UNIDAD 1
Funciones vectoriales de varias variables reales
Matemática para Computación

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Recorrido

Recorrido

Trayectorias y curvas

Definición (Definición: Trayectoria y curva)

Una trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$;

Trayectorias y curvas

Definición (Definición: Trayectoria y curva)

Una trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$.

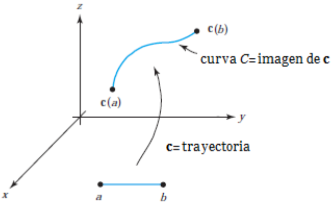
Trayectorias y curvas

Definición (Definición: Trayectoria y curva)

Una trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**.

Definición (Definición: Trayectoria y curva)

Una trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**. Se dice que la trayectoria o camino $\mathbf{c}$ **parametriza** la curva C. Decimos también que $\mathbf{c}(t)$ traza C al variar t. Si $\mathbf{c}$ es un camino en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ **funciones componentes** de $\mathbf{c}$. Las funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o, en general, en $\mathbb{R}^n$, se definen de forma similar.



Ejemplos

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.

Ejemplos

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.

  1. $\mathbf{c}(t) = (1, 2) + t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.
  1. $\mathbf{c}(t) = (1, 2) + t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $t \in \mathbb{R}$.
  2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejemplos

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.
  1. $\mathbf{c}(t) = (1,2) + t(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, $t \in \mathbb{R}$.
  2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
  3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

Ejemplos

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.
  1. $\mathbf{c}(t) = (1,2) + t(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ t \in \mathbb{R}.$
  2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
  3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$
  4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.
  1. $\mathbf{c}(t) = (1, 2) + t(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ t \in \mathbb{R}$.
  2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.
  3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$.
  4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$.
  5. $\mathbf{c}(t) = (t, f(t)), \quad t \in D(f) \subset \mathbb{R}$.

Ejemplos

- En cada uno de los siguientes ejemplos, dar dominio, codominio y/o imagen, graficar, si se puede, y dar, si se puede, otra trayectoria que describa la misma curva.
  1. $\mathbf{c}(t) = (1, 2) + t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $t \in \mathbb{R}$.
  2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.
  3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$.
  4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}$.
  5. $\mathbf{c}(t) = (t, f(t)), \quad t \in D(f) \subset \mathbb{R}$.
- Dar una trayectoria $\mathbf{c}$ parametrice a la recta L de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene vector director $\mathbf{v}$.

Definición

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria y es diferenciable, decimos que $\mathbf{c}$ es una **trayectoria diferenciable**. En tal caso, la derivada de $\mathbf{c}$ en el instante t se llama velocidad y se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$$

(y tomamos límites laterales si t está en un extremo del intervalo de definición de $\mathbf{c}$). La *rapidez* de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad.

Definición

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria y es diferenciable, decimos que $\mathbf{c}$ es una **trayectoria diferenciable**. En tal caso, la derivada de $\mathbf{c}$ en el instante t se llama velocidad y se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$$

(y tomamos límites laterales si t está en un extremo del intervalo de definición de $\mathbf{c}$). La *rapidez* de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad.

Trazamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ está en $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

y, si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

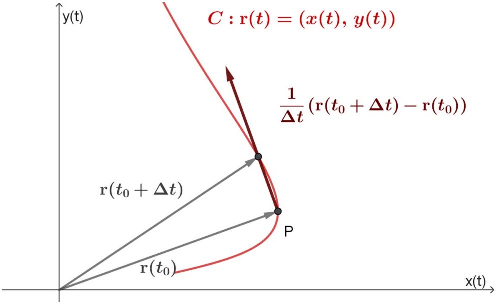
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a, b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



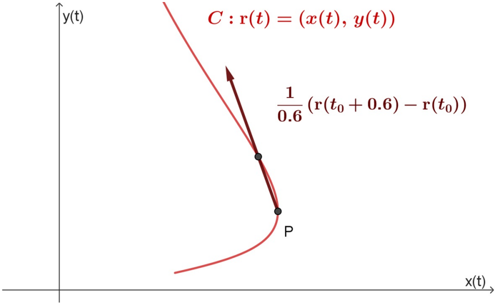
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a,b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



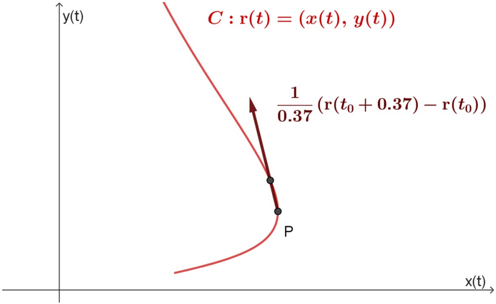
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a, b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



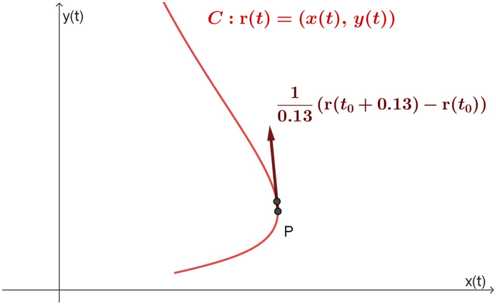
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a, b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



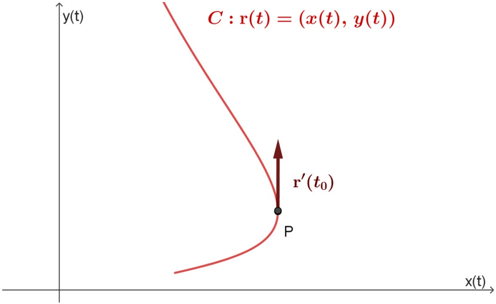
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a, b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



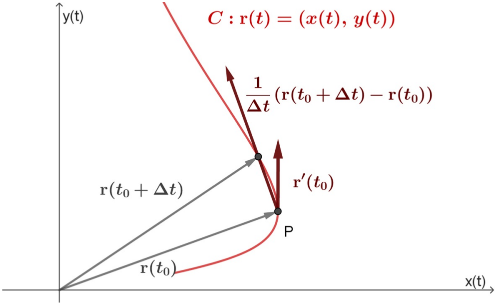
Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Definición

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $t_0 \in (a, b)$.
La derivada de $\mathbf{c}$ con respecto a t en t_0 es

$$\mathbf{c}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{c}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



Teorema

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una trayectoria (función vectorial) tal que* $\mathbf{c} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.

Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Teorema

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una trayectoria (función vectorial) tal que* $\mathbf{c} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{c}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,*
$\mathbf{c}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Derivación de trayectorias (funciones vectoriales)

Teorema

Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una trayectoria (función vectorial) tal que* $\mathbf{c} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{c}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,*
$\mathbf{c}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

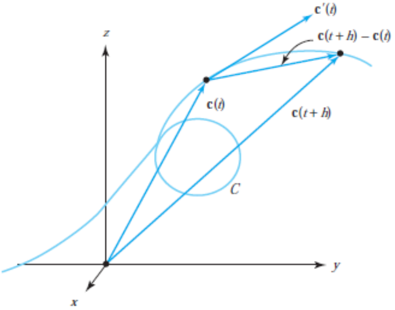
Observación: se puede definir $\mathbf{c}'(a)$ y $\mathbf{c}'(b)$ usando derivadas laterales, igual que en AM1.

Teorema

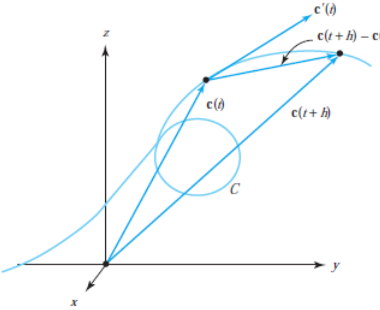
Supongamos que $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una trayectoria (función vectorial) tal que* $\mathbf{c} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{c}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,*
$\mathbf{c}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Observación: se puede definir $\mathbf{c}'(a)$ y $\mathbf{c}'(b)$ usando derivadas laterales, igual que en AM1.
SIN DEMOSTRAR

Interpretación gráfica



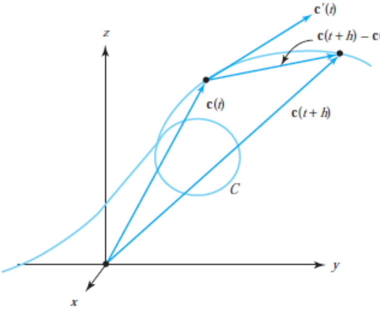
Interpretación gráfica



Definición (Definición: Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es una curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

Interpretación gráfica



Definición (Definición: Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es una curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

La derivada $\mathbf{Dc}(t)$ es una matriz columna, cuyas componentes son las derivadas de las funciones componentes de $\mathbf{c}$: $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$.

Ejemplos

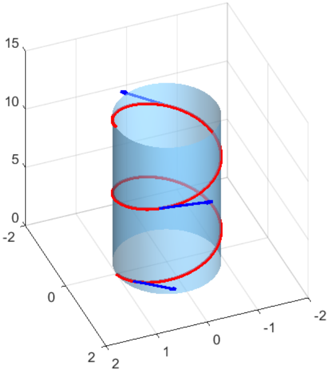
1. Hallar y representar el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$, en el punto $t = 1$.

Ejemplos

1. Hallar y representar el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$, en el punto $t = 1$.
2. Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Hallar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \frac{\pi}{6}$.

Ejemplos

1. Hallar y representar el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$, en el punto $t = 1$.
2. Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Hallar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \frac{\pi}{6}$.



Recta tangente a una trayectoria

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la recta que traza $\mathbf{l}$ es la **recta tangente a la curva** C en $\mathbf{c}(t_0)$.

Recta tangente a una trayectoria

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la recta que traza $\mathbf{l}$ es la **recta tangente a la curva** C en $\mathbf{c}(t_0)$.

Observación: $\mathbf{l}$ pasa por $\mathbf{c}(t_0)$ en $t = t_0$ (que no es necesariamente $t = 0$).

Recta tangente a una trayectoria

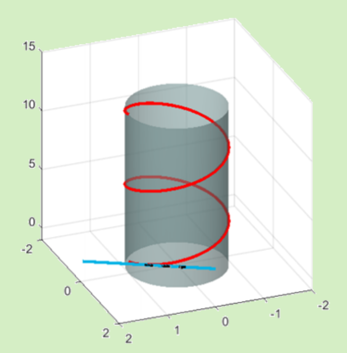
Ejemplo

Recta tangente a la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $t = \frac{\pi}{6}$:

Recta tangente a una trayectoria

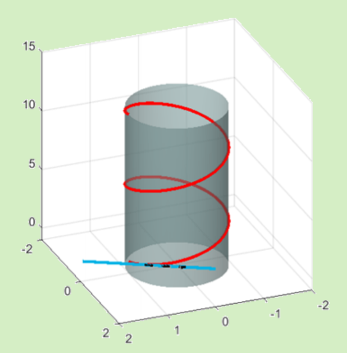
Ejemplo

Recta tangente a la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $t = \frac{\pi}{6}$:



Ejemplo

Recta tangente a la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $t = \frac{\pi}{6}$:



$$\mathbf{c}(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}) + t(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1),\ t \in \mathbb{R}.$$

Recorrido

Sumas, productos y cocientes

Teorema (Propiedades)

1. **Multiplicación por una constante**. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* c *un número real. Entonces* $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(igualdad de matrices).}$$

2. **Suma**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$*. Entonces* $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(suma de matrices).}$$

3. **Producto**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$*. Entonces* $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$*).*

Teorema (Teorema (cont.))

4. **Cociente**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ *y supóngase que* g *nunca se anula en* U*. Entonces* $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$*).*

Sumas, productos y cocientes

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices).}$$

Sumas, productos y cocientes

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices).}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} & \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|c|\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= |c| \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= 0 \qquad \text{por ser } f \text{ diferenciable en } \mathbf{x}_0.
\end{aligned}$$

Sumas, productos y cocientes

Dem 2: Sean f y g definidas de $U \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, diferenciables en $\mathbf{x}_0$. Y sea $h = f + g$.

$$\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} =$$

$$= \frac{\|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(x_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$\leq \underbrace{\frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}_{\xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0]{} 0} + \underbrace{\frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}_{\xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0]{} 0}$$

por ser f y g diferenciables en $\mathbf{x}_0$.

