

# Integrales de superficie campos escalares y vectoriales

## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

# Tres formas de expresar superficies

## Curvas:

Forma explícita:  $y = f(x)$ .

Forma implícita:  $F(x, y) = 0$ .

Forma vectorial paramétrica:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

## Superficies:

Forma explícita:  $z = f(x, y)$ .

Forma implícita:  $F(x, y, z) = 0$ .

# Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

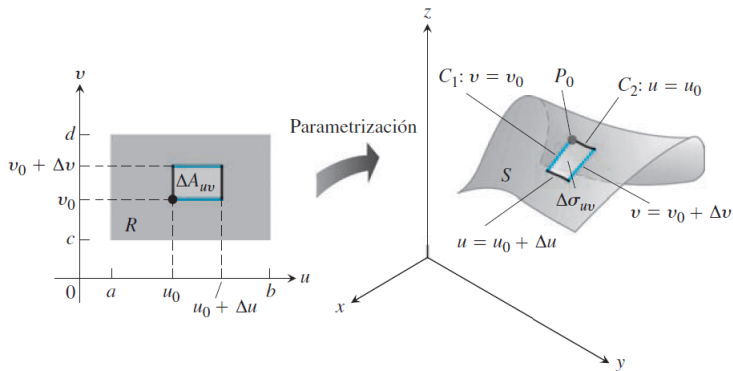
una función vectorial continua definida en una región  $R$  del plano  $uv$ ,  
inyectiva en el interior de  $R$ .

# Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región  $R$  del plano  $uv$ ,  
inyectiva en el interior de  $R$ .

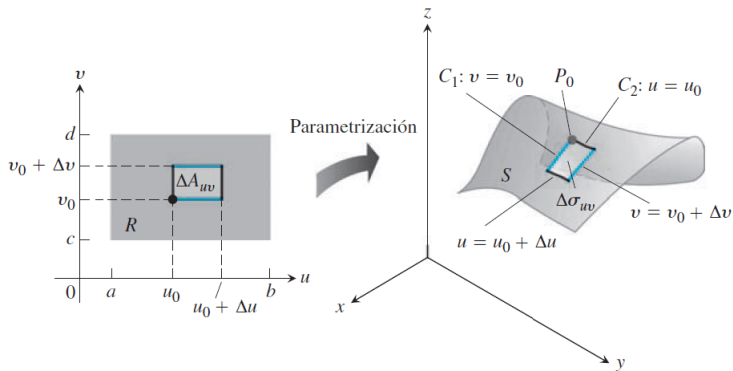


# Parametrizaciones de superficies

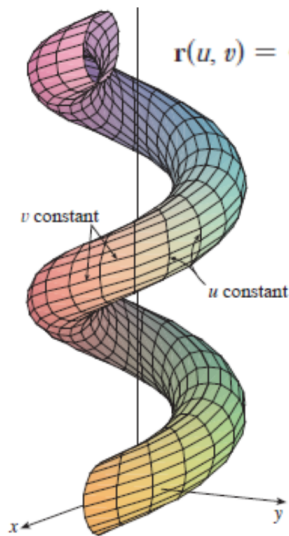
Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región  $R$  del plano  $uv$ , inyectiva en el interior de  $R$ . El rango de  $\mathbf{r}$  es la superficie  $S$ , parametrizada por  $\mathbf{r}$ ;  $u$  y  $v$  son los parámetros y  $R$  es el dominio de los parámetros.



