UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

# ANALISIS ESTRUCTURAL II

# UNIDAD 2

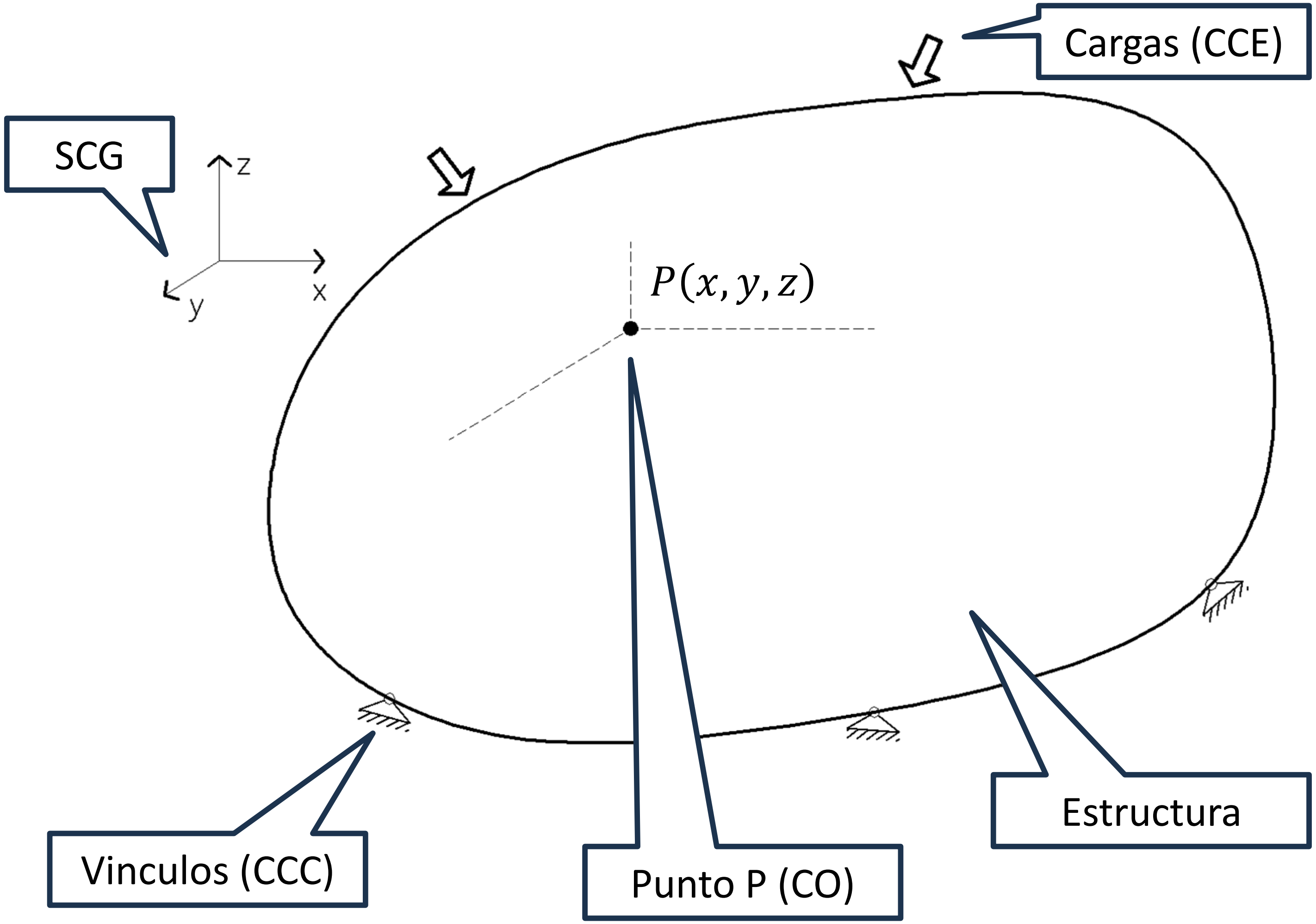
**Corrimientos. Deformaciones.**
**Relaciones Tensión Deformación**

**CURSO 2.025**

**Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ**

# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

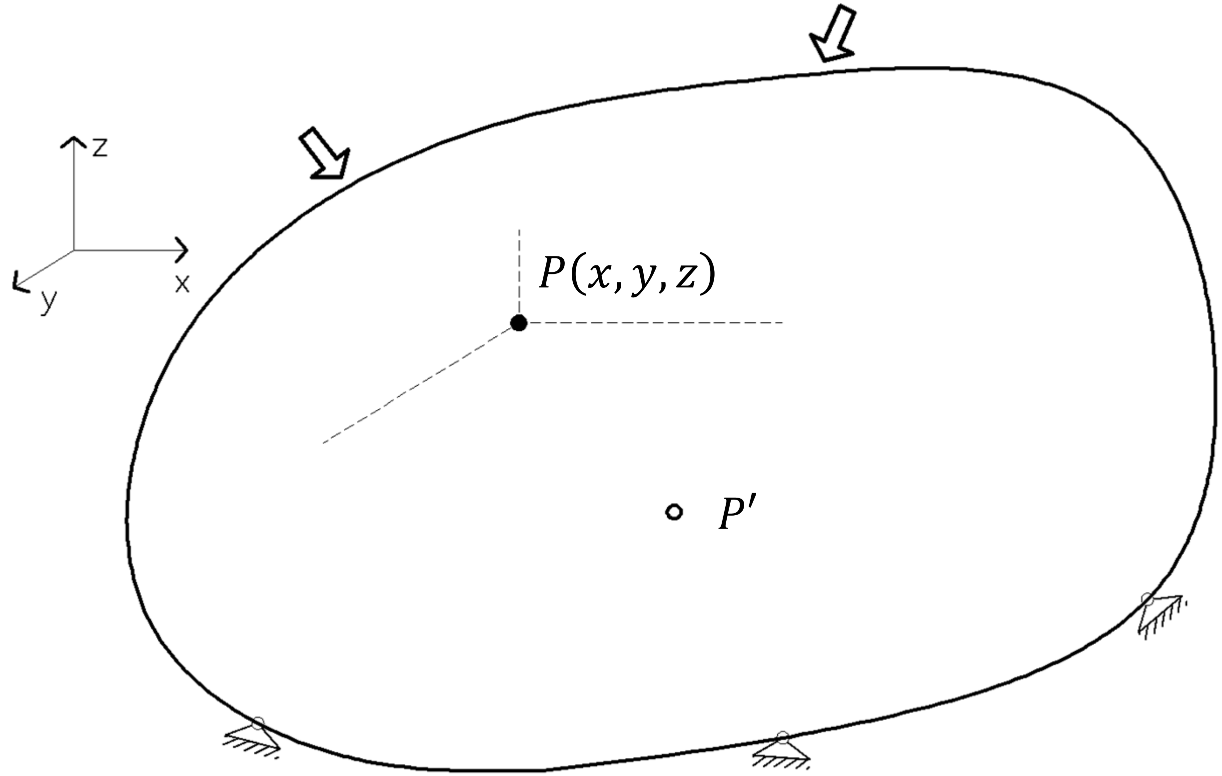
**Corrimientos**



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Corrimientos**

Debido a las acciones la estructura se deforma. Así, un punto $P(x,y,z)$ pasa a la posición $P'$

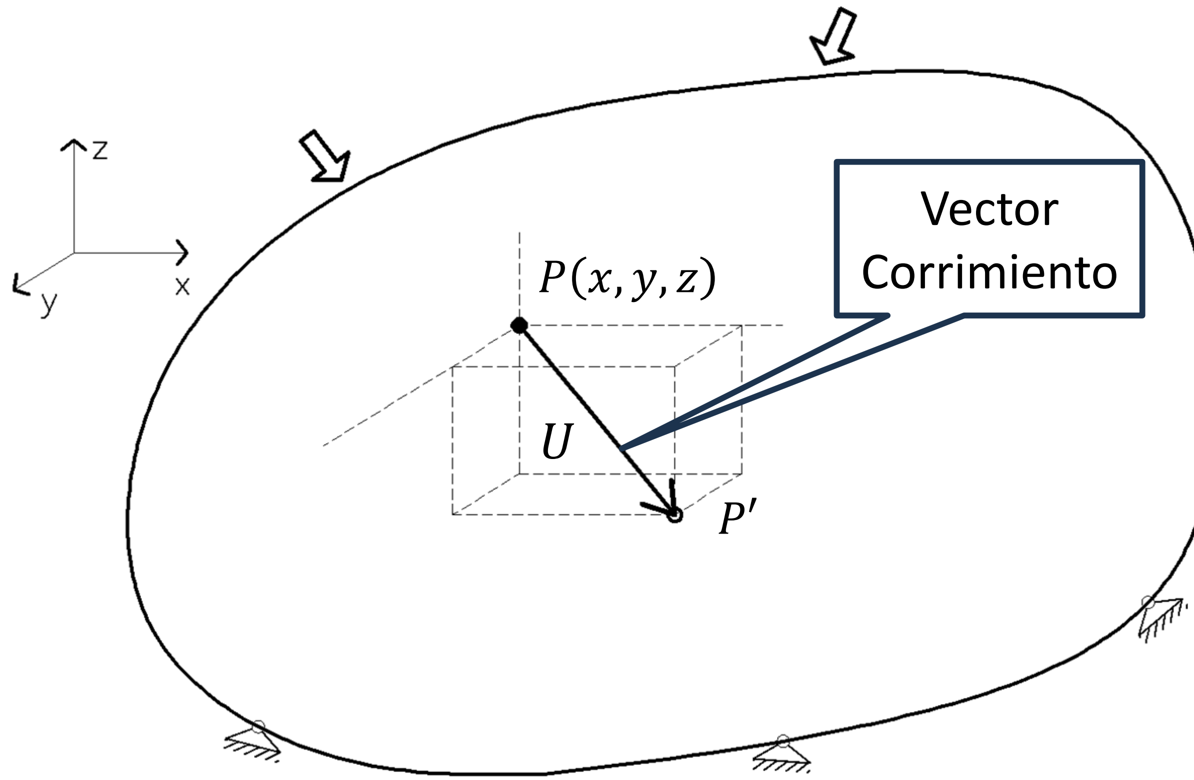


# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

## Corrimientos

Debido a las acciones la estructura se deforma. Así un punto $P(x, y, z)$ pasa a la posición $P'$

