Matemática para Computación
Trabajo Práctico 2: Derivadas de orden superior, máximos y mínimos

FACULTAD DE INGENIERÍA — UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo vectorial" de Marsden, J.E. y Tromba, A.J., quinta edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

1. Fórmula de Taylor

1. Determine la fórmula de Taylor de segundo orden para f alrededor del punto $(0,0)$.

   a) (o) $f(x,y) = (x+y)^2$.

   b) (r) $f(x,y) = e^{x+y}$.

   c) (r) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$.

2. (r) Use la fórmula de Taylor para $f(x,y)$ en el origen para obtener aproximaciones cuadráticas y cúbicas cerca del origen, siendo $f(x,y) = xe^y$. Exprese claramente el error.

3. (r) Use la fórmula de Taylor para encontrar una aproximación cuadrática de $f(x,y) = \cos x \cos y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \leq 0,1$ y $|y| \leq 0,1$.

4. (r) Encuentre las aproximaciones de Taylor de primero y segundo orden a $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{2})$. Además, usando un sistema para graficar, represente la función y estas dos aproximaciones en un entorno del punto indicado.

5. Dadas las siguientes funciones de tres variables, halle los polinomios de Taylor de segundo orden alrededor de $(0,0,0)$ para cada uno de ellos.

   a) (o) $f(x,y,z) = e^x z + e^z + y^2$

   b) (r) $f(x,y,z) = e^x z + e^z + y^2 + x^3$

   c) (r) $f(x,y,z) = 5 + z + xy + x^4$

   d) (r) $f(x,y,z) = 5 + z + xy + x^4 + y^2 z^3$

   e) (r) $f(x,y,z) = 5 + z + xy + x^4 + y^2 z^3 + z^2$

2. Valores extremos y puntos silla

6. Determine los máximos y mínimos locales y puntos silla de las siguientes funciones:

   a) (r) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

   b) (o) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

   c) (r) $f(x,y) = y \operatorname{sen} x$

   d) (r) $f(x,y) = e^{-y}(x^2 + y^2)$

   e) (r) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

   f) (r) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

   g) (r) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

7. (o) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$. Si imaginamos la gráfica cambiando a medida que se incrementa k, ¿en qué valores de k cambia cualitativamente su forma?

8. (r) Un examen de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ nos dará una idea de la dificultad para hallar condiciones que garanticen que un punto crítico es un punto de extremo relativo cuando falla el criterio de la derivada segunda. Mostrar que:

   a) el origen es un punto crítico de f;

   b) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ en cada recta que pasa por $(0,0)$; es decir, si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ \mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cualquier elección de a y b.

   c) El origen no es un punto de mínimo relativo de f.

9. Halle los extremos y puntos de silla de las siguientes funciones de varias variables:

   a) (o) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

   b) (r) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) - \dfrac{1}{2}(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$.

   c) (r) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{6}(x^6 + y^6 + z^6) - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

   d) (r) $f(x,y,z,w) = \dfrac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + z^2)$.

10. (r) Determine la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

11. (o) Encuentre los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en una placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.

12. (r) Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$. La placa incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el plano (x,y) es $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

13. (r) El discriminante $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ se anula en el origen para $f(x,y) = x^2 y^2$, de manera que el criterio de la segunda derivada falla. Determine qué presenta la función en el origen imaginando la apariencia de la superficie $z = f(x,y)$.

14. *a*) (o) Determine tres números cuya suma sea 9 y cuya suma de cuadrados sea un mínimo.

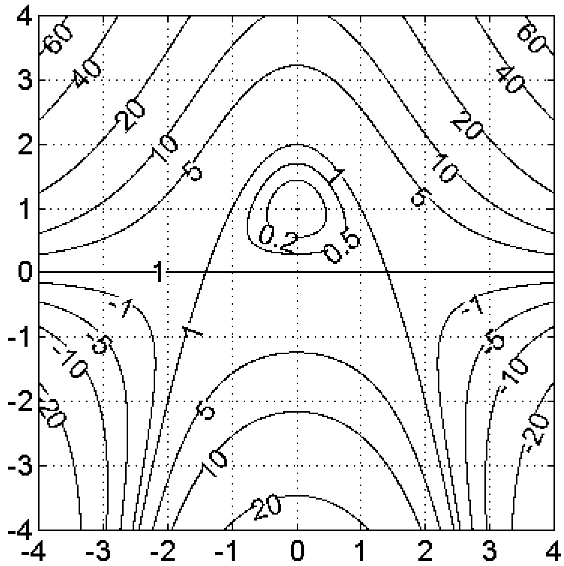
    b) (r) Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

    c) (r) Demuestre que una caja rectangular con tapa, de volumen dado, tiene una superficie mínima cuando es un cubo.

    d) (r) Demuestre que el paralelepípedo rectangular con una superficie dada y un volumen máximo es un cubo.

15. (r) Halle los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. (¿Puede hacerlo sin usar cálculo?)