# Ejemplo superficie paramétrica



$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$

$$0 \leq u \leq 4\pi; 0 \leq v \leq 2\pi$$

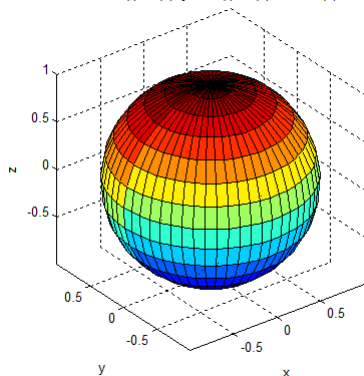
CURVAS RETICULARES



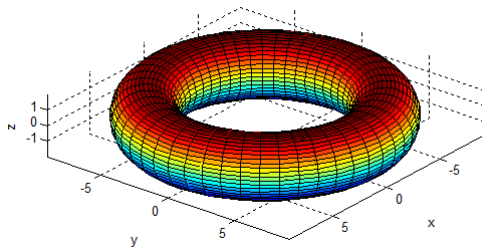


# Ejemplo superficie paramétrica

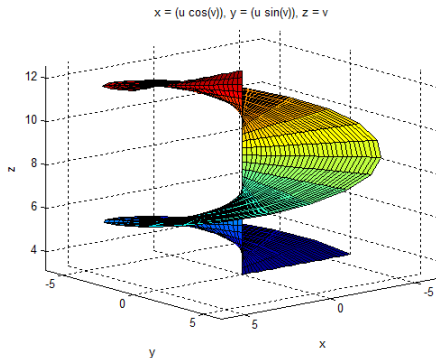
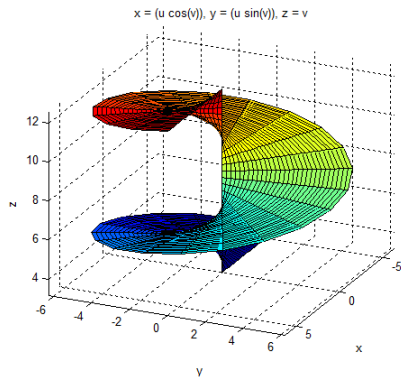
$$x = \cos(t) \sin(u), \quad y = \sin(t) \sin(u), \quad z = \cos(u)$$



$$x = (7+2 \cos(v)) \cos(u), \quad y = (7+2 \cos(v)) \sin(u), \quad z = 2 \sin(v)$$

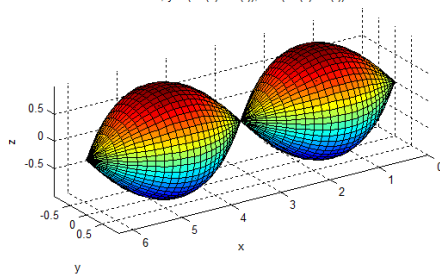


# Ejemplo superficie paramétrica

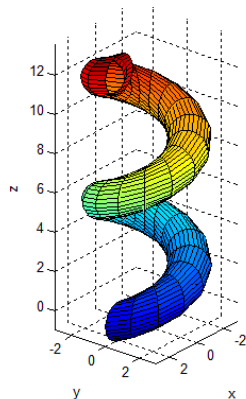


# Ejemplo superficie paramétrica

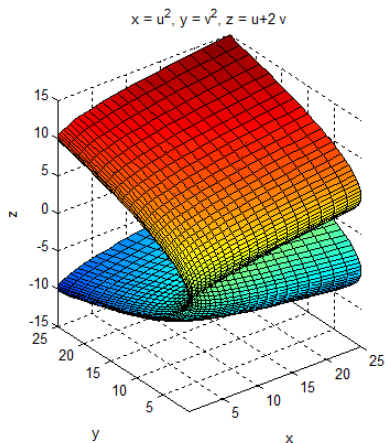
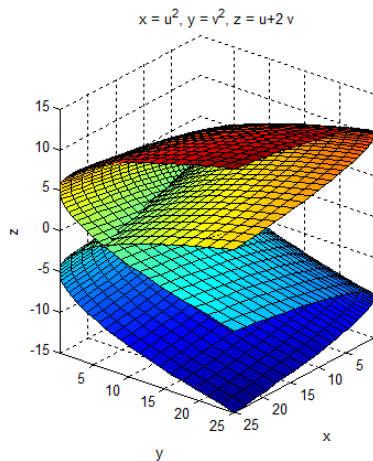
$$x = x, y = (\sin(x) \cos(v)), z = (\sin(x) \sin(v))$$



