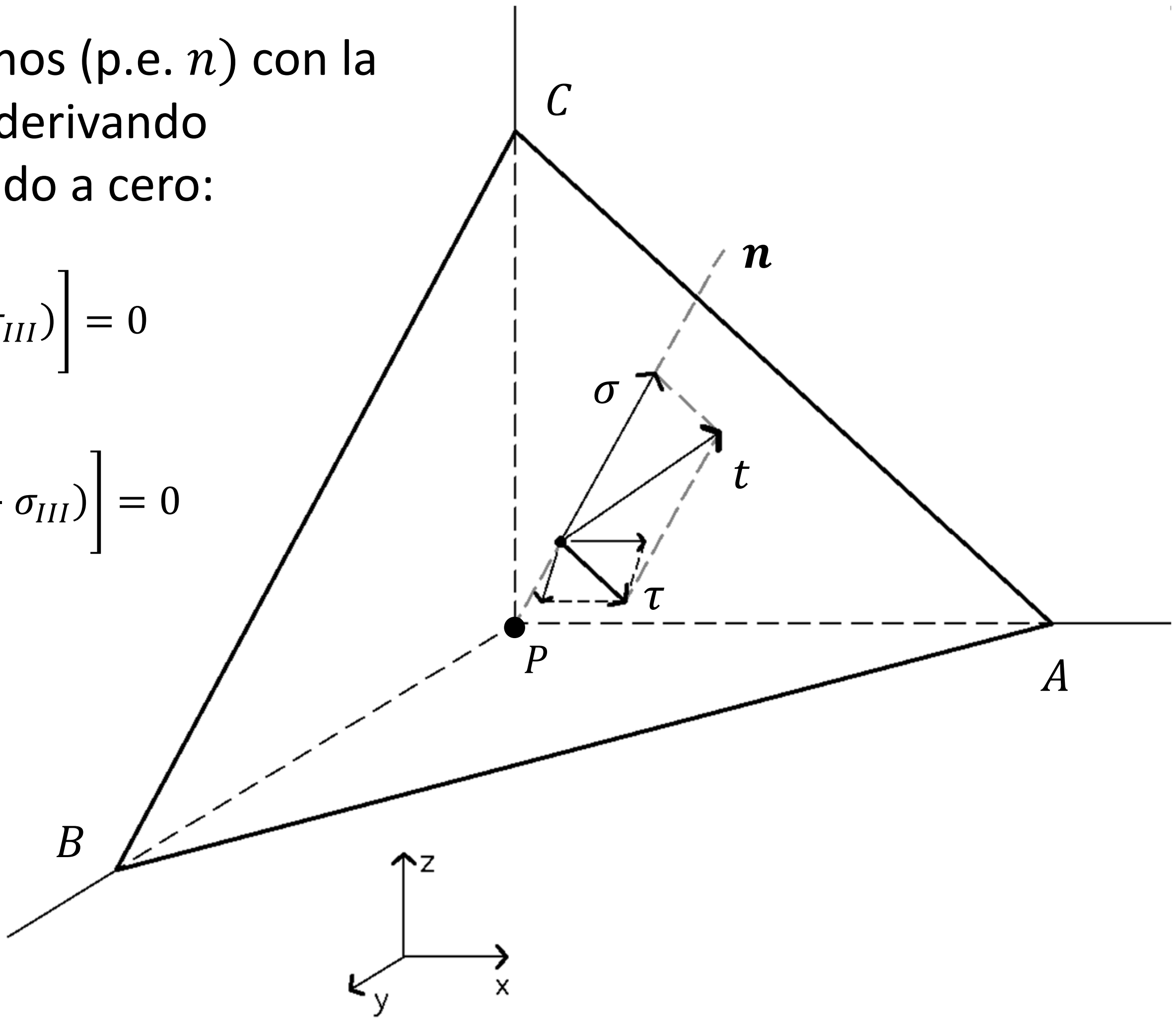
$l = m = 0, n = \pm 1$, donde $\tau = 0$ X