El vector corrimiento de $P$, queda definido por su posición inicial y final



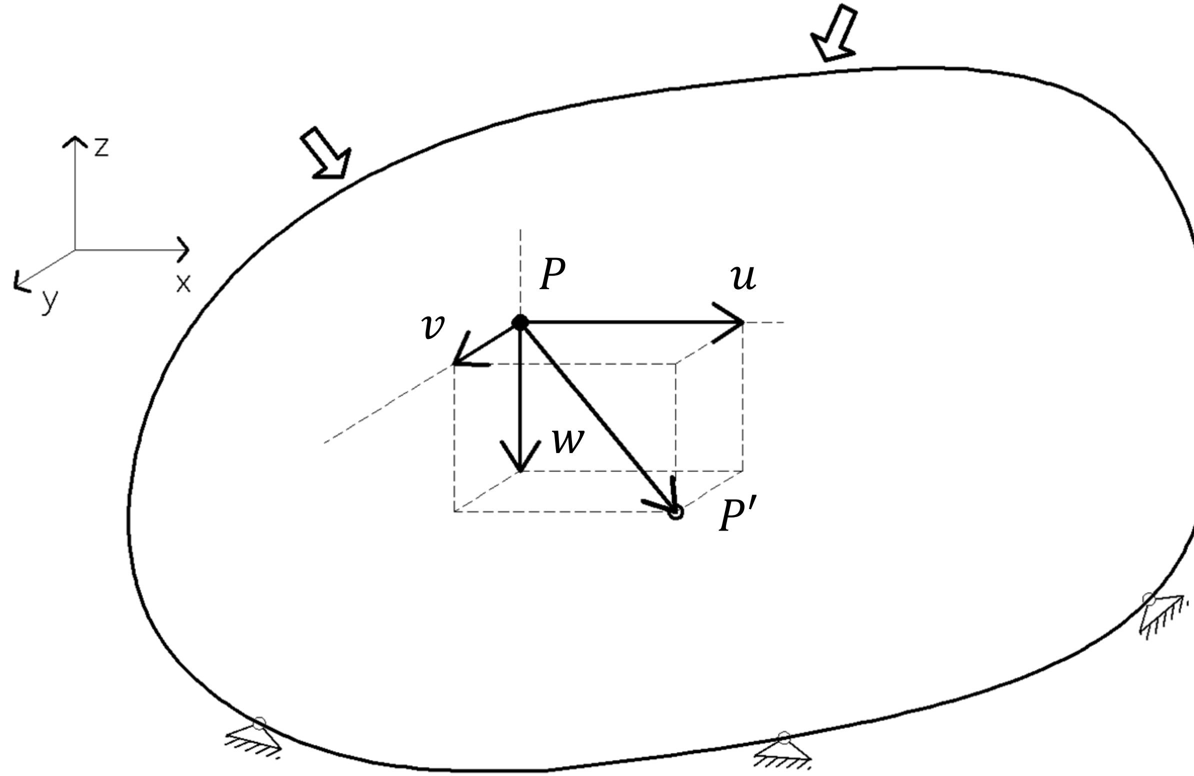
# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Corrimientos**

Debido a las acciones la estructura se deforma. Así un punto $P(x, y, z)$ pasa a la posición $P'$

El vector corrimiento de $P$, queda definido por su posición inicial y final

Las componentes del vector corrimiento $U$ o corrimientos, según la dirección del los ejes del SCG son $u, v, w$.




$u, v, w$ son positivos si su dirección y sentido coincide con la dirección y sentido de los semiejes positivos del SCG

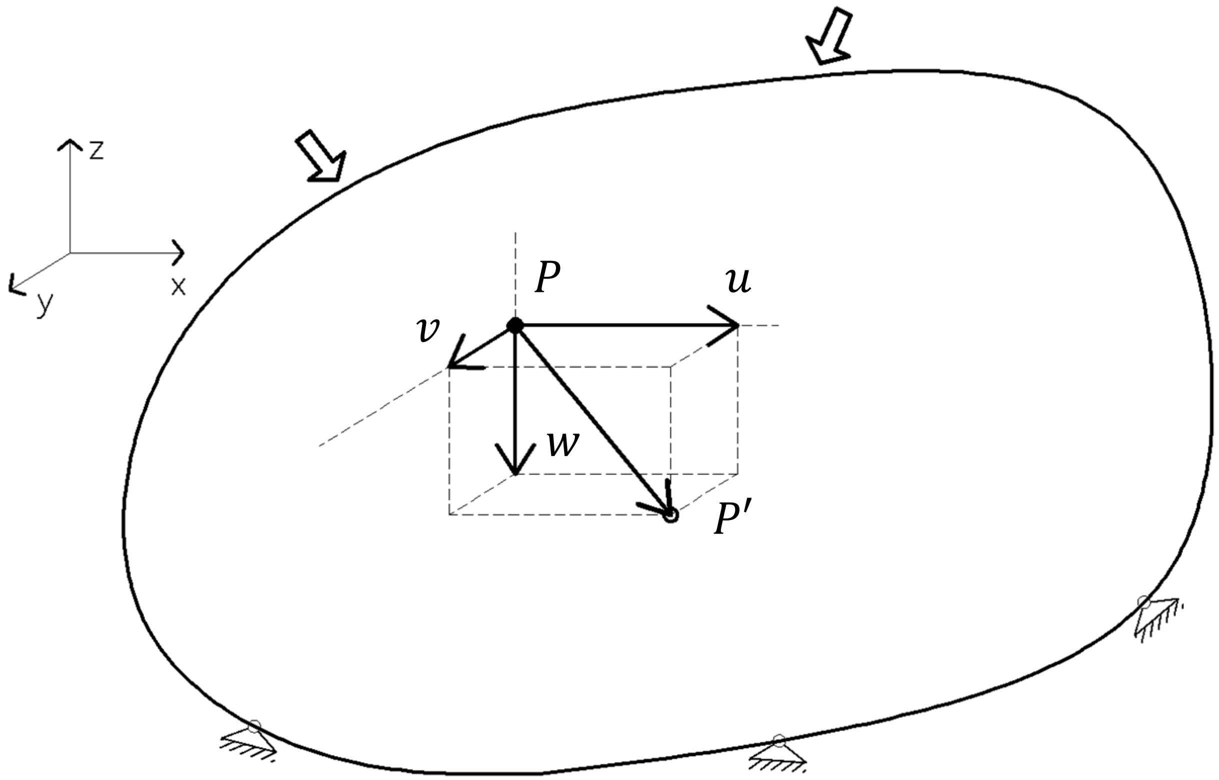
# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Corrimientos**

Debido a las acciones la estructura se deforma. Así un punto $P(x, y, z)$ pasa a la posición $P'$

El vector corrimiento de $P$, queda definido por su posición inicial y final

Las componentes del vector corrimiento o corrimientos, según la dirección del los ejes del SCG son $u, v, w$.




$u, v, w$ son positivos si su dirección y sentido coincide con la dirección y sentido de los semiejes positivos del SCG

Se admite que $u, v, w$ son funciones continuas de $(x, y, z)$ y que sus derivadas 1° y 2° también lo son. Además, las derivadas 3° son únicas. Con lo que asegura la continuidad física (sin fisuras) en la estructura.

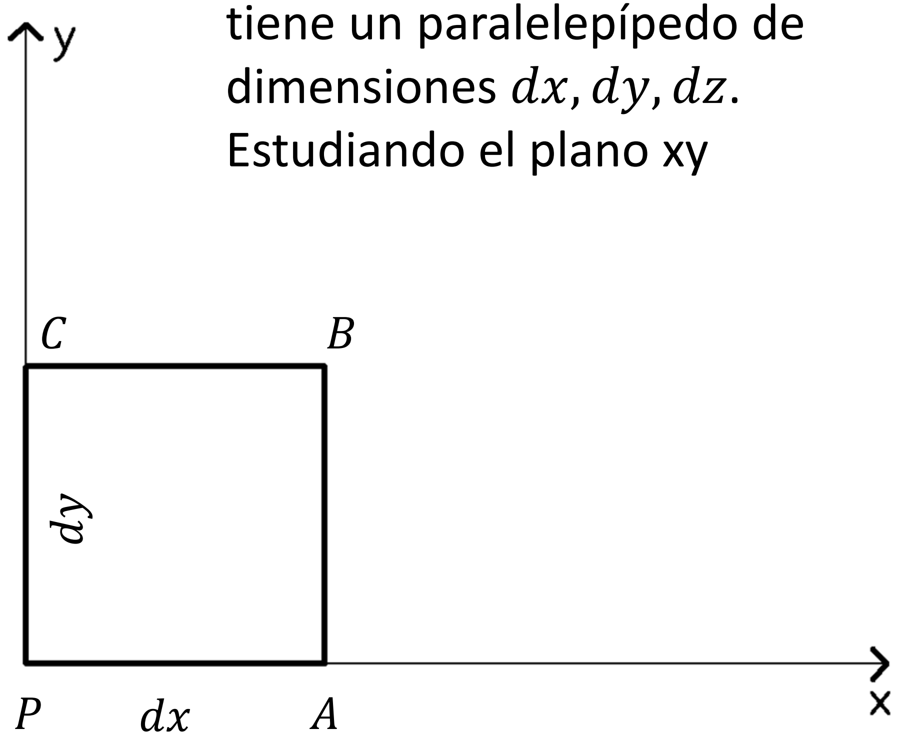
# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Deformaciones longitudinales**

Considerando una determinada dirección, definimos:
**Deformaciones longitudinales o simplemente deformaciones como el alargamiento o acortamiento unitario de un elemento infinitamente pequeño.**

Considerando las direcciones de los ejes del SCG, tenemos tres deformaciones, $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\varepsilon_z$

En el entorno de un punto $P$ se tiene un paralelepípedo de dimensiones $dx, dy, dz$. Estudiando el plano xy



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Deformaciones longitudinales**