$$x = (2 + \sin(v)) \cos(u), y = (2 + \sin(v)) \sin(u), z = u + \cos(v)$$

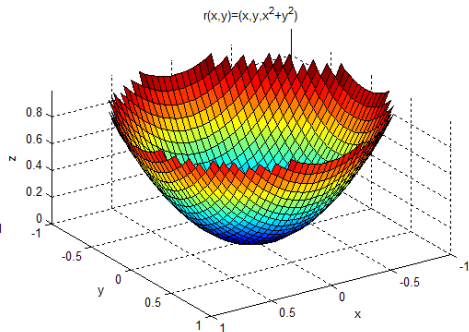
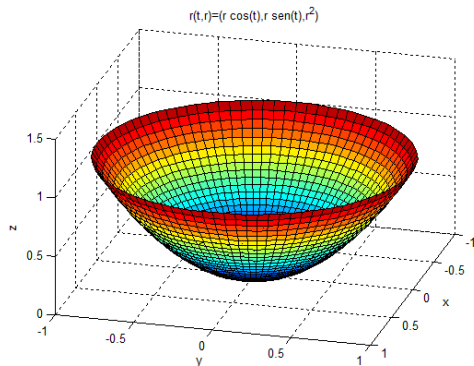


# Ejemplo superficie paramétrica



$$\mathbf{r}(u, -\frac{u}{2}) = (u^2, \frac{u^2}{4}, 0) = \mathbf{r}(-u, \frac{u}{2})$$

# Ejemplo superficie paramétrica



$$\mathbf{r}_1(t, s) = (s \cos(t), s \sin(t), s^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

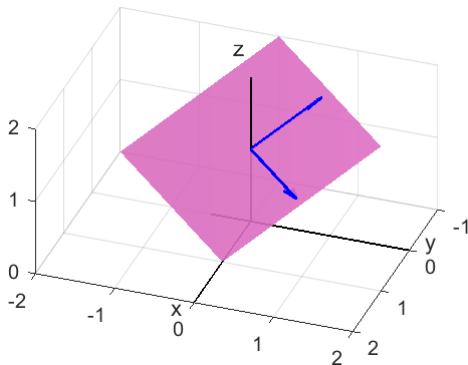
$$\mathbf{r}_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

# Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto  $P(0, 0, 1)$  y está generado por los vectores  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .

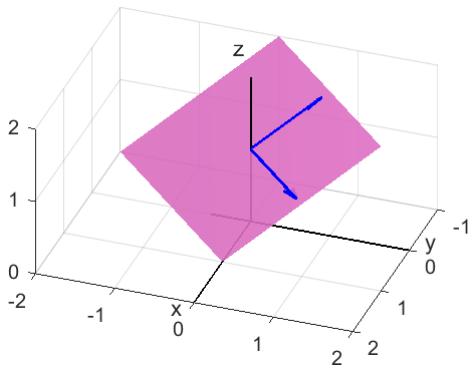
# Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto  $P(0, 0, 1)$  y está generado por los vectores  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .



# Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto  $P(0, 0, 1)$  y está generado por los vectores  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .



$$\mathbf{r}(s, t) = (0, 0, 1) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

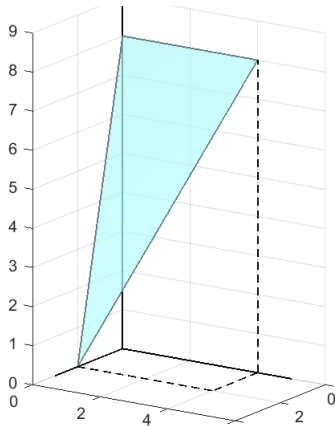


# Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 8)$  y  $(0, 0, 8)$ :