$l = 0, m = n = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})$

$m = 0, l = n = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$

Eliminando l o m

$n = 0, l = m = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$



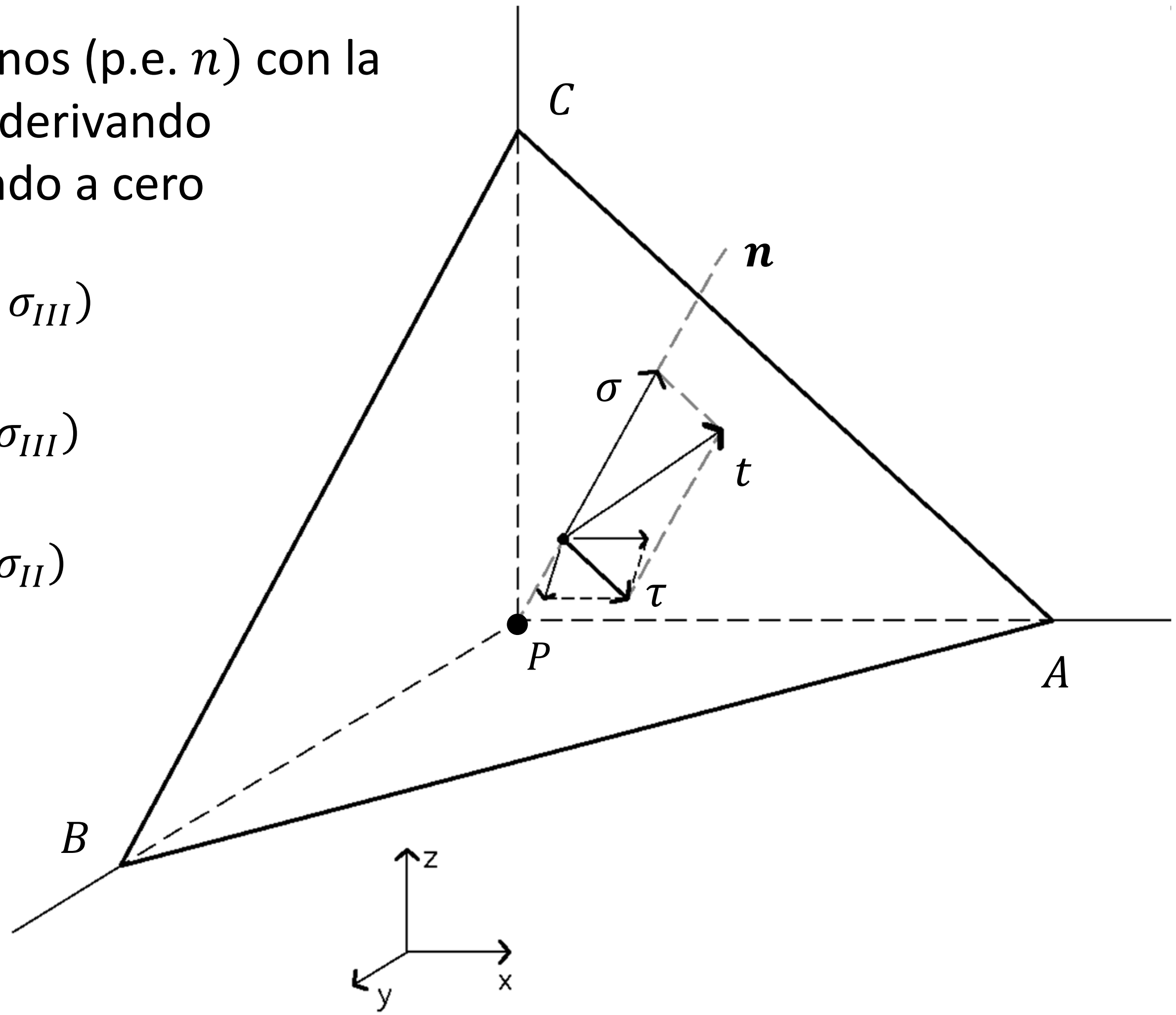
Tensiones Tangenciales

Se puede eliminar uno de los cosenos (p.e. n) con la relación $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, luego derivando respecto de los otros dos e igualando a cero

$$l = 0, m = n = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III})$$

$$m = 0, l = n = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_{I} - \sigma_{III})$$

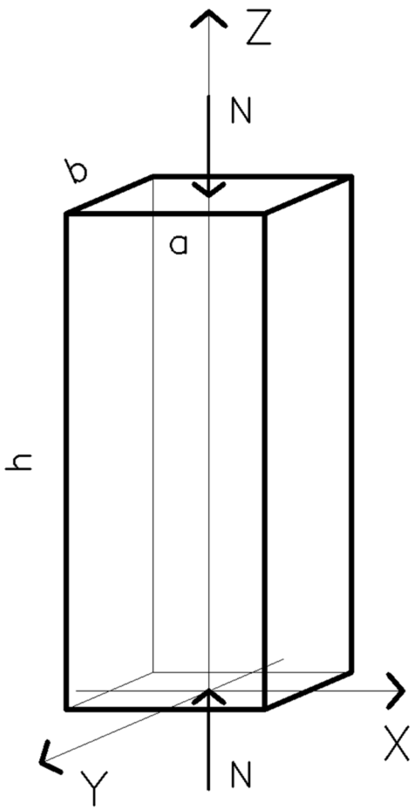
$$n = 0, l = m = \pm\sqrt{1/2}\,,\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_{I} - \sigma_{II})$$



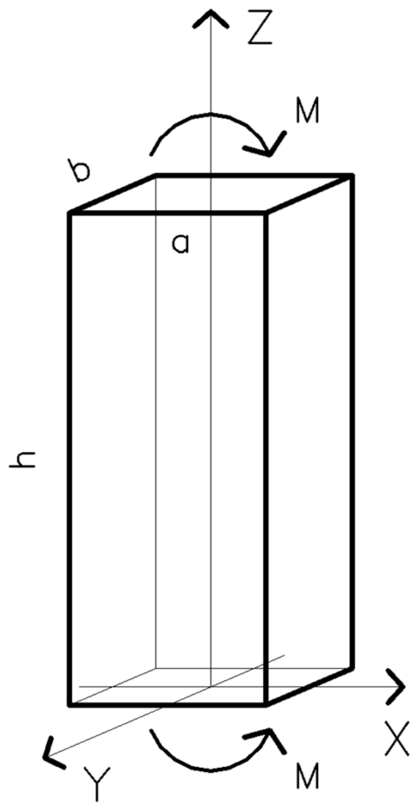
Los máximos y mínimos de las tensiones tangenciales se ubican en planos cuyas normales coinciden con la bisectriz de los ángulos que forman los ejes principales tomados de a pares.
La máxima tensión tangencial se produce según la bisectriz de las tensiones principales mayor y menor (en valor). Su valor es igual a la semi diferencia de ambas

ACTIVIDAD 1

1. Compresión Simple



2. Flexión Simple



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL II

Fin U1