Regla de la cadena

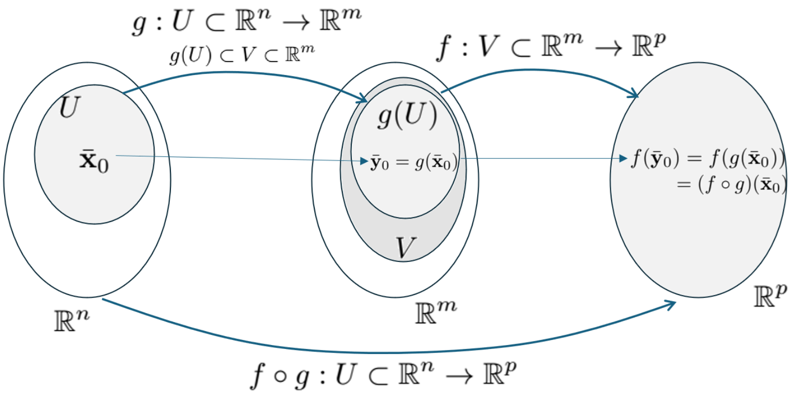
Teorema (Regla de la cadena)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ *y* $V \subset \mathbb{R}^m$ *conjuntos abiertos. Sean* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *funciones tales que* $g(U) \subset V$*, de tal forma que* $f \circ g$ *esté definida. Supóngase que* g *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y que* f *es diferenciable en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$*. Entonces* $f \circ g$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

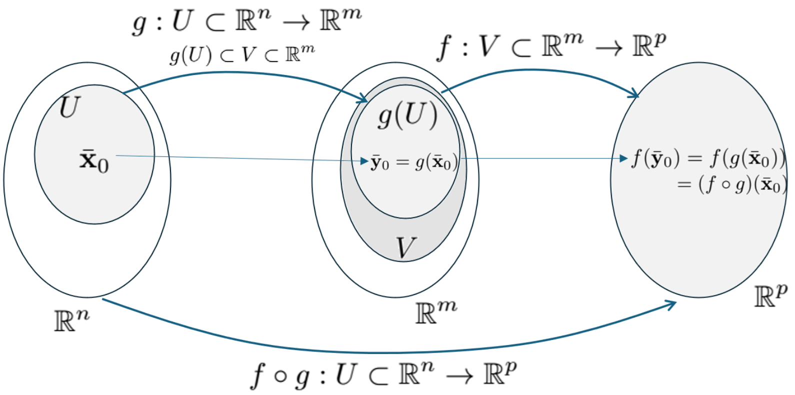
$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

El segundo miembro es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ *y* $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$*.*

Regla de la cadena



Regla de la cadena



Solo probaremos dos casos particulares de esta regla en cuanto a dimensiones de los espacios intervinientes y supondremos que las derivadas parciales de f son continuas.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *es una trayectoria diferenciable y que* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales continuas.*

Primer caso especial de la regla de la cadena

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *es una trayectoria diferenciable y que* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales continuas. Sea* $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, *donde* $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. *Entonces*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

Primer caso especial de la regla de la cadena

Teorema (Regla de la cadena: primer caso especial)

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *es una trayectoria diferenciable y que* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales continuas. Sea* $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, *donde* $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. *Entonces*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

Observación:

$\dfrac{dh}{dt}, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ y $\dfrac{dz}{dt}$ son derivadas totales; las restantes, son parciales.

$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ es matriz fila y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ es matriz columna.

Demotración: primer caso especial de la regla de la cadena.

Dados t_0 y t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} &= \frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}\\ &= \frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t),z(t))}{t-t_0}\\ &\quad+\frac{f(x(t_0),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t))}{t-t_0}\\ &\quad+\frac{f(x(t_0),y(t_0),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{f_x(c,y(t),z(t))(x(t)-x(t_0))}{t-t_0}+\frac{f_y(x(t_0),d,z(t))(y(t)-y(t_0))}{t-t_0}\\ &\quad+\frac{f_z(x(t_0),y(t_0),e)(z(t)-z(t_0))}{t-t_0} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \nabla f(\mathbf{c}(t_0))\cdot\mathbf{c}'(t_0),\end{aligned}$$

por continuidad de las derivadas parciales de f y existencia de $\mathbf{c}'$. $\square$

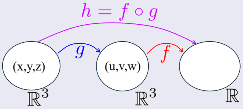
Teorema (Regla de la cadena: segundo caso especial)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y sea* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Teorema (Regla de la cadena: segundo caso especial)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y sea* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*. Escribimos*

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$



y definimos $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *por medio de*

$$h(x, y, z) = (f \circ g)(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

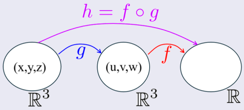
En este caso la regla de la cadena dice que h *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y:*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Teorema (Regla de la cadena: segundo caso especial)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *y sea* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. *Escribimos*

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$



y definimos $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *por medio de*

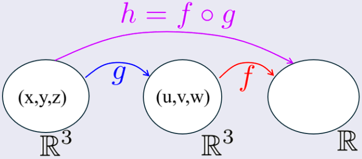
$$h(x, y, z) = (f \circ g)(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice que h *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y:*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)]\,[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$, *pero se han omitido los puntos* $\mathbf{x}_0$ *así como los puntos* $\mathbf{y}_0$ *en las matrices.*

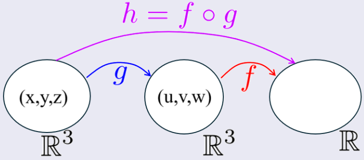
Demotración: segundo caso especial de la regla de la cadena.



Al derivar $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, y y z se portan como constantes. Así, de acuerdo al primer caso especial de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Demotración: segundo caso especial de la regla de la cadena.