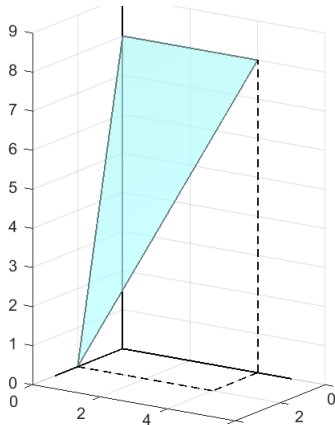
# Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 8)$  y  $(0, 0, 8)$ :



# Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 8)$  y  $(0, 0, 8)$ :



$$\mathbf{r}(x, h) = (x, h(4 - 2x), 8 - 4x), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq h \leq 1.$$

- 3) Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

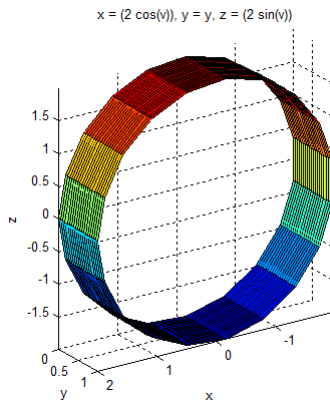
- 3) Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Observar que cuando  $\phi = 0$ ,  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

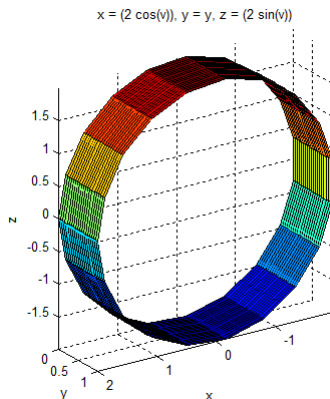
# Ejemplos

Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .



# Ejemplos

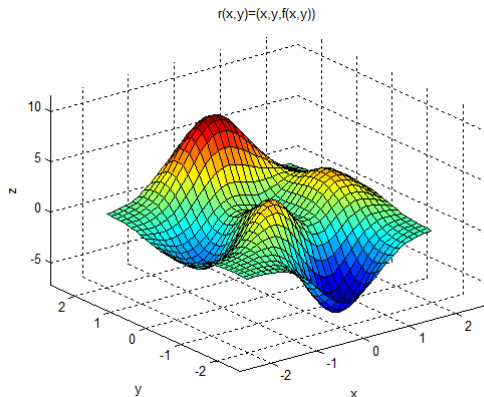
Dé una representación paramétrica de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ .



Solución:  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

# Ejemplos

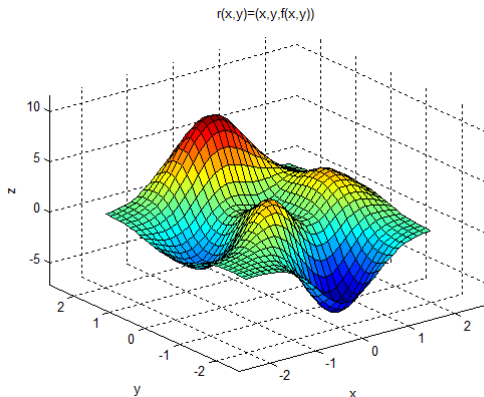
¿Cómo parametrizamos una superficie  $S$  que es el gráfico de una función  $f$  de dos variables?





# Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie  $S$  que es el gráfico de una función  $f$  de dos variables?



Solución:  $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ ,  $(x,y) \in D(f)$ .

## Definición

Una superficie  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ,  $(u, v) \in R$ , es suave si  $\mathbf{r}_u$  y  $\mathbf{r}_v$  son continuas y  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \bar{\mathbf{0}}$  en  $R$ .

**Observación:** Si se parametriza un cono SIN VÉRTICE o un tronco de cono mediante  $\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, r)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $\delta < r \leq R$  para algún  $\delta \geq 0$ , se tiene una superficie suave. La misma parametrización, pero con  $0 \leq r \leq R$ , refleja un cono (con su vértice) y **no es una superficie suave**.

Ver gif y

Resolver ej 2b y 2c del TP4B.