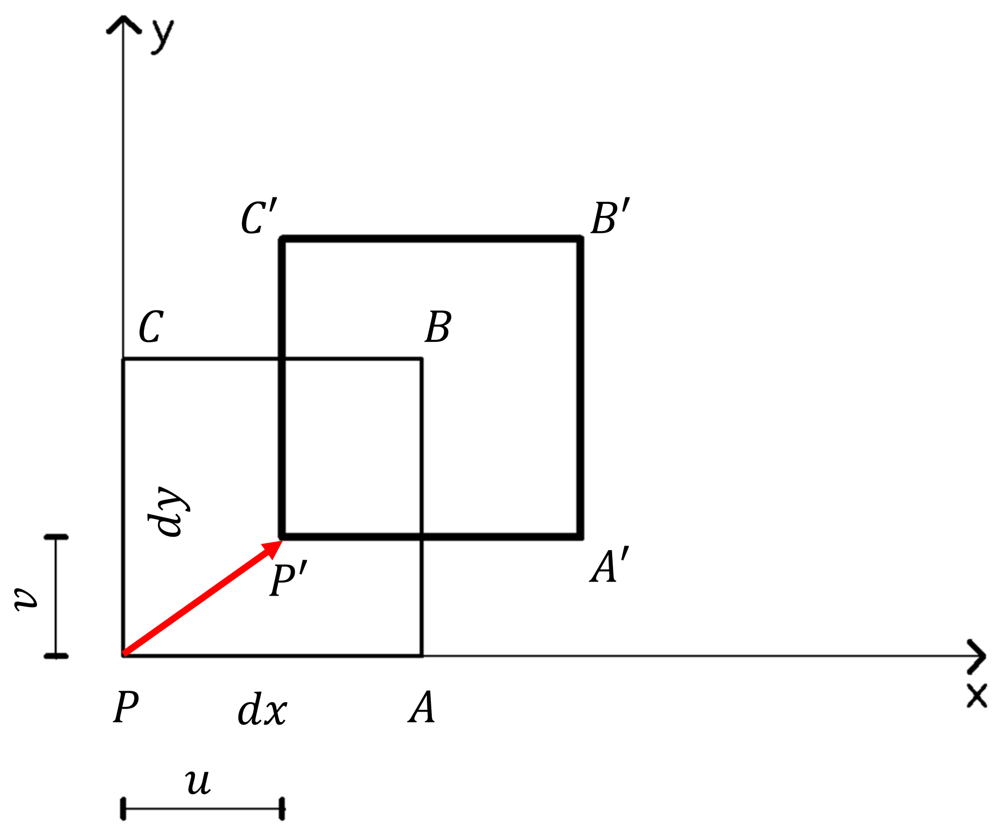
Considerando una determinada dirección, definimos:
**Deformaciones longitudinales o simplemente deformaciones como el alargamiento o acortamiento unitario de un elemento infinitamente pequeño.**

Considerando las direcciones de los ejes del SCG, tenemos tres deformaciones, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

Se admite que los corrimientos son muy pequeños.

En el caso de una traslación $u, v, w$ son iguales en todos los puntos por lo que:

Traslación $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Deformaciones longitudinales. Relación con los Corrimientos**

Se admite que los corrimientos $u, v, w$ son muy pequeños y, como ya se dijo, son funciones continuas de $(x, y, z)$.

Desarrollando en serie las funciones de los corrimientos y considerando solo el primer término.

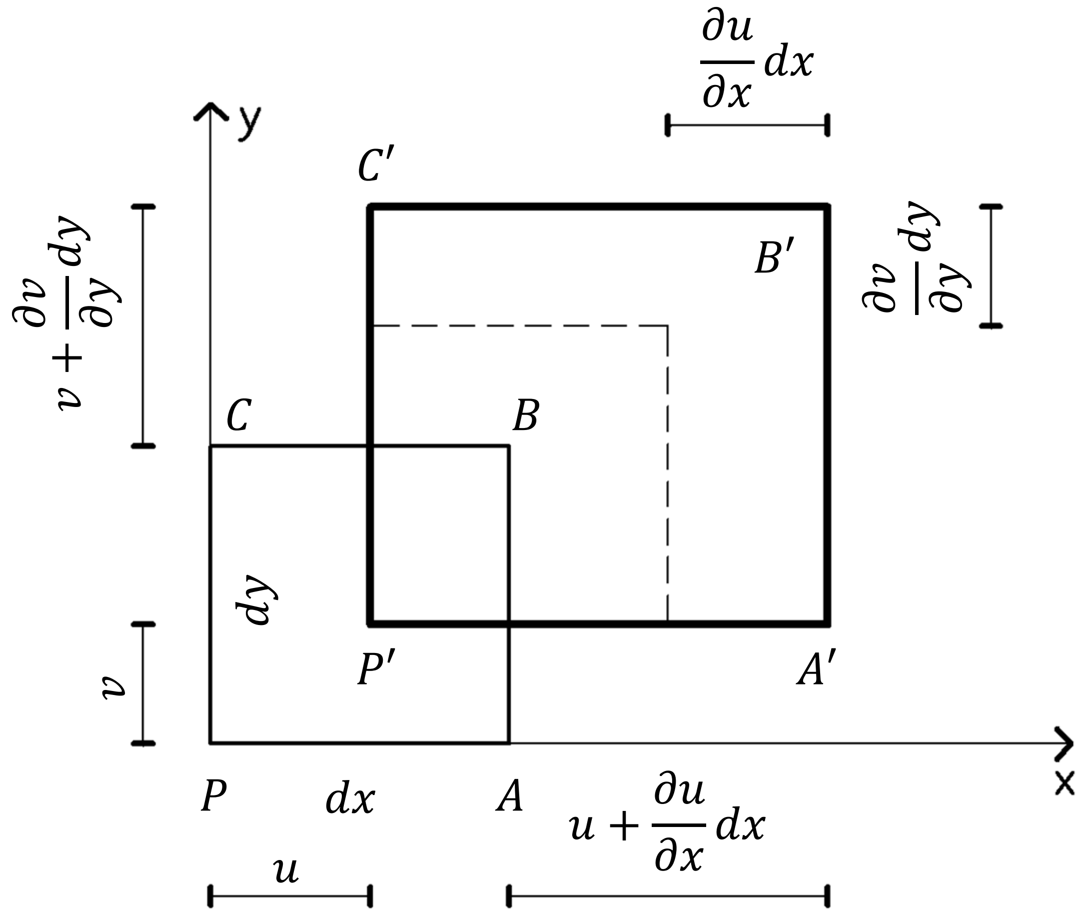
$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v}{dy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



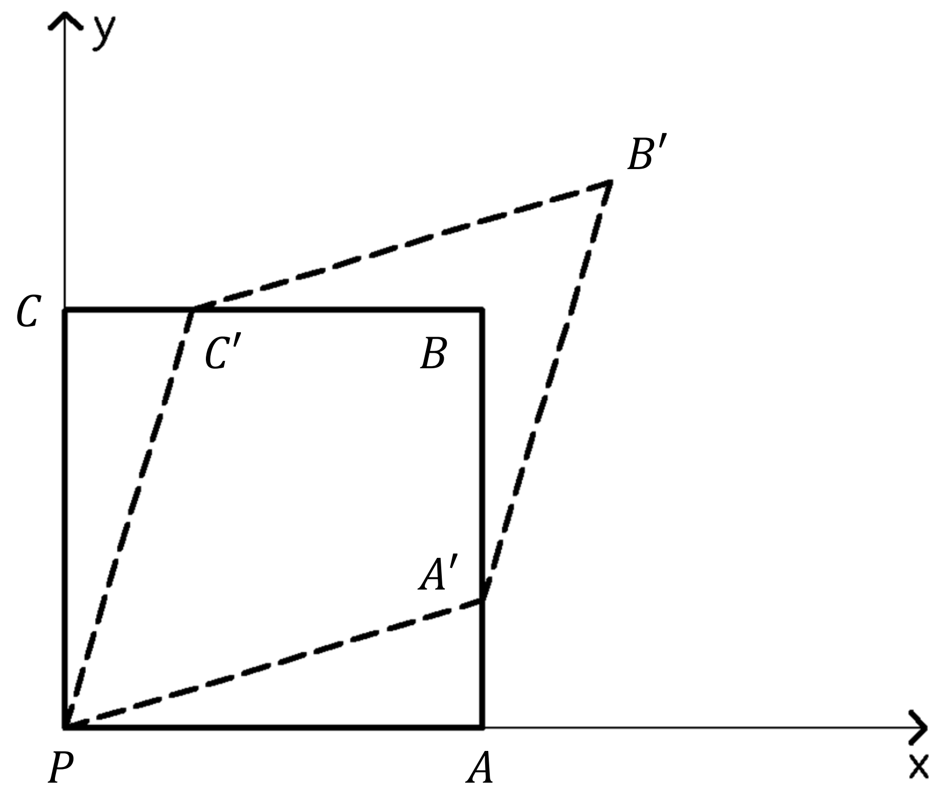
### Deformaciones angulares

Las deformaciones angulares aparecen cuando una cara del paralelepípedo elemental se desliza respecto de la cara paralela

Así el ángulo entre las rectas $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$, puede sufrir una variación, por efecto de la deformación general de la estructura, que se denomina **deformación angular**

$$\gamma = \widehat{APC} - \widehat{A'PC'}$$

$$\gamma_{xy} = \widehat{APA'} + \widehat{CPC'}$$



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Deformaciones angulares. Relación con los Corrimientos**

Las deformaciones angulares aparecen cuando una cara del paralelepípedo elemental se desliza respecto de la cara paralela