16. (o) El siguiente diagrama de curvas de nivel corresponde a cierta función f, de la que se conoce que tiene tres puntos críticos.



a) Basándose en la información que le da el gráfico y justificando cada caso, marque de forma aproximada los puntos críticos en el gráfico e indique para cada uno de éstos si la función presenta allá un máximo local, un mínimo local o un punto de silla.

b) Constate las conclusiones que extrajo en el ítem anterior, sabiendo que la fórmula de la función presentada es $f(x, y) = x^2y + (y-1)^2$.

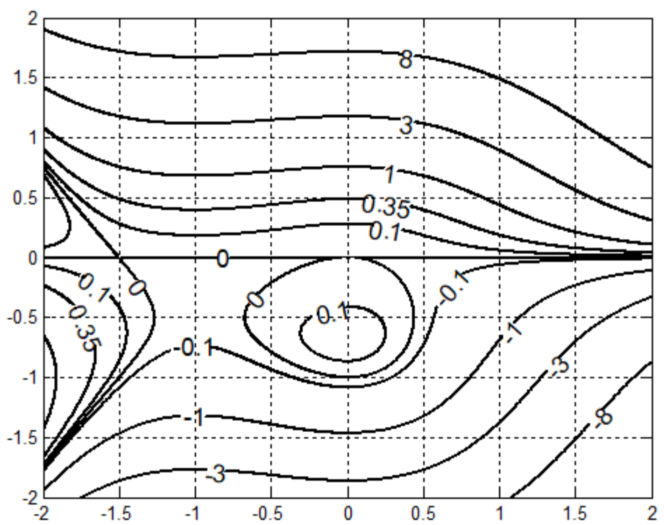
c) Trace un esbozo del camino que recorrería si usara el método de descenso del gradiente, desde el punto $(2, 3)$. Indique si llegaría o no a un mínimo local.

d) ¿Qué pasaría si aplicara el método del descenso del gradiente desde el punto $(0, 1)$?

e) ¿Qué pasaría si aplicara el método del descenso del gradiente desde el punto $(0, -2)$?

f) ¿Qué pasaría si aplicara el método del descenso del gradiente desde el punto $(-1, -2)$?

17. (r) Sea la función diferenciable f dada por $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + y^3 + x^2y + y^2$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.

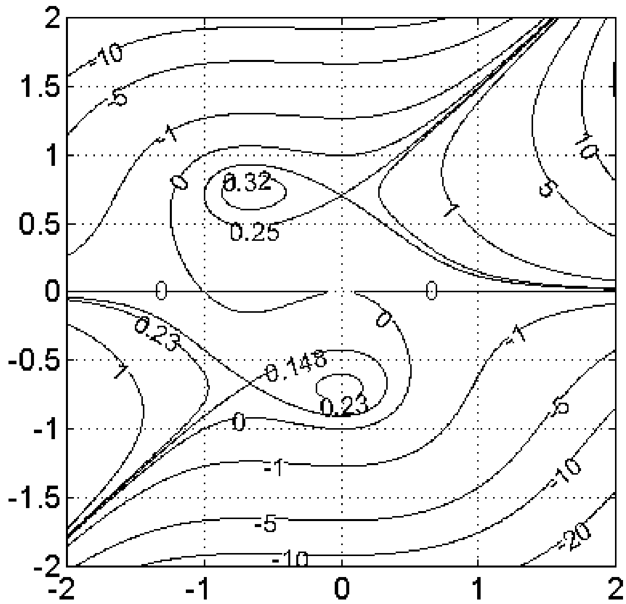


a) Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_0(0, 0)$ y $P_1(0, -\frac{2}{3})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_0 y en P_1. Justifique su respuesta.

b) Marque en el gráfico otro punto crítico y clasifíquelo.

c) Marque en el gráfico un punto P desde donde se pueda aplicar el método del descenso del gradiente y trace un esbozo del recorrido que podria realizar el algoritmo. ¿Se halla un mínimo local?

18. (r) Sea la función diferenciable f dada por $f(x, y) = x^3y + y^2 + x^2y - y^4$. El siguiente gráfico representa algunas curvas de nivel de f.



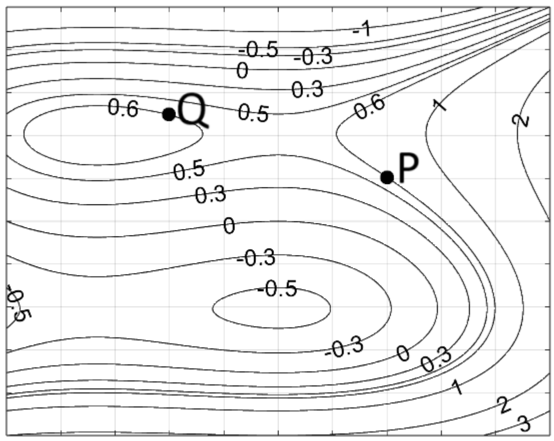
Se sabe que ∇f se anula para cada uno de los puntos $P_1(0, 0)$ y $P_2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (no son los únicos). Indique si f presenta un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P_1 y en P_2. Justifique su respuesta. Marque en el gráfico los restantes puntos críticos y clasifíquelos. Verifique sus respuestas analíticamente (deberá hallar las raíces de un polinomio de tercer grado, se recomienda el uso de calculadora o computadora para hacerlo).