# Área de una superficie suave dada paramétricamente

## Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se define el área de  $S$  por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

# Área de una superficie suave dada paramétricamente

## Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se define el área de  $S$  por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

**Observación 1:** el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

# Área de una superficie suave dada paramétricamente

## Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

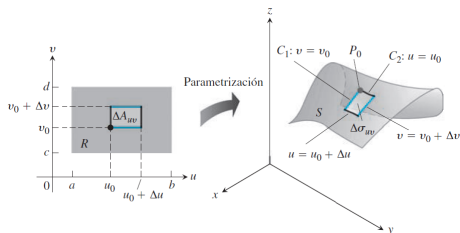
Dada la superficie suave  $S$  parametrizada por  $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se define el área de  $S$  por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

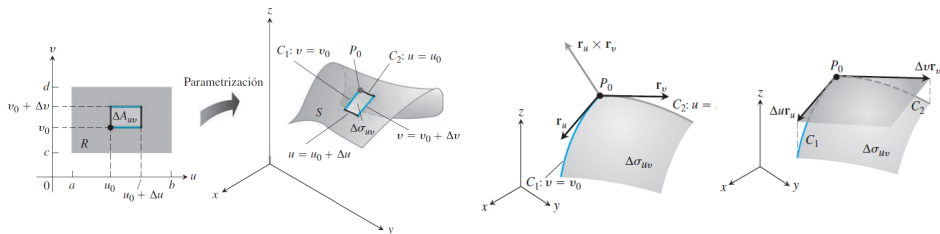
**Observación 1:** el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

**Observación 2:** en el caso de un cono, por ejemplo, se puede calcular el área planteando una integral impropia.

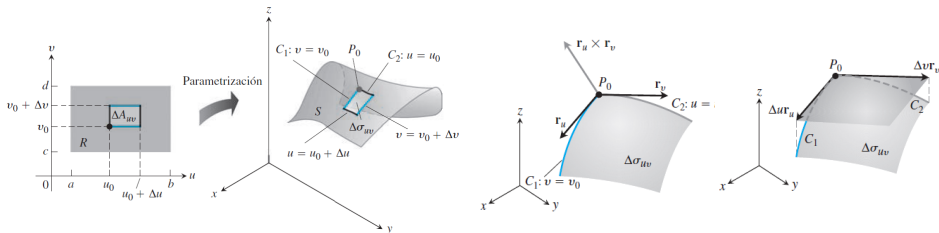
# Justificación de la definición de área de una superficie



# Justificación de la definición de área de una superficie



# Justificación de la definición de área de una superficie

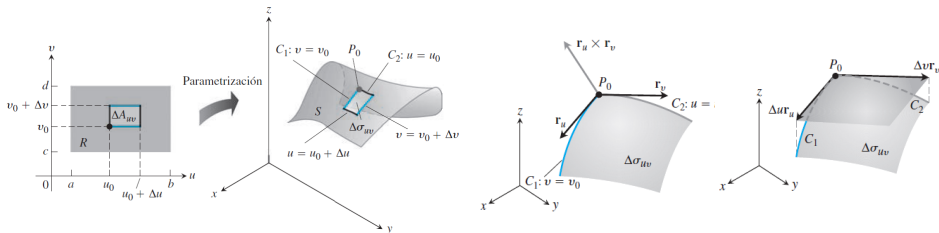


$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u$$



# Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u$$

$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v \quad A \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

# Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ , parametrizada por  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ , parametrizada por  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

## Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre  $y = 0$  y  $y = 1$ , parametrizada por  $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

TP4B 5b

## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

## Definición

Dados la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por  $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$  y el campo escalar  $f$  definido en  $S$ , se define la integral de superficie de  $f$  sobre  $S$  por

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, du \, dv,$$

siempre que exista la integral del segundo miembro.