Al derivar $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, y y z se portan como constantes. Así, de acuerdo al primer caso especial de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Similarmente,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Estas tres fórmulas terminan la prueba ya que equivalen a la multiplicación de las matrices en el enunciado de esta regla. □

Recorrido

1. Introducción a trayectorias y curvas
2. Propiedades de la derivada
3. Gradientes y derivadas direccionales
4. Funciones vectoriales nuevamente
   - Diferenciación de trayectorias
   - Longitud de arco
5. Campos vectoriales

Gradientes en $\mathbb{R}^n$

Definición

Definición: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales, el gradiente de f en $\mathbf{x}_0$ es el vector dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(\mathbf{x})$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Definición

Definición: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales, el gradiente de f en $\mathbf{x}_0$ es el vector dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(\mathbf{x})$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, entonces

$$\nabla f(x, y) =$$

Definición

Definición: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales, el gradiente de f en $\mathbf{x}_0$ es el vector dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

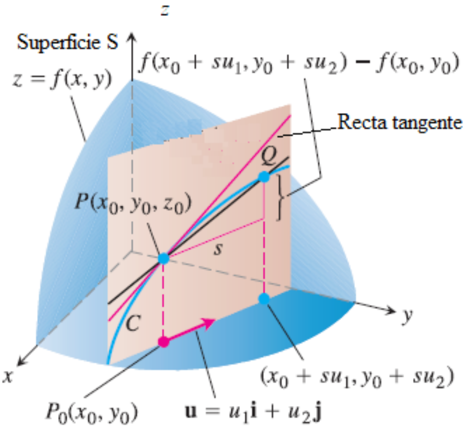
Este vector también se denota por $\nabla f(\mathbf{x})$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, entonces

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

Derivadas direccionales

Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ interesa conocer la razón de cambio de f en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$:



Generaliza el concepto de derivada parcial. Ver gif.

Derivadas direccionales

Definición

Definición Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **derivada direccional** de f en $\mathbf{x}$ en la dirección del vector **unitario** $\mathbf{u}$ es

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})\right|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

siempre que exista.

Diferenciabiliad implica existencia de derivadas direccionales

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable,* **entonces** *todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en* $\mathbf{x}$ *en la dirección* $\mathbf{u}$ *es:*

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *es unitario.*

Diferenciabiliad implica existencia de derivadas direccionales

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable,* **entonces** *todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en* $\mathbf{x}$ *en la dirección* $\mathbf{u}$ *es:*

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *es unitario.*

Dem:

Sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{u}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) = f(\mathbf{c}(t))$. Aplicando la regla de la cadena, podemos derivar

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

$\square$

Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2, 1)$ tenemos: $\nabla f(2, 1) =$

Ejemplo

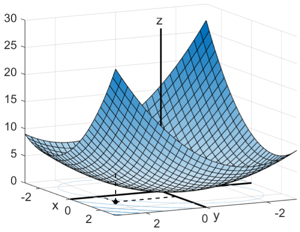
Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

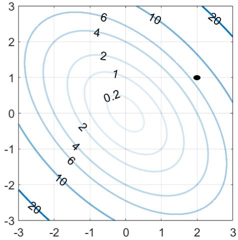
$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2,1)$ tenemos: $\nabla f(2,1) = (5,4)$





Ejemplo

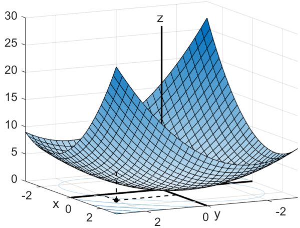
Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

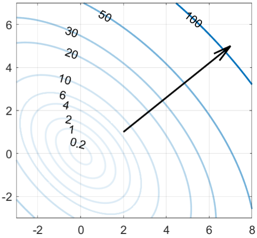
$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2,1)$ tenemos: $\nabla f(2,1) = (5,4)$





Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2, 1)$ tenemos: $\nabla f(2, 1) = (5, 4)$.

Ejemplo

Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2,1)$ tenemos: $\nabla f(2,1) = (5,4)$.

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} =$$

Ejemplo

Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2,1)$ tenemos: $\nabla f(2,1) = (5,4)$.

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (5,4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

Ejemplo

Dada $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, recordando que

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$$

y que f es diferenciable en su dominio, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en un punto arbitrario de su dominio es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2.$$

En el punto $(2,1)$ tenemos: $\nabla f(2,1) = (5,4)$.

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (5,4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{u} = (1,0) \Rightarrow \nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = 5; \; \mathbf{u} = (0,-1) \Rightarrow \nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = -4.$$

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema (Dirección de máximo crecimiento)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\nabla f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección de máximo crecimiento de* f.

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema (Dirección de máximo crecimiento)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\nabla f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección de máximo crecimiento de* f.

Dem:

Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$.

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema (Dirección de máximo crecimiento)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\nabla f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección de máximo crecimiento de* f.

Dem:

Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos. $\square$

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema (Dirección de máximo crecimiento)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

Dem:

Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos. $\square$

Observación: Cuando $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, esta variación es 0 para todo $\mathbf{n}$.

Ejemplo

Dados $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario,

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y),$$

la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2;\ \nabla f(2,1) = (5,4).$$

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} =$$

Ejemplo

Dados $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario,

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y),$$

la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2; \; \nabla f(2,1) = (5,4).$$

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (5,4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

Ejemplo

Dados $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario,

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y),$$

la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2; \ \nabla f(2,1) = (5,4).$$

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (5,4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

La dirección de máximo crecimiento de f en $(2,1)$ es

Ejemplo

Dados $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario,

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y),$$

la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2; \; \nabla f(2,1) = (5,4).$$

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (5,4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

La dirección de máximo crecimiento de f en $(2,1)$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(2,1)}{\|\nabla f(2,1)\|}$$

y, en este caso, la derivada direccional es

Ejemplo

Dados $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario,

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y),$$

la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = (2x + y)u_1 + (x + 2y)u_2; \; \nabla f(2, 1) = (5, 4).$$

La derivada direccional en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$\nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{u} = (5, 4) \cdot (u_1, u_2) = 5u_1 + 4u_2$$

La dirección de máximo crecimiento de f en $(2, 1)$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(2, 1)}{\|\nabla f(2, 1)\|}$$

y, en este caso, la derivada direccional es

$$\nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{u} = \nabla f(2, 1) \cdot \frac{\nabla f(2, 1)}{\|\nabla f(2, 1)\|} = \frac{\|\nabla f(2, 1)\|^2}{\|\nabla f(2, 1)\|} = \|\nabla f(2, 1)\| = \sqrt{41}$$