Así el ángulo entre las rectas $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$, puede sufrir una variación, por efecto de la deformación general de la estructura, que se denomina **deformación angular**

$$\gamma = \widehat{APC} - \widehat{A'PC'}$$

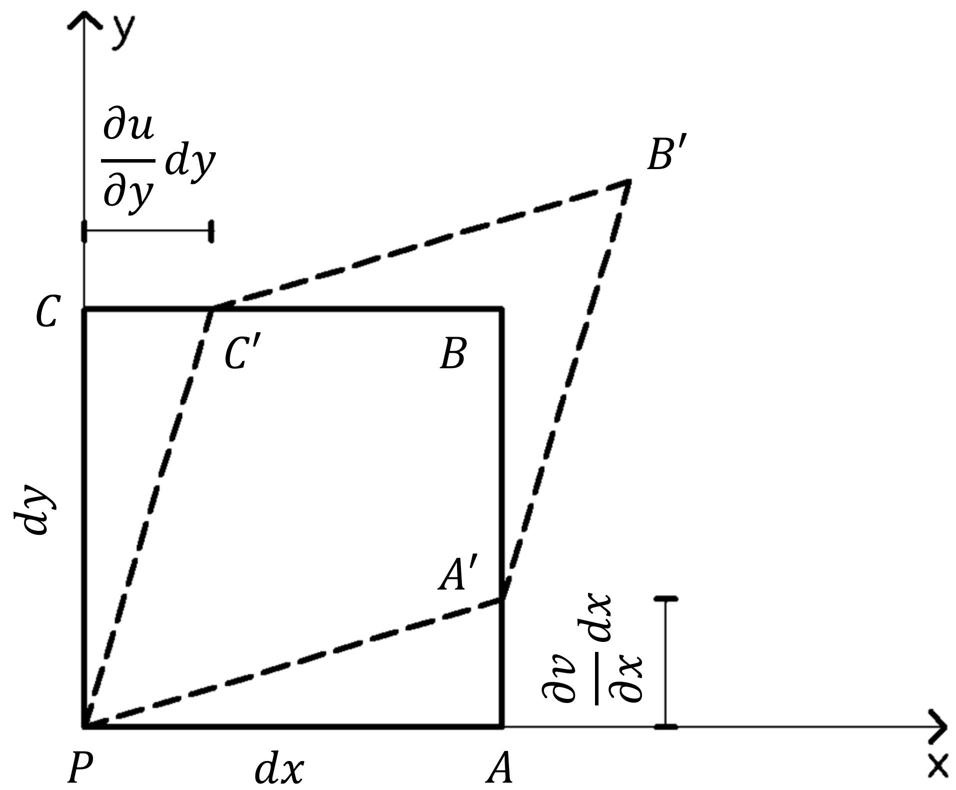
$$\gamma_{xy} = \widehat{APA'} + \widehat{CPC'}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Giros**

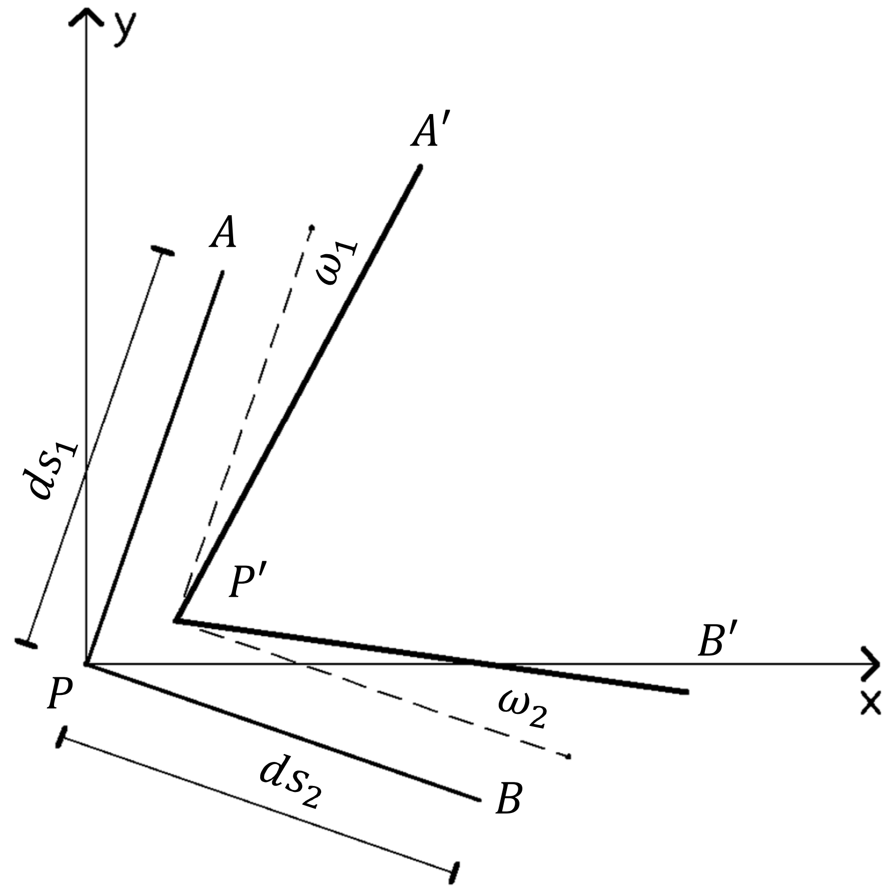
Consideramos en el entorno de un punto $P$ dos segmentos perpendiculares entre sí, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ de longitudes $ds_1$ y $ds_2$. Por la traslación y la deformación de la estructura pasan a las posiciones $\overline{P'A'}$ y $\overline{P'B'}$

Definimos como giro del punto $P$, al giro de la bisectriz del ángulo $\widehat{APB}$, respecto de la bisectriz del ángulo $\widehat{A'P'B'}$.

Trazando por $P'$ segmentos paralelos a $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2)$$

Giro positivo de x+ hacia y+



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Giros**

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2)$$

Trazando por $P'$ segmentos paralelos a $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$

$$\omega_1 = -\omega_1{}' + \omega_1{}'' \qquad \omega_1' = \frac{\overline{CT_1}}{\overline{P'T_1}} = \frac{\overline{CT_1}}{\overline{P'A''}} = \frac{\overline{A''C}\ sen\alpha}{\overline{P'A''}} \qquad \omega_1'' = \frac{\overline{CT_2}}{\overline{P'T_2}} = \frac{\overline{CT_2}}{\overline{P'A''}} = \frac{\overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}}$$

$$\omega_1 = -\frac{\overline{A''C}\ sen\alpha}{\overline{P'A''}} + \frac{\overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}} = \frac{-\overline{A''C}\ sen\alpha + \overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}}$$

$\overline{AA'}$ : corrimiento

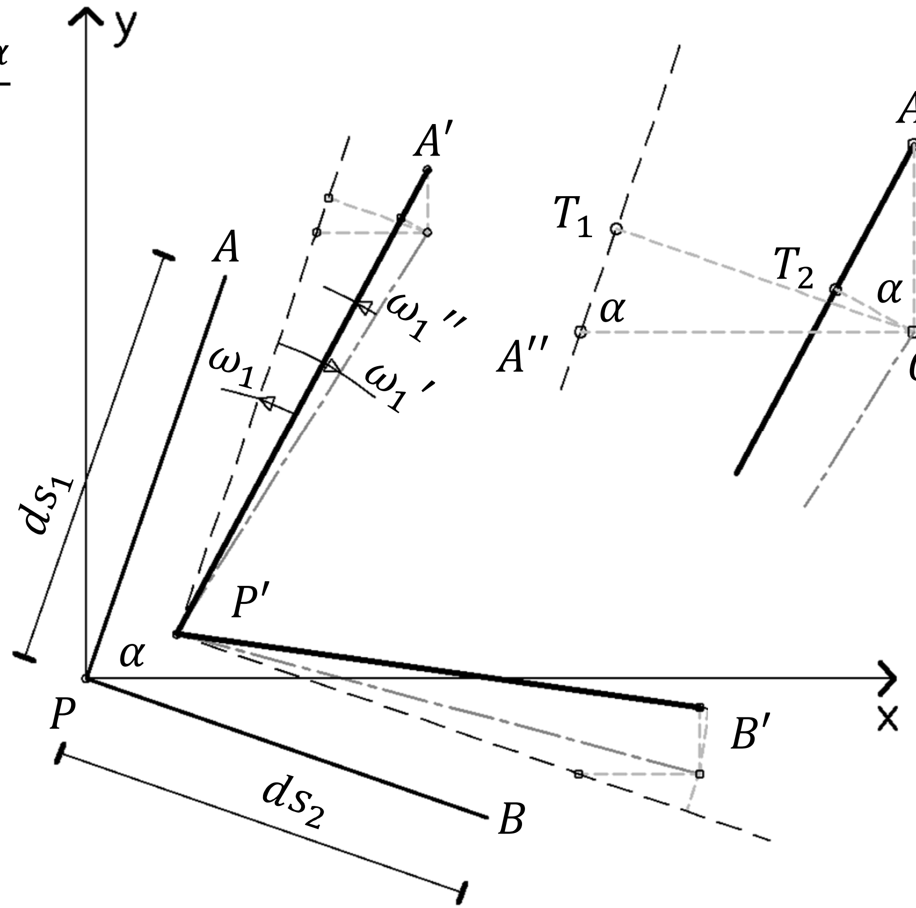
$\overline{A''A'}$ : incremento del corrimiento

$\overline{CA'}$ : proy vert. incremento corrimiento

$\overline{A''C}$ : proy horiz. incremento corrimiento

$$\overline{A''C} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\overline{A'C} = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Giros**

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2)$$

Trazando por $P'$ segmentos paralelos a $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$

$$\omega_1 = -\omega_1{}' + \omega_1{}'' \qquad \omega_1' = \frac{\overline{CT_1}}{\overline{P'T_1}} = \frac{\overline{CT_1}}{\overline{P'A''}} = \frac{\overline{A''C}\ sen\alpha}{\overline{P'A''}} \qquad \omega_1'' = \frac{\overline{CT_2}}{\overline{P'T_2}} = \frac{\overline{CT_2}}{\overline{P'A''}} = \frac{\overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}}$$

$$\omega_1 = -\frac{\overline{A''C}\ sen\alpha}{\overline{P'A''}} + \frac{\overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}} = \frac{-\overline{A''C}\ sen\alpha + \overline{A'C}\ cos\alpha}{\overline{P'A''}}$$