**Observación:** la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

# Justificación

Si  $S$  está parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in R$ , tomamos una partición en  $R$  y

$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\sigma &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \\ \iint_S f \, d\sigma &= \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv.\end{aligned}$$

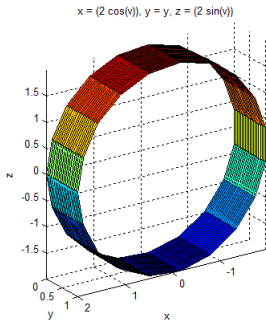
## Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  por los planos  $y = 0$  y  $y = 1$  (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$ .



# Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  por los planos  $y = 0$  y  $y = 1$  (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z)$ .



$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$$

$$\|\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y)\| = 2$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dA = \\ &= \iint_R \delta(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta(2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta) 2 dy d\theta. \end{aligned}$$

## Ejercicio: TP4B 12e

12. ■ Calcule la integral de la función  $f$  dada, sobre la superficie  $S$  indicada:

c) (r)  $f(x, y, z) = x\sqrt{5 - 4z}$  sobre el domo parabólico  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ .

- Agregue planteos usando integrales apropiadas, para calcular valores medios de las funciones anteriores sobre las superficies correspondientes.
- Además, si en algún caso se puede interpretar a la función  $f$  como la densidad en cada punto de la superficie  $S$ , indique cómo se podrían calcular la masa y las coordenadas del centro de masa de la placa delgada.

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t), 1 - r^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_t| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

$$\iint_S f \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos(t) \sqrt{5 - 4(1 - r^2)} \, dr \, dt = 0.$$

$$vm = \frac{1}{A(S)} \iint_S f \, d\sigma$$

## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- **Superficies orientadas**
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

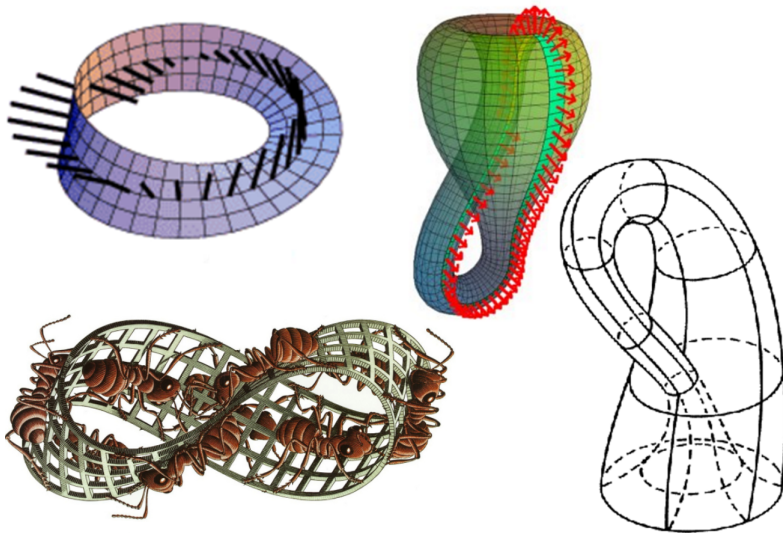
## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

# Superficies no orientables

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.



## Definición

Una superficie suave  $S$  es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial continuo  $\mathbf{n}$  que a cada punto de  $S$  le asigna un vector normal unitario.

Una superficie suave  $S$  está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial  $\mathbf{n}$  sobre  $S$ .

**Observación:** Una superficie que no es suave (como un cono con su vértice, con las parametrizaciones usuales), **no es una superficie orientable**. Pero una superficie suave, como un cono sin vértice, sí puede serlo.

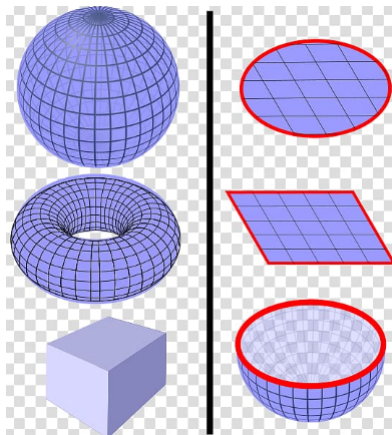
## Definición

Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la “interior”, que es acotada, y la “exterior”, que es no acotada.