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

Ejemplo

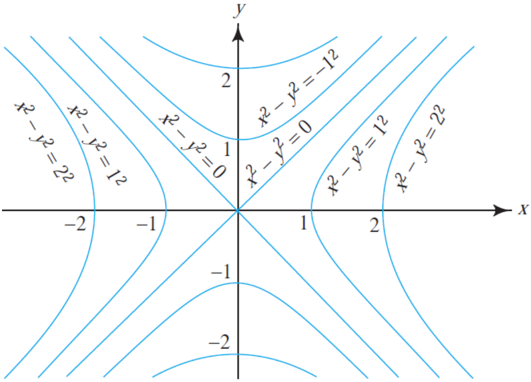
¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

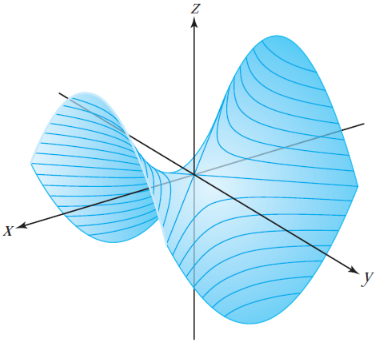
$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$





Ejemplo

¿En qué dirección decrece más rápidamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0,1)$?

Ejemplo

¿En qué dirección decrece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$-\nabla f(0, 1) = (0, 2).$$

¿En qué dirección la tasa de cambio promedio de f en $(0, 1)$ es 0?

$$\nabla f(0, 1) \cdot \mathbf{u} = (0, -2) \cdot (u_1, u_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} =$$

Ejemplo

¿En qué dirección decrece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$-\nabla f(0, 1) = (0, 2).$$

¿En qué dirección la tasa de cambio promedio de f en $(0, 1)$ es 0?

$$\nabla f(0, 1) \cdot \mathbf{u} = (0, -2) \cdot (u_1, u_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = (1, 0).$$

Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$ para una constante k. Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si $\mathbf{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$.)

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

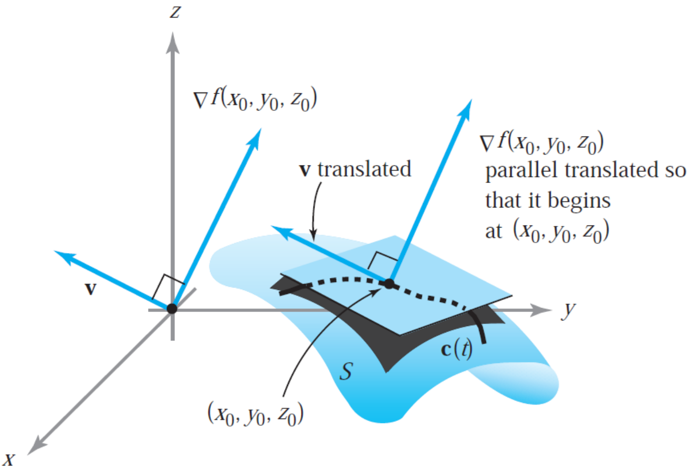
Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una aplicación de clase* C^1 *y sea* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *un punto de la superficie de nivel* S *definida por* $f(x, y, z) = k$ *para una constante* k*. Entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si* $\mathbf{v}$ *es el vector tangente en* $t = 0$ *de una trayectoria* $\mathbf{c}(t)$ *en* S *con* $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$*, entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$*.)*

Dem: Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria en S, con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0 \in S$. Entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$ y, si $\mathbf{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de $\mathbf{c}(t)$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Como $f(\mathbf{c}(t))$ es constante en t, $\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = 0$ y, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel



Planos tangentes a superficies de nivel

Definición

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Planos tangentes a superficies de nivel

Definición

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{1}$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Observación: de forma similar se define recta tangente a una curva de nivel de una función de dos variables.

Ejemplo: plano tangente a superficie de nivel

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

a) Representar algunas superficies de nivel.

b) Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel en el punto $P(1, 0, 0)$ y en el punto $Q(0, 0, 0)$.

Ejemplo: plano tangente a superficie de nivel

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2$$

a) Representar algunas superficies de nivel.

b) Ecuación del plano tangente a la superficie de nivel en el punto $P(1,0,0)$ y en el punto $Q(0,0,0)$.

b) $x = 1$, en el primer caso. En el segundo, no existe.

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x,y)$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x,y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x,y,z) = 0$ para la función $g(x,y,z) = f(x,y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0,y_0)) = 0$$
$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Obs: relacionar con la linealización de f en (x_0, y_0).

Ejemplo: plano tangente a superficie de nivel y al gráfico de una función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$a)$ Representar.

$b)$ Ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P(1, 0, 0)$ y en el punto $Q(0, 0, 0)$.

Ejemplo: plano tangente a superficie de nivel y al gráfico de una función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Representar.

b) Ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P(1, 0, 0)$ y en el punto $Q(0, 0, 0)$.

b) De $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$,

$$z = 1 + 2(x - 1) + 0(y - 0),\ z = 2x - 1;$$

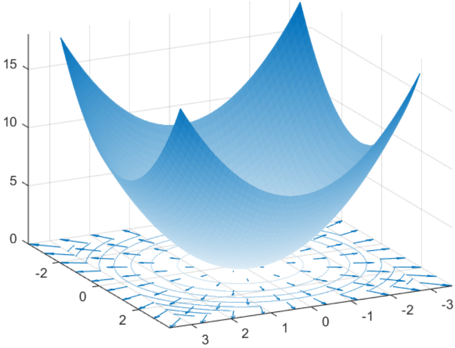
$$z = 0 + 0(x - 1) + 0(y - 0),\ z = 0.$$

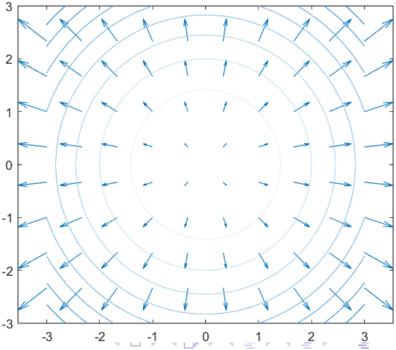
Campo vectorial gradiente

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales en todos los puntos de D,

- se puede definir el campo vectorial gradiente de f, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ por medio de $(x, y) \mapsto \nabla f(x, y)$.
- Además, si bien su gráfico es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, se puede representar $\nabla f(x, y)$ en cada punto $(x, y) \in D$.

Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$



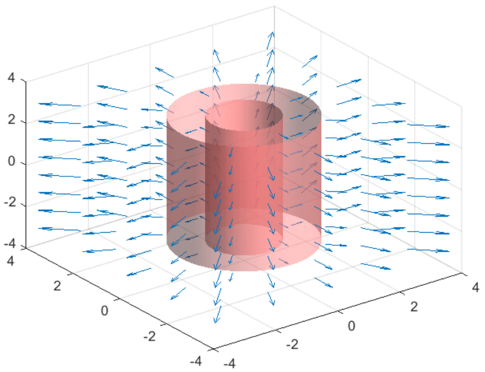


Campo vectorial gradiente

Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales en todos los puntos de D,

- se puede definir el campo vectorial gradiente de f, de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ por medio de $(x, y, z) \mapsto \nabla f(x, y, z)$.
- Además, si bien su gráfico es un subconjunto de $\mathbb{R}^6$, se puede representar $\nabla f(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in D$.

Ejemplo: $f(x, y, z) = x^2 + y^2$



Recorrido

Recorrido

Reglas de derivación de funciones vectoriales

Teorema (Propiedades)

Sean $\mathbf{b}(t)$ *y* $\mathbf{c}(t)$ *trayectorias diferenciables en* $\mathbb{R}^3$ *y sean* $p(t)$ *y* $q(t)$ *funciones escalares diferenciables. Entonces:*

$$\text{Regla de la suma}: \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) + \mathbf{c}'(t).$$

$$\text{Mult. por escalar}: \quad \frac{d}{dt}[p(t)\mathbf{c}(t)] = p'(t)\mathbf{c}(t) + p(t)\mathbf{c}'(t).$$

$$\text{Prod. escalar}: \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

$$\text{Prod. vectorial}: \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}'(t).$$

$$\text{Regla de la cadena}: \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(q(t))] = q'(t)\mathbf{c}'(q(t)).$$

Funciones vectoriales de magnitud constante

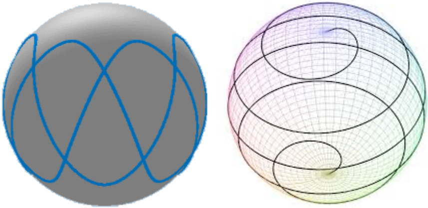
Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathbf{r}(t)| = cte$ *en* $[a, b]$*), entonces* $\mathbf{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathbf{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a, b]$.

Funciones vectoriales de magnitud constante

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathbf{r}(t)| = cte$ *en* $[a,b]$*), entonces* $\mathbf{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathbf{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a,b]$.



DEMOSTRAR

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$.

Derivación de funciones vectoriales

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$.

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$. Luego $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = k^2$.

Derivación de funciones vectoriales

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$. Luego $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = k^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

Derivación de funciones vectoriales

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$. Luego $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = k^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0 \\ 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0, \end{aligned}$$

Derivación de funciones vectoriales

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$. Luego $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = k^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0 \\ 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\mathbf{c}(t)$ y $\mathbf{c}'(t)$ son ortogonales para todo $t \in [a, b]$. $\square$

Demostración.

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{c}(t)| = k$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{c}(t)|^2 = k^2$. Luego $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t) = k^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

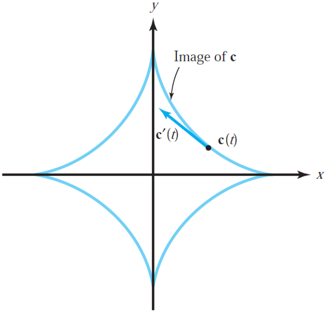
$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0 \\ 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\mathbf{c}(t)$ y $\mathbf{c}'(t)$ son ortogonales para todo $t \in [a, b]$. □

Si $\mathbf{c}(t)$ describe la posición de un móvil en función del tiempo, la velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{c}'(t)$ y la aceleración es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{c}''(t)$.

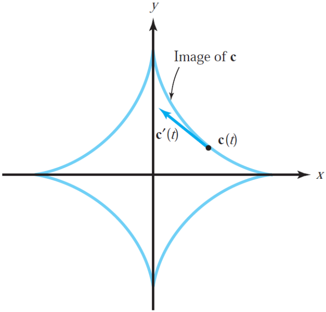
Trayectorias regulares

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$$



Trayectorias regulares

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$$



Definición (Trayectoria regular)

Una trayectoria diferenciable $\mathbf{c}$ es regular en t_0 si $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Si $\mathbf{c}$ es diferenciable y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t, se dice que $\mathbf{c}$ es regular. En este caso la curva imagen tiene un aspecto suave.

Recorrido

Definición

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, una trayectoria C^1 a trozos. Su longitud se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_1(t))^2 + \cdots + (x_n(t))^2} dt.$$

Definición

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, una trayectoria C^1 a trozos. Su longitud se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_1(t))^2 + \cdots + (x_n(t))^2} dt.$$

Un desplazamiento infinitesimal de una partícula que sigue una trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$ es

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt,$$

Definición

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, una trayectoria C^1 a trozos. Su longitud se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_1(t))^2 + \cdots + (x_n(t))^2} dt.$$

Un desplazamiento infinitesimal de una partícula que sigue una trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$ es

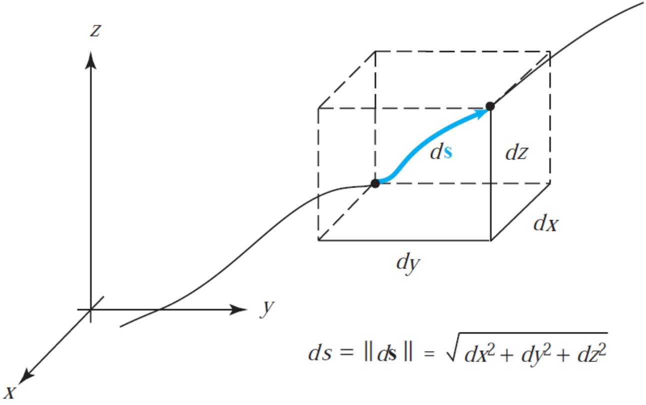
$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt,$$

y su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

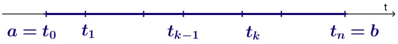
es la diferencial de la longitud de arco.