19. El siguiente gráfico de curvas de nivel corresponde a la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + x^3 + 2y - 4y^3.$$

a) (r) Analíticamente halle y clasifique los puntos de silla y los extremos locales de f, indicando claramente las coordenadas en cada caso. además marque en el gráfico los puntos de silla y extremos de f, de forma aproximada.

b) (o) Trace caminos posibles, según método del descenso del gradiente, desde los puntos P y Q. Indique si llega a un mínimo local o no, en cada caso.



3. Multiplicadores de Lagrange

20. (o) Dado el problema de hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = x + 2y$ sujeta a la restricción $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

a) represente gráficamente la restricción y algunas curvas de nivel de la función cuyos valores extremos se buscan. Dé una estimación de las coordenadas de los posibles puntos críticos.

b) Resuelva el problema analíticamente y compare el resultado obtenido con la respuesta del ítem anterior.

c) ¿Cómo resultan los vectores gradientes de la función objetivo f y de la función restricción en los puntos encontrados?

21. (r) Calcule los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2+2y^2$ sujeta a la condición $x^2+y^2 = 1$, para ello:

    a) represente en un mismo gráfico la superficie dada por el gráfico de f y la curva que es la proyección sobre el gráfico de f de la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

    b) Grafique la restricción junto con algunas curvas de nivel de f y los vectores gradiente en los puntos de tangencia.

22. (r) Halle los extremos de f sujeta a las restricciones enunciadas:

    a) $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + 2y^2 = 1$.

    b) $f(x, y, z) = x - y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

    c) $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeta a $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

23. (o) Halle los puntos de extremo relativo de $f\big|S$, siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ y $S = \big\{(x, y, z) : z \geq 2 + x^2 + y^2\big\}$.

24. (r) Obtenga las dimensiones de una lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor área superficial cuyo volumen sea $16\pi cm^3$.

25. (r) Determine los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

26. (o) Maximice la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y = 0$ y $y + z = 0$.

27. (r) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para hallar la mínima distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y = x-2$ y los de la parábola dada por $y = x^2$. Sugerencia: minimice una función de cuatro variables.

4. Ejercicios integradores (*)

28. Encuentre el punto $P(x, y, z)$ del plano $2x + y - z - 5 = 0$ que está mas cercano al origen. Utilice el Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales y luego verifique el resultado utilizando el Método de multiplicadores de Lagrange.

29. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.

    a) Describa la superficie de nivel $f(x, y, z) = 0$.

    b) Calcule el gradiente de f en el punto $(2, 1, 3)$. Interprete en una representación gráfica.

    c) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(2, 1, 3)$ en la dirección $u = (0, 2, 0)$. Interprete esta derivada.

    d) Halle el valor mínimo de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2+y^2+z^2 = 1$.

    e) Indique si f es o no diferenciable en $\mathbb{R}^3$, justificando su respuesta. Interprete.

    f) Halle, si existe, la aproximación lineal de f en el punto $(2, 1, 3)$. Interprete.

30. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$.

    a) Represente gráficamente la función f.

b) Marque en su gráfico el punto $(0, 2, f(0, 2))$.

c) Represente en otro gráfico la curva de nivel $f(x, y) = 0$.

d) Calcule el gradiente de f en el punto $(0, 2)$. Represéntelo en alguno de sus gráficos e interprete.

e) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0, 2)$ en la dirección $u = (1, 1)$. Interprete esta derivada.

f) Halle, si existen, los extremos de f. Justifique.

g) Halle los valores extremos de f cuando solo se consideran los puntos que cumplen $x^2+y^2 = 1$.

31. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$.

    a) Describa las superficies de nivel $f(x, y, z) = k$, para $k = 1, 0$ y -1.

    b) Halle los valores extremos de f, si solo se consideran los puntos de la superficie dada por la ecuación $y^2 + z^2 = 1$.

    c) Halle, si existe, la diferencial (total) de f en el punto $(1, 0, 0)$.

    d) Calcule $\iiint_E f dV$, cuando E es el sólido comprendido entre el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

32. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(9 - x^2 - y^2)}$.

    a) Indique cuál es el el dominio D de f (el máximo en el sentido de la inclusión). Represéntelo gráficamente.

    b) Calcule el gradiente de f en el punto $(0, 1)$; represéntelo gráficamente e interprete.

33. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ sobre los puntos del plano tales que $x^2 + y^2 = 1$.

    a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

    b) Resuelva el problema: halle los valores extremos e indique en qué puntos se presentan dichos valores extremos.

34. Se desea conocer el valor mínimo de la función dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre los puntos del plano xy que cumplen $x + y = 2$.

    a) Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

    b) Resuelva, indicando claramente el valor mínimo alcanzado y el o los puntos donde se alcanza.

35. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de $32\, dm^3$. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado. Indique también cuál es esa cantidad mínima de cartón necesaria.

36. Se desea conocer los valores extremos (máximo y mínimo) de la función dada por $f(x, y, z) = xyz$ sobre los puntos del espacio que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ y $y = x^2 + z^2$. Haga un planteo por el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.