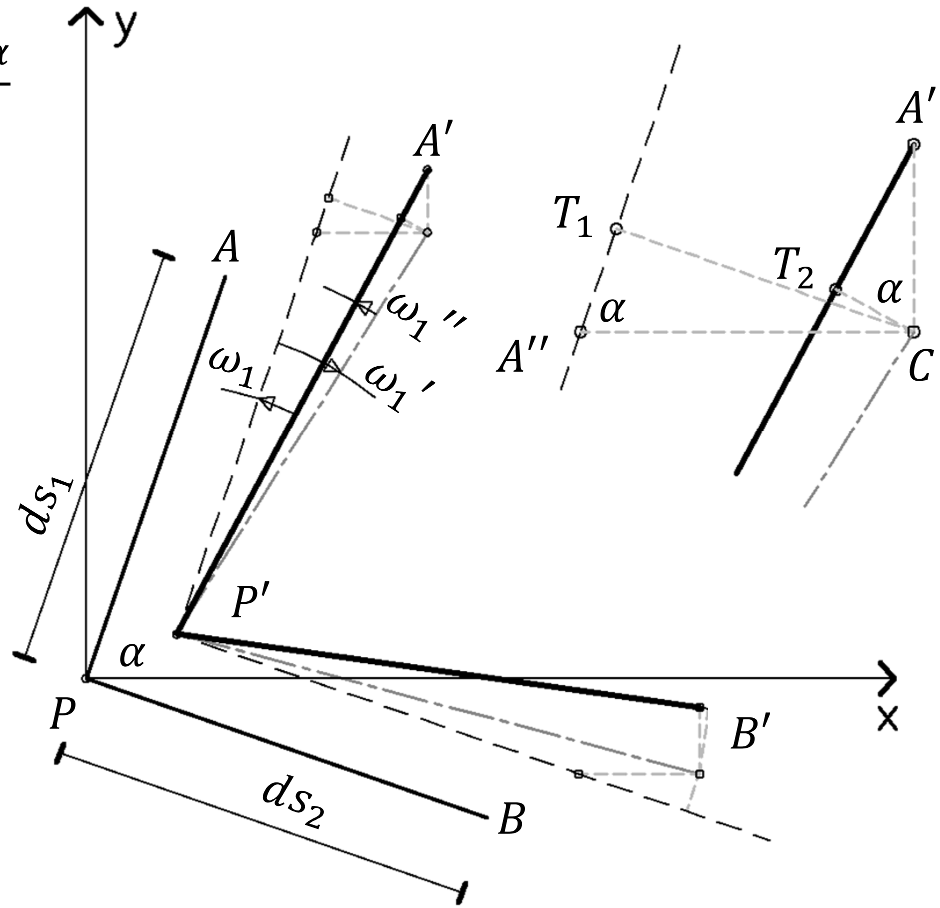
$$\overline{A''C} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dx = ds_1\ cos\alpha$$

$$dy = ds_1\ sen\alpha$$

$$\overline{A'C} = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \qquad \overline{P'A''} = ds_1$$

$$\omega_1 = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) sen\alpha\ cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}sen^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}cos^2\alpha$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) sen\alpha\ cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial x}sen^2\alpha$$



# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Giros**

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\,(\omega_1 + \omega_2)$$

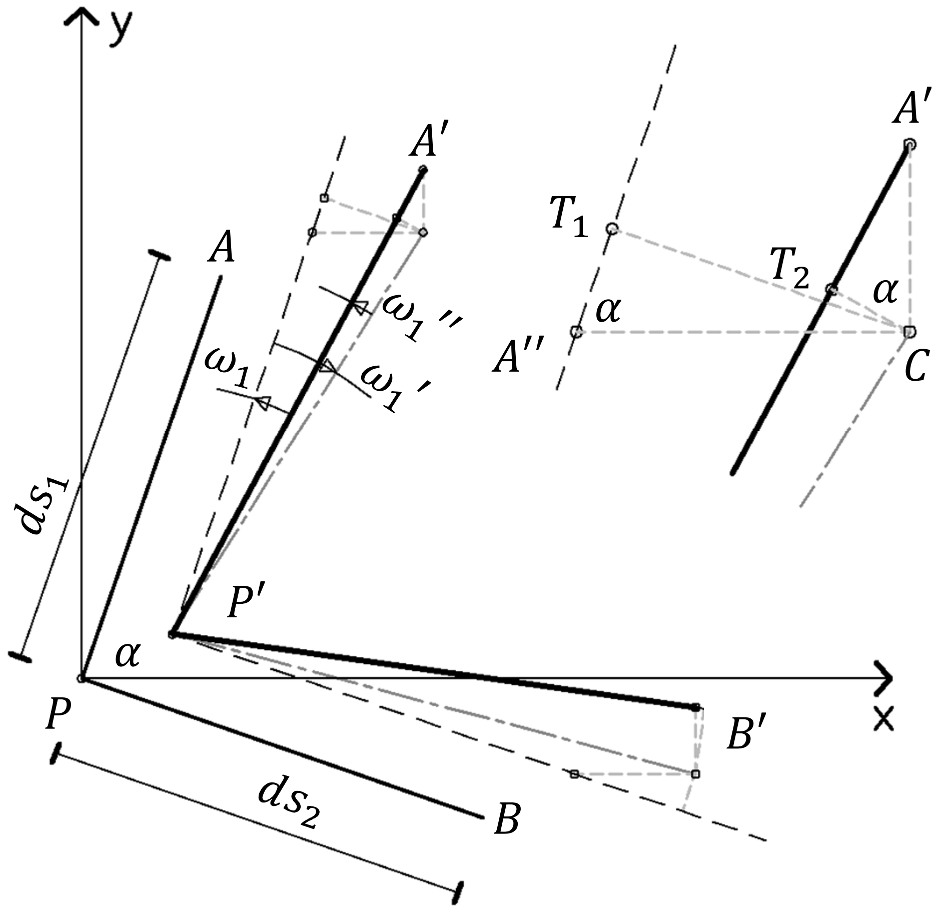
$$\omega_1 = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) sen\alpha\ cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y} sen^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial x} cos^2\alpha$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) sen\alpha\ cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y} cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial x} sen^2\alpha$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$



## Ecuaciones de Compatibilidad en Deformaciones

En cualquier punto $P$ las seis ecuaciones de deformaciones y los tres corrimientos son funciones de las coordenadas $(x, y, z)$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \boxed{1}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \boxed{4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \boxed{2}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \boxed{5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \boxed{3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \boxed{6}$$

Por lo que las seis componentes de las deformaciones no pueden ser independientes entre si.

Una ves definidas las tres componentes del corrimiento, quedan definidas las seis componentes de la deformaciones. Si eliminamos las componentes del corrimiento $u, v, w$; obtendremos las relaciones entre las deformaciones

# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Ecuaciones de Compatibilidad en Deformaciones**

En cualquier punto $P$ las seis ecuaciones de deformaciones y los tres corrimientos y son funciones de las coordenadas $(x, y, z)$. Eliminando los corrimientos.

$$\frac{\partial^2(1)}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2(2)}{\partial x^2} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2(4)}{\partial x \partial y} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

# CORRIMIENTOS Y DEFORMACIONES

**Ecuaciones de Compatibilidad en Deformaciones**

En cualquier punto $P$ las seis ecuaciones de deformaciones y los tres corrimientos y son funciones de las coordenadas $(x, y, z)$. Eliminando los corrimientos.

$$\frac{\partial(1)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \boxed{7}$$

$$\frac{\partial(6)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \boxed{8}$$

$$\frac{\partial(5)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad \boxed{9}$$

$$\frac{\partial(4)}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad \boxed{10}$$

$$\boxed{8} - \boxed{9} - \boxed{10} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = -2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad \boxed{11}$$

$$\frac{\partial(7)}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$$

$$\frac{\partial(11)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = -2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

## Ecuaciones de Compatibilidad en Deformaciones

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

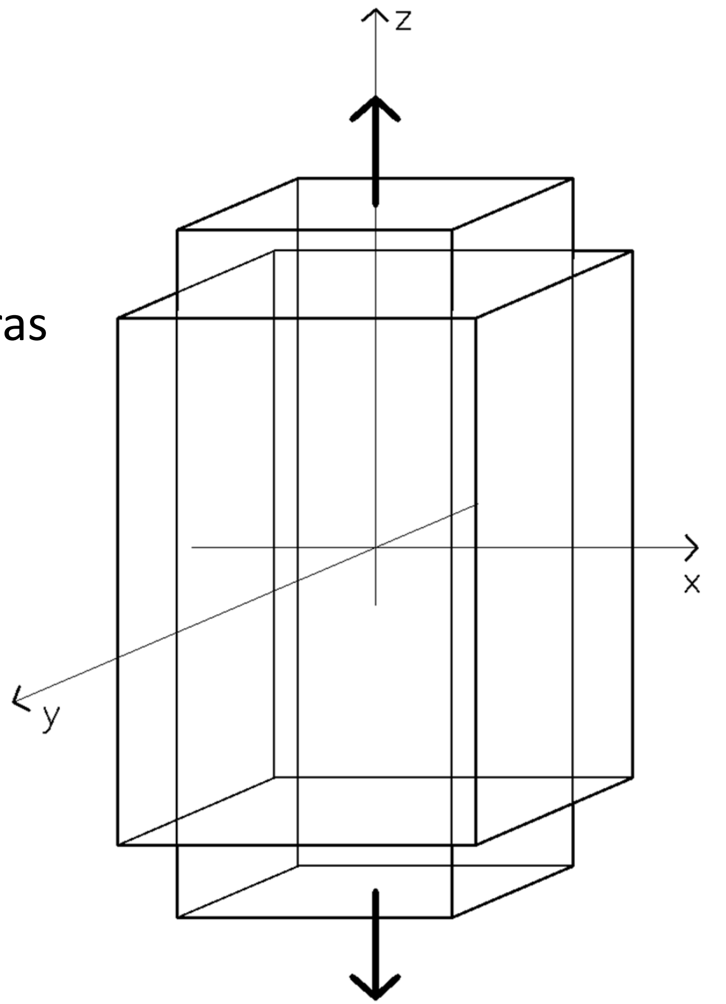
Son las ecuaciones de compatibilidad en deformaciones.
Son independientes de los corrimientos y son independientes entre si.

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Normales**

Consideremos una estructura y prescindimos de la tensiones o deformaciones que pudiera tener previas al siguiente análisis.

Cargando la estructura según una dirección, de modo de provocarle tensiones de tracción (o de compresión) y sin deformaciones tangenciales, experimentalmente se observa, para un gran numero de materiales, que mientras que la estructura se alarga en la dirección de la carga, se acorta según otras dos direcciones perpendiculares a la carga y entre si.