Desplazamiento infinitesimal y diferencial longitud de arco



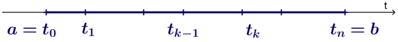
Longitud de arco

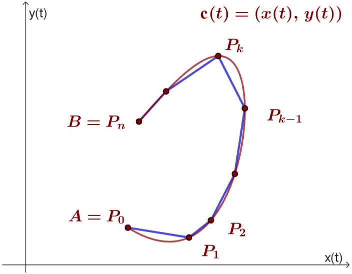
Supongamos que $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, es regular.



Longitud de arco

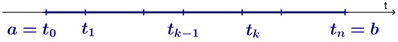
Supongamos que $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, es regular.

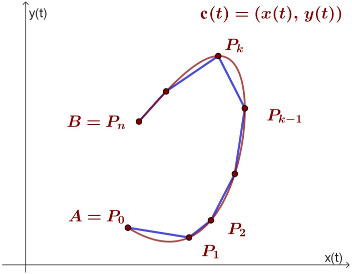




Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, es regular.

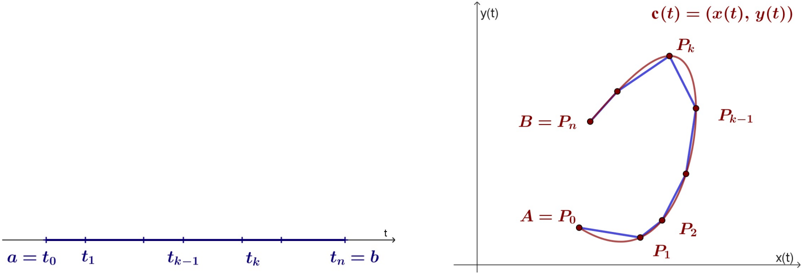




Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, genera una poligonal que aproxima a la imagen de $\mathbf{c}$.

Longitud de arco

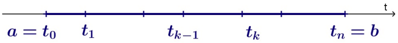
Supongamos que $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, es regular.

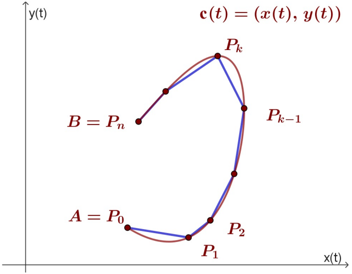


Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, genera una poligonal que aproxima a la imagen de $\mathbf{c}$.
Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k.

Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, es regular.

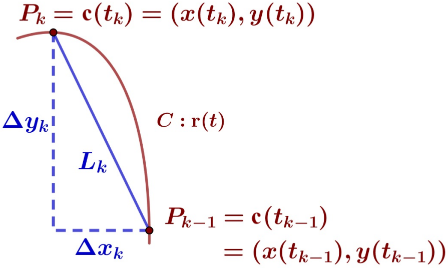




Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, genera una poligonal que aproxima a la imagen de $\mathbf{c}$.
Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k. Sumaremos las longitudes de los segmentos L_k, con extremos en los puntos $P_{k-1} = \mathbf{c}(t_{k-1})$ y $P_k = \mathbf{c}(t_k)$, para $k = 1, ..., n$.

Longitud de arco

Se aproxima la longitud de cada subarco con la longitud del segmento L_k:



$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Si las funciones componentes de $\mathbf{c}$, $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen (cada) hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces existen puntos t_k^* y t_k^{**} en (t_{k-1}, t_k) tales que

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = x'(t_k^*)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^{**})(t_k - t_{k-1}) = y'(t_k^{**})\Delta t_k$$

Así $$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*)\Delta t_k)^2 + (y'(t_k^{**})\Delta t_k)^2}$$

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** C, imagen de la trayectoria regular $\mathbf{c}$, se aproxima por

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k.$$

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** C, imagen de la trayectoria regular $\mathbf{c}$, se aproxima por

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k.$$

Aunque esta no es una suma de Riemann, si las funciones x' y y' son continuas en $[a, b]$, el límite para $n \to \infty$ es la integral. Por esto:

Longitud de arco de una curva suave

La longitud de arco de una curva suave (plana o en el espacio) dada por $\mathbf{c}(t)$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Función longitud de arco

Definición

Dada una trayectoria $\mathbf{c}$, $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $\mathbf{c}(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\| du.$$

Función longitud de arco

Definición

Dada una trayectoria $\mathbf{c}$, $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $\mathbf{c}(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\| du.$$

Observación: debe notarse que si la trayectoria es regular se satisfacen las hipótesis del T.F. del cálculo. Luego se tiene que s es derivable en cada $t \in [a, b]$ y

$$s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|.$$

Además, se comprueba que $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

Recorrido

Definición

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ se llama campo vectorial en el plano y, si $n = 3$, campo vectorial en el espacio.

Cada componente de $\mathbf{F}$ es un campo escalar (una función con imágenes reales).

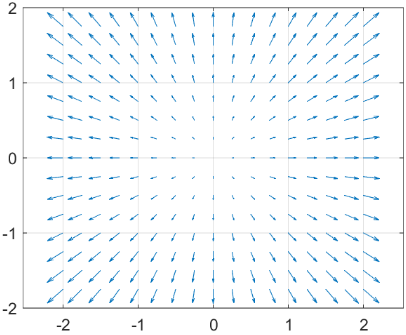
Ejemplos

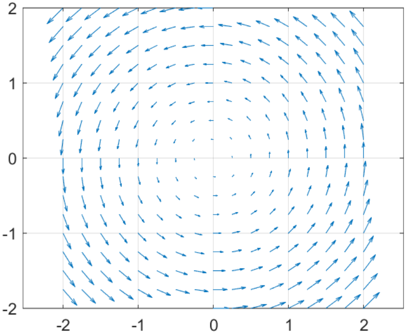
1. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

Ejemplos

1. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.
2. $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Las funciones componentes son $f_1(x, y) = -y$ y $f_2(x, y) = x$.