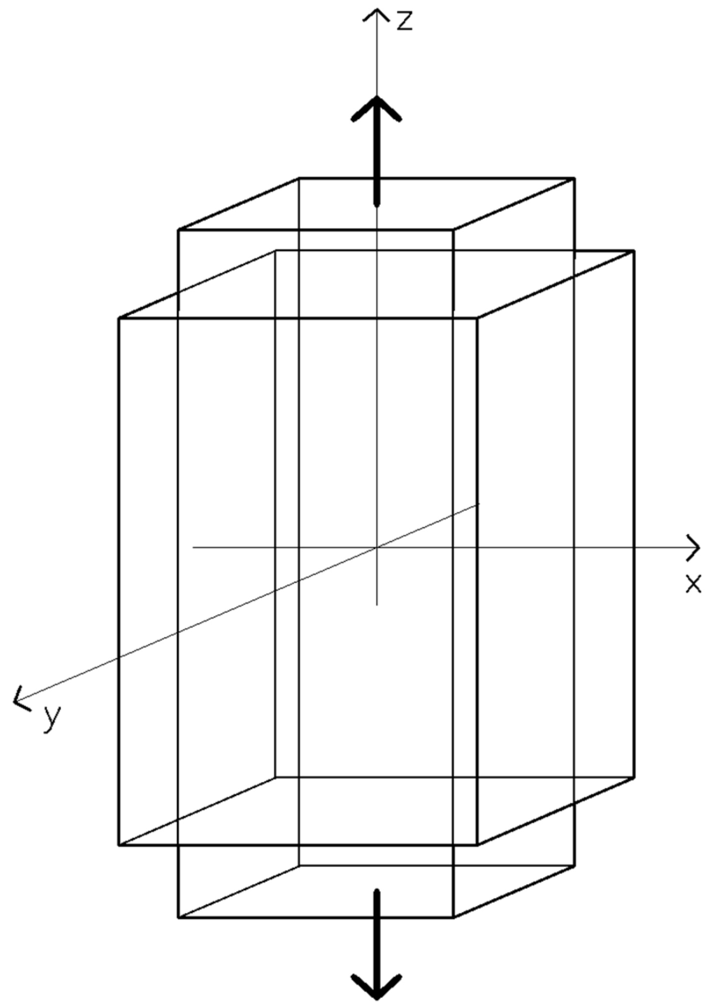

La deformación en la dirección de la carga tiene dos componentes, una proporcional a la tensión en la dirección de la carga y otra proporcional a las tensiones según dos direcciones perpendiculares a la de la carga y entre si.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)$$

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Normales**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)$$




Los valores de $E$ y $\nu$:

- Son constantes
- Son independientes de las coordinadas del punto y de la dirección de las tensiones, lo que implica homogeneidad e isotropía del material.
- Son independientes de la intensidad de las tensiones y del tiempo, duración o secuencia de aplicación de las cargas, incluyendo carga y descarga, que implica que el material es elástico.
- Además: $E > 0$ y $0 < \nu < \frac{1}{2}$

Son las hipótesis o Ley de Hooke Generalizada

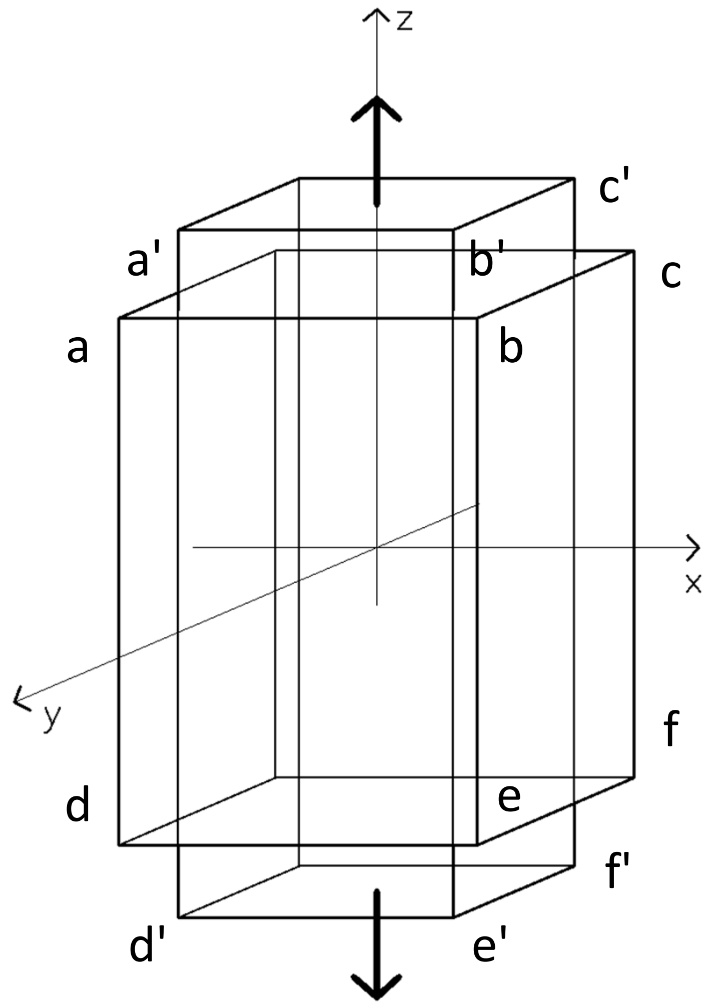
# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Normales**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$




$E$: Es el módulo de Young
o módulo de elasticidad longitudinal

$\nu$: Es el coeficiente de Poisson
Cociente cambiado de signo entre
deformaciones transversales y longitudinales

$$\nu = -\left(\frac{a'b' - ab}{ab}\right) / \left(\frac{a'd' - ad}{ad}\right) = -\left(\frac{b'c' - bc}{bc}\right) / \left(\frac{a'd' - ad}{ad}\right)$$

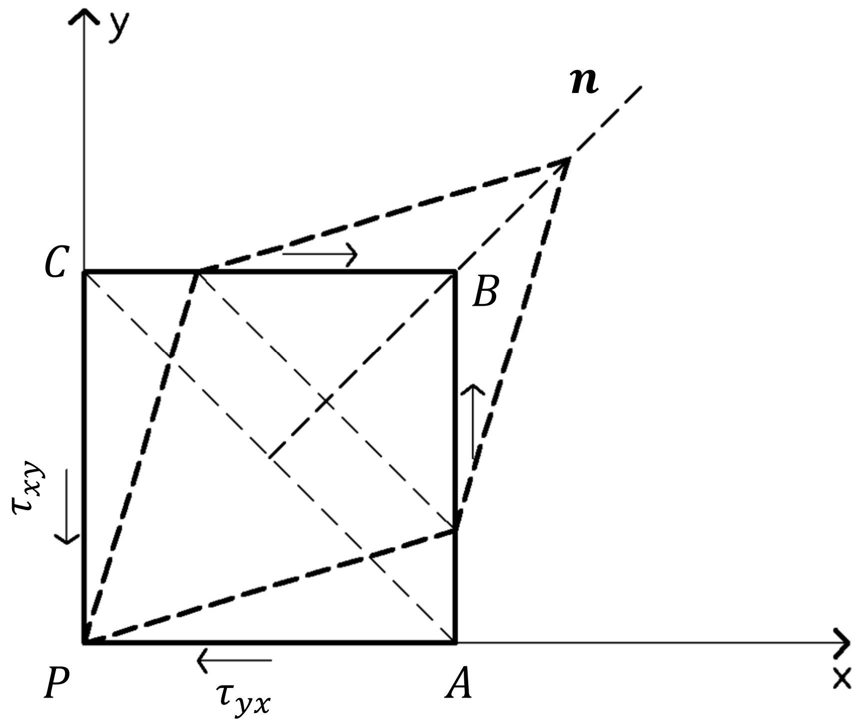
# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Tangenciales**

De acuerdo con las consideraciones realizadas, resulta:

$$\varepsilon_x \, , \varepsilon_y \, , \varepsilon_z \; \neq \; f(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

$$\sigma_x \, , \sigma_y \, , \sigma_z \; \neq \; f(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$




Aplicando ECC en los planos con:

| $\boldsymbol{n} \equiv PB$: | $\boldsymbol{n} \equiv AC$: |
|---|---|
| $l = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $l = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $t_x = \tau_{yx} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $t_x = -\tau_{yx} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $t_y = \tau_{xy} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $t_y = \tau_{xy} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $t_z = 0$ | $t_z = 0$ |

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

## Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Tangenciales

$\boldsymbol{n} \equiv PB$:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_x = \tau_{yx}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_y = \tau_{xy}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}$$

$$\sigma_{PB} > 0$$

$\boldsymbol{n} \equiv AC$:

$$l = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

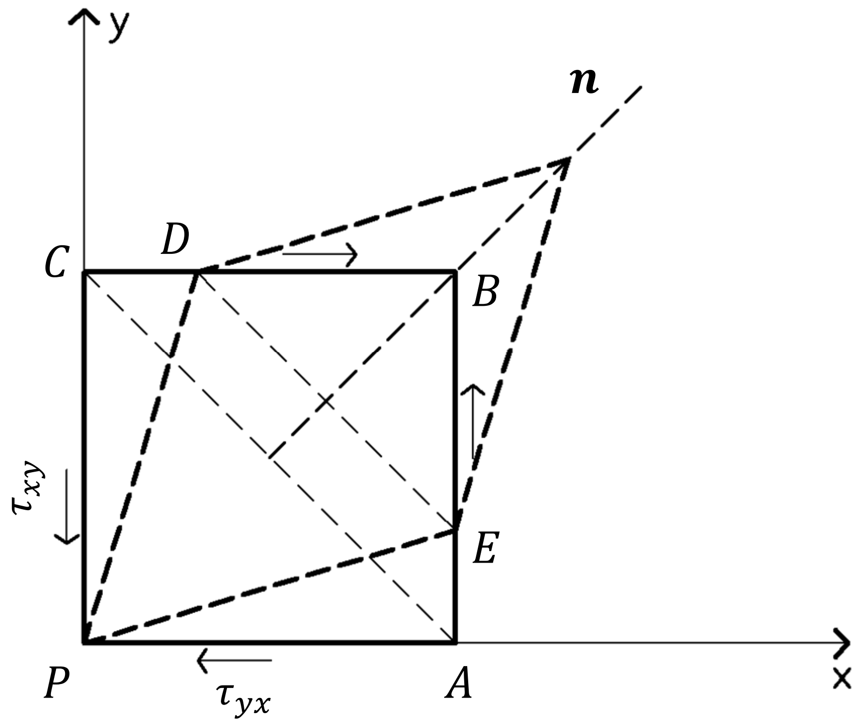
$$t_x = -\tau_{yx}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_y = \tau_{xy}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}$$

$$\sigma_{AC} < 0$$




Aplicando Hooke, las def. longitudinales:

$$\varepsilon_{PB} = \frac{1}{E}\tau_{xy} + \frac{\nu}{E}\tau_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{AC} = -\frac{1}{E}\tau_{xy} - \frac{\nu}{E}\tau_{xy} = -\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ley de Hooke Generalizada. Tensiones y Deformaciones Tangenciales**

Vemos que no hay variaciones angulares entre las direcciones $\overline{PB}$ y $\overline{AC}$, pero si hay deslizamiento en las direcciones $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\overline{AE}}{\overline{PA}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}} = \frac{(\overline{AG} + \overline{CF})\sqrt{2}}{\overline{AC}/\sqrt{2}} = -2\varepsilon_{AC}$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

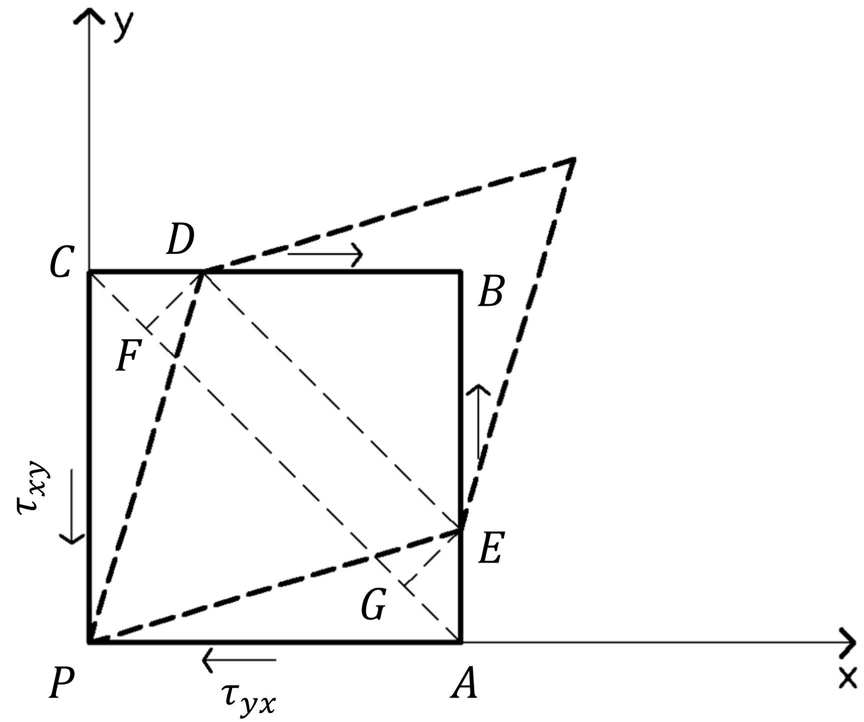
Módulo Elasticidad Transversal

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

## Ley de Hooke Generalizada

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \boxed{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \boxed{2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \boxed{3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \boxed{4}$$

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \boxed{5}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \boxed{6}$$

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ecuaciones de Lamé**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \qquad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G \qquad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \qquad G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

Dilatación Cúbica: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ (Deformación volumétrica)

Llamando: $\lambda = \frac{\nu\, E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$

Reemplazando en la LHG

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ecuaciones de Lamé**

$$\sigma_x = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_x \qquad (1)$$

$$\sigma_y = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_y \qquad (2)$$

$$\sigma_z = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_z \qquad (3)$$

$$\tau_{xy} = G\, \gamma_{xy} \qquad (4)$$

$$\tau_{xz} = G\, \gamma_{xz} \qquad (5)$$

$$\tau_{yz} = G\, \gamma_{yz} \qquad (6)$$

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\lambda = \frac{\nu\, E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

# RELACION TENSIÓN DEFORMACIÓN

**Ecuaciones de Lamé**

Sumando m.am. $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\,\lambda + 2\,G)\,e$$

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \text{ : Tensión Cúbica}$$

$$s = (3\,\lambda + 2\,G)\,e$$

Derivando y sumando las EEI

$$\nabla^2 e = -\frac{1}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

Cuando las fuerzas de masas son cttes.

$$\nabla^2 e = 0 \qquad \nabla^2 s = (3\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0$$

$$\sigma_x = \lambda\,e + 2\,G\,\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\,e + 2\,G\,\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\,e + 2\,G\varepsilon_z$$

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\lambda = \frac{\nu\,E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

Módulo de Compresión

$3\,\lambda + 2\,G$

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**EEI en función de los Corrimientos**

Utilizando las Ec. de Lamé $\sigma = f(\varepsilon)$, y poniendo $\varepsilon = f(u)$

$$(\lambda + G)\ \frac{\partial e}{\partial x} + G\ \nabla^2 u + X = 0 \qquad \boxed{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$(\lambda + G)\ \frac{\partial e}{\partial \mathrm{y}} + G\ \nabla^2\ v + Y = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\ \frac{\partial e}{\partial z} + G\ \nabla^2\ w + Z = 0 \qquad \boxed{3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial w}{\partial \mathrm{z}}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**EEC en función de los Corrimientos**

Utilizando las Ec. de Lamé $\sigma = f(\varepsilon)$, y poniendo $\varepsilon = f(u)$

$$\sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = X_c \qquad \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n = Y_c \qquad \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n = Z_c$$

$$\lambda\, e\, l + G\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial x} + n\frac{\partial w}{\partial x}\right) = X_c \qquad \boxed{1}$$

$$\lambda\, e\, m + G\left(l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial y} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial y}\right) = Y_c \qquad \boxed{2}$$

$$\lambda\, e\, n + G\left(l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial z} + m\frac{\partial v}{\partial z} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right) = Z_c \qquad \boxed{3}$$

Conocidos los corrimientos de los puntos de una estructura, podemos calcular las deformaciones y las tensiones, para una fuerza de contorno y de masa dadas

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**Ecuaciones de Beltrami. EC en función de las Tensiones**

Aplicando $\nabla^2$ a la 1° de las Ec. de Lamé

$$\nabla^2 \sigma_x = \lambda \nabla^2 e + 2\, G\, \nabla^2 \varepsilon_x$$

$$\nabla^2 \sigma_x = \lambda \nabla^2 e + 2\, G\, \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Como: $\nabla^2 e = -\frac{1}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$

$$\nabla^2 \sigma_x = -\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda+G)\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial X}{\partial x}$$

Análogamente

$$\nabla^2 \sigma_y = -\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda+G)\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \sigma_z = -\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda+G)\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - 2\,\frac{\partial Z}{\partial z}$$

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**Ecuaciones de Beltrami. EC en función de las Tensiones**

$$\nabla^2 \tau_{xy} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial y \partial x} - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial z \partial x} - \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial z \partial y} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**Ecuaciones de Beltrami. EC en función de las Tensiones**

$$\nabla^2 \sigma_x = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda + G)\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial X}{\partial x} \qquad \boxed{1}$$

$$\nabla^2 \sigma_y = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda + G)\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \boxed{2}$$

$$\nabla^2 \sigma_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2(\lambda + G)\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - 2\,\frac{\partial Z}{\partial z} \qquad \boxed{3}$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial y \partial x} - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \qquad \boxed{4}$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial z \partial x} - \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \qquad \boxed{5}$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} = -(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 e}{\partial z \partial y} - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \qquad \boxed{6}$$

# TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

**Ecuaciones de Beltrami. EC en función de las Tensiones**

Cuando las fuerzas de masa con constantes

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\sigma_x = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \qquad \boxed{1}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\sigma_y = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \qquad \boxed{2}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\sigma_z = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \qquad \boxed{3}$$

$$s = (3\,\lambda + 2\,G)\,e$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\tau_{xy} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x} \qquad \boxed{4}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\tau_{xz} = \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} \qquad \boxed{5}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\,\tau_{yz} = \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial y} \qquad \boxed{6}$$

# PROBLEMA ELÁSTICO

Desde el punto de vista del análisis estructural, resolver una estructura implica conocer los corrimientos de sus puntos, los giros, las deformaciones y las tensiones asociadas a los mismos. Por ello, en estructuras continuas (formadas por infinitos puntos) tenemos una cantidad infinita de incógnitas.

A partir del estudio tridimensional de un sistema estructural sólido, continuo, homogéneo, isótropo y elástico, hemos establecido las condiciones de equilibrio en todos los puntos interiores de la estructura y las condiciones de equilibrio en la superficie exterior de la misma. También se han definido los corrimientos y las deformaciones, estableciéndose las relaciones entre ellas. Y por último se han formulado las relaciones entre las deformaciones y las tensiones.