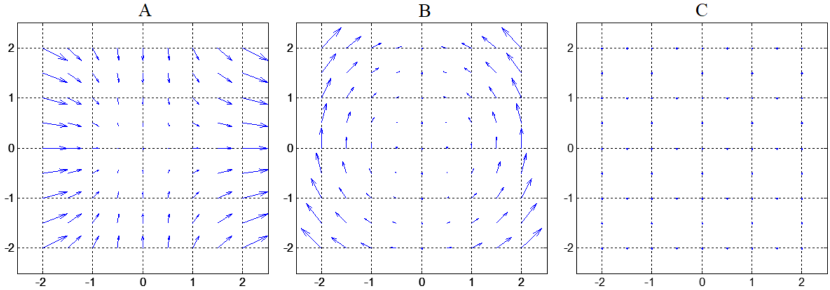
1. $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$.
2. $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$. Las funciones componentes son $f_1(x,y) = -y$ y $f_2(x,y) = x$.





Ejercicio

Sean $\mathbf{F}(x,y) = (-xy, x^2)$ y los gráficos A y B.



1. Trace en el sistema vacío algunos vectores correspondientes a $\mathbf{F}$.
2. Indique cuál de los gráficos (A o B) corresponde a $\mathbf{F}$ (o indique que no es ninguno de ellos).
3. Trace, en el gráfico que corresponde a $\mathbf{F}$, una línea de flujo C, indicando su sentido.

Conceptos importantes

Definición

- Un campo vectorial se llama de clase C^k cuando cada una de sus componentes es de clase C^k (al menos).
- Un campo vectorial de velocidades de un fluido se llama estacionario si no cambia con el tiempo (que no es lo mismo que decir que es constante o que no se mueve el fluido).

Conceptos importantes

Definición

- Un campo vectorial se llama de clase C^k cuando cada una de sus componentes es de clase C^k (al menos).
- Un campo vectorial de velocidades de un fluido se llama estacionario si no cambia con el tiempo (que no es lo mismo que decir que es constante o que no se mueve el fluido).

Definición (Líneas de flujo)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una línea de flujo de $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\mathbf{c}$ tal que

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)).$$

Es decir, $\mathbf{F}$ da el campo de velocidades de $\mathbf{c}$.

Ejemplo

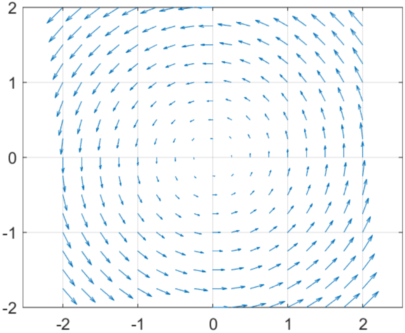
La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

Ejemplo

La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.
Se debe probar que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$, es decir:

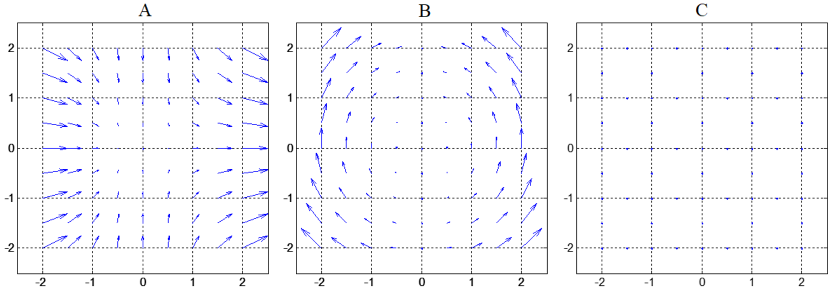
$$\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) = \mathbf{F}(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)).$$

¿Hay más líneas de flujo? (Ver imagen).



Ejercicio

Sean $\mathbf{F}(x, y) = (-xy, x^2)$ y los gráficos A y B.



1. Trace en el sistema vacío algunos vectores correspondientes a $\mathbf{F}$.
2. Indique cuál de los gráficos (A o B) corresponde a $\mathbf{F}$ (o indique que no es ninguno de ellos).
3. Trace, en el gráfico que corresponde a $\mathbf{F}$, una línea de flujo C, indicando su sentido.

Definición (Derivada parcial y gradiente de una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Dada $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con funciones componentes $f_1, \cdots, f_m$, se definen la derivada parcial de f con respecto a x_i, para cada i entre 1 y n, como el vector columna:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{bmatrix},$$

Definición (Derivada parcial y gradiente de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Dada $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con funciones componentes $f_1, \cdots, f_m$, se definen la derivada parcial de f con respecto a x_i, para cada i entre 1 y n, como el vector columna:

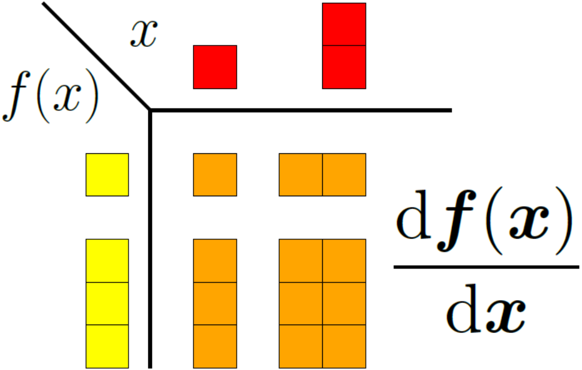
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{bmatrix},$$

y el gradiente de f (con respecto al vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) como el vector fila de las derivadas parciales, o sea:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

siempre que todas las derivadas parciales involucradas existan.

Dimensiones



Example 5.9 (Gradient of a Vector-Valued Function)
We are given

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^M, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N\,.$$

To compute the gradient $\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ we first determine the dimension of $\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}\boldsymbol{x}$: Since $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, it follows that $\mathrm{d}\boldsymbol{f}/\mathrm{d}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{M\times N}$. Second, to compute the gradient we determine the partial derivatives of f with respect to every x_j:

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j \implies \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = A_{ij} \tag{5.67}$$

We collect the partial derivatives in the Jacobian and obtain the gradient

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}\,. \tag{5.68}$$