Para resolver el problema estructural disponemos de:

- Ecuaciones de Equilibrio Interno **EEI**
- Ecuaciones de Equilibrio en el Contorno **EEC**
- Ecuaciones de Compatibilidad **EC**
- Ley de Hooke Generalizada **LHG**

Para una estructura determinada conocemos:

- El material constitutivo
- Las fuerzas de masa
- Las cargas externas (condiciones de contorno estáticas)
- Los vínculos (condiciones de contorno cinemáticas)

# PROBLEMA ELÁSTICO

## Solución en Corrimientos

**EEI**

$$(\lambda + G)\,\frac{\partial e}{\partial x} + G\,\nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + G)\,\frac{\partial e}{\partial y} + G\,\nabla^2\, v + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\,\frac{\partial e}{\partial z} + G\,\nabla^2\, w + Z = 0$$

**EEC**

$$\lambda\, e\, l + G\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial x} + n\frac{\partial w}{\partial x}\right) = X_c$$

$$\lambda\, e\, m + G\left(l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial y} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial y}\right) = Y_c$$

$$\lambda\, e\, n + G\left(l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(l\frac{\partial u}{\partial z} + m\frac{\partial v}{\partial z} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right) = Z_c$$

**EC**

Identidad

**Definición**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

**Ley de Hooke**

$$\sigma_x = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}$$

$$\sigma_z = \lambda\, e + 2\, G\, \varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

**Parámet. / Constantes / Op.**

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu\, E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# PROBLEMA ELÁSTICO

## Solución en Tensiones

**EEI**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

**EEC**

$$\sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = X_c$$

$$\tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n = Y_c$$

$$\tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n = Z_c$$

**EC (Ec. Beltrami masa cte)**

$$(1+\nu)\,\nabla^2\sigma_x = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\sigma_y = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\sigma_z = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\tau_{xy} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\tau_{xz} = \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x}$$

$$(1+\nu)\,\nabla^2\tau_{yz} = \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial y}$$

**Ley de Hooke**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

**Definición**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

**Parámet. / Constantes / Op.**

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# PROBLEMA ELÁSTICO

Métodos de Solución

Métodos Clásicos
T. Elasticidad

Solución Analítica del Problema
Estructural

Solución en Corrimientos
E3D: Torsión Simple piezas prismáticas

Solución en Tensiones
E3D: Compresión/Flexión Simple
E2D: Tensión/Deformación Plana
P. Boussinesq. Tubo P. Gruesa
Función de Tensión

Método
Diferencias Finitas

Solución Aproximada
Discretización Campo Incógnita

C. Incógnita Tensiones
E3D: Torsión Simple

C. Incógnita Corrimientos
E2D: Placas Planas

Método
Elementos Finitos
(FEM DB)

Solución Aproximada
Discretización
Geometría y Campo Incógnita

C. Incógnita Corrimientos
E3D: Todas
E2D: Todas

# UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

El problema estructural, abordado con las ecuaciones de la Elasticidad (mecánica de medios continuos aplicada a sólidos elásticos) tiene solución, es única y corresponde un estado de equilibrio estable.

Consideremos dos sistemas de fuerzas, uno de fuerzas de masa $X, Y, Z$ y otro de fuerzas de superficie $X_c$ , $Y_c$ , $Z_c$ ; un sistema de tensiones $\sigma$ y $\tau$ en equilibrio con ambos sistemas de fuerzas.

Por otro lado, consideremos un sistema de corrimientos, pequeños y arbitrario $\delta u$ , $\delta v$ , $\delta w$, que son independientes del sistema en equilibrio.

Multiplicando los corrimientos arbitrarios $\delta u$ , $\delta v$ , $\delta w$, por las fuerzas de masa y de contorno e integrando y sumando.

$$a = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dxdydz \qquad b = \iint_S (X_c\delta u + Y_c\delta v + Z_c\delta w)\, dS$$

EEC: $\sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = X_c \qquad \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n = Y_c \qquad \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n = Z_c$

$$b = \iint_S \left[(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n)\delta u + (\tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n)\delta v + (\tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n)\delta w\right] dS$$

# UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

$$b = \iint_S \left[(\sigma_x \delta u + \tau_{xy}\delta v + \tau_{zx}\delta w)\, l + (\tau_{yx}\delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz}\delta w)\, m \; + (\tau_{zx}\delta u + \tau_{zy}\delta v + \sigma_z \delta w) n\right] dS$$

$$b = \iint_S \left[f1(x,y,z)\, l + f2(x,y,z)\, m \; + f3(x,y,z) n\right] dS$$

S/T. de Green $\quad \iint_S (f1\, cos\alpha + f2 \cos\beta \; + f3\, cos\gamma)\, dS = \iiint_V \left(\frac{\partial f1}{\partial x} + \frac{\partial f2}{\partial y} + \frac{\partial f3}{\partial z}\right) dxdydz$

Como: $\quad \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x \delta u = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta u + \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x}$

Reemplazando, teniendo en cuenta las EEI y la definición de las deformaciones normales

$$b = \iiint_V \left(\sigma_x \partial\varepsilon_x + \sigma_y \partial\varepsilon_y + \sigma_z \partial\varepsilon_z + \tau_{xy}\partial\gamma_{xy} + \tau_{xz}\partial\gamma_{xz} + \tau_{yz}\partial\gamma_{yz}\right) dxdydz$$

$$b = \iiint_V \left[2G(\varepsilon_x \partial\varepsilon_x + \varepsilon_y \partial\varepsilon_y + \varepsilon_z \partial\varepsilon_z) + \lambda\, e\, \delta e + G(\gamma_{xy}\partial\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\partial\gamma_{xz} + \gamma_{yz}\partial\gamma_{yz})\right] dxdydz$$

$$a + b = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dxdydz \; +$$

$$+ \iiint_V \left[2G(\varepsilon_x \partial\varepsilon_x + \varepsilon_y \partial\varepsilon_y + \varepsilon_z \partial\varepsilon_z) + \lambda\, e\, \delta e + G(\gamma_{xy}\partial\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\partial\gamma_{xz} + \gamma_{yz}\partial\gamma_{yz})\right] dxdydz$$

# UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

$$a + b = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dxdydz +$$

$$+ \iiint_V \left[2G\left(\varepsilon_x \partial\varepsilon_x + \varepsilon_y \partial\varepsilon_y + \varepsilon_z \partial\varepsilon_z\right) + \lambda\, e\, \delta e + G\left(\gamma_{xy}\partial\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\partial\gamma_{xz} + \gamma_{yz}\partial\gamma_{yz}\right)\right] dxdydz$$

Admitiendo que el sistema puede tener dos soluciones distintas para los mismos desplazamientos arbitrarios, restando m.am. resulta:

$$\iiint_V \Big[\, 2G\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_x{}')\partial\varepsilon_x + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_y{}'\right)\partial\varepsilon_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_z{}')\partial\varepsilon_z\right] + \lambda\,(e - e')\,\delta e$$
$$+ G\left[\left(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}{}'\right)\partial\gamma_{xy} + (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}{}')\partial\gamma_{xz} + \left(\gamma_{yz} - \gamma_{yz}{}'\right)\partial\gamma_{yz}\right]\Big]\, dxdydz = 0$$

Para satisfacerla

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_x{}') = \left(\varepsilon_y - \varepsilon_y{}'\right) = (\varepsilon_z - \varepsilon_z{}') = \left(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}{}'\right) = (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}{}') = \left(\gamma_{yz} - \gamma_{yz}{}'\right) = 0$$

Existe una única primera solución estable

# SUPERPOSICIÓN DE EFECTOS

Consideremos una estructura con un estado inicial nulo, es decir, que tanto las fuerzas, tensiones como las deformaciones son nulas.

Aplicando sobre la estructura un sistema de cargas, le corresponderán ciertos corrimientos, deformaciones y tensiones que satisfacen las ecuaciones elásticas.

Aplicando sobre la misma estructura, en estado nulo, otro sistema de cargas, le corresponderá otro conjunto de corrimientos, deformaciones y tensiones.

Como se ha visto tanto las tensiones como las deformaciones en un punto son funciones lineales homogéneas de las cargas, debido a las hipótesis adoptadas.

Por dicho, el efecto de la superposición de las cargas de los dos estado considerados anteriormente, provoca un estado de deformaciones y tensiones igual a la suma de las deformaciones y las tensiones calculadas para cada estado de carga en forma independiente.

# PRINCIPIO DE SAINT VENANT

En la práctica del análisis de estructuras, en muchos casos se conoce la resultante de fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie de estas.

Se asume como hipótesis que se pueden obtener resultados con una buena aproximación considerando que esas fuerzas concentradas se distribuyen según las funciones que forman parte de la solución del problema estructural.

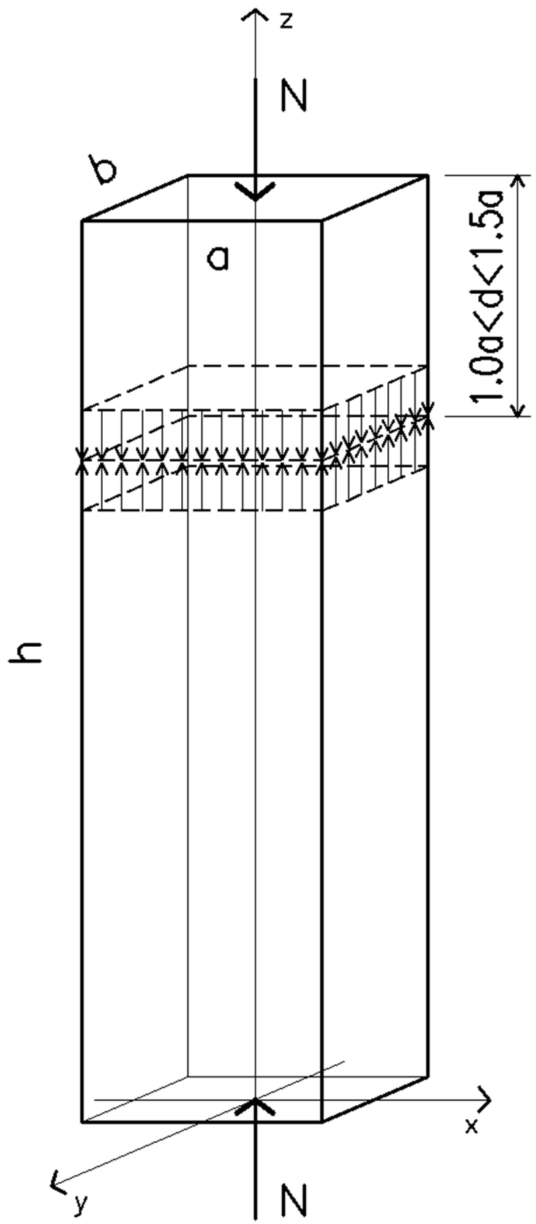
Como la solución debe satisfacer todas las ecuaciones elásticas, incluyendo las EEC, la resultante de las tensiones en el contorno debe equilibrar a las cargas concentradas aplicadas.

Esta hipótesis conduce al Principio de Saint Venant

# PRINCIPIO DE SAINT VENANT

*A una distancia suficientemente grande, respecto de las dimensiones locales de la estructura, de la zona donde actúan las cargas exteriores, las tensiones siguen la distribución hallada en la solución del problema estructural.*

La distancia considerada es de 1.0 a 1.5 veces la mayor dimensión local de la estructura



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

# ANALISIS ESTRUCTURAL II

**Fin U2**