Una superficie suave **cerrada** está **orientada positivamente** si el vector normal en cada punto de  $S$  apunta hacia fuera de  $S$ . Si es suave por partes, podemos extender esta idea.

# Ejemplo

Las siguientes son superficies suaves por partes y orientables:



## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

## 3 Interpretación de rotor y divergencia

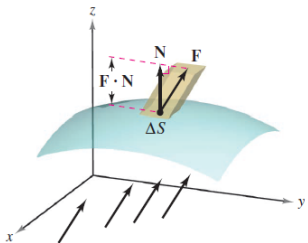
- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano



# Integral de superficie de campos vectoriales

El **flujo** de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido en  $\mathbb{R}^3$  a través de una superficie orientada  $S$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  es  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ .

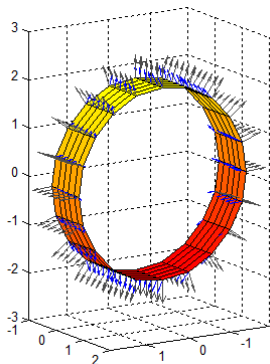


$$\begin{aligned}\text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv.\end{aligned}$$

Notación: si la superficie  $S$  es cerrada, se suele anotar  $\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ .

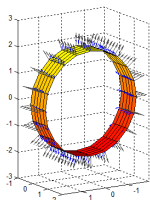
## Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .



# Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  a través de la superficie  $S$  que es la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = 4$  entre los planos  $y = 0$  y  $y = 1$ , en la dirección que se aleja del eje  $y$ .



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

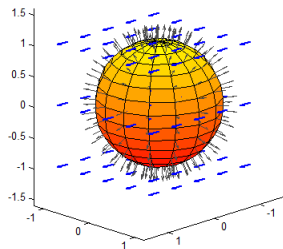
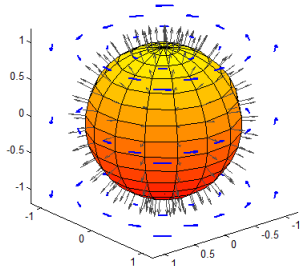
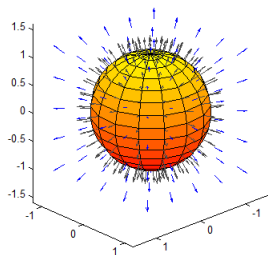
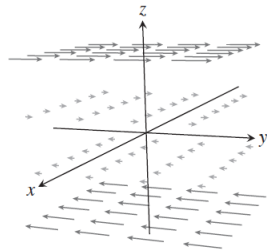
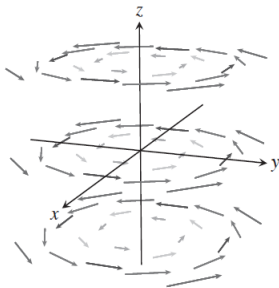
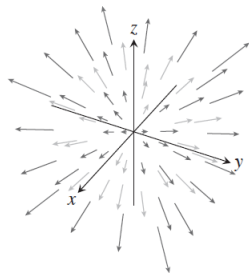
$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$$

Elijo  $\theta = 0$  y  $y = 0$ . Allí:  $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$  y  $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y)(0, 0) = (-2, 0, 0)$ , **hacia el eje  $y$ .**

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cdot (2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta) dy d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y \cos \theta + 4 \sin^2 \theta) dy d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

# Ejemplos gráficos



# Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ .

## Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  hacia fuera a través de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ .

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

$$\text{flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi) = (-a^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \phi \cos \phi)$$

Para  $\theta = 0$  y  $\phi = \frac{\pi}{2}$ :  $\mathbf{r}(0, \frac{\pi}{2}) = (a, 0, 0)$  y  $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(0, \frac{\pi}{2}) = (-a^2, 0, 0)$ .  
Apunta hacia el origen: cambio el sentido.

$$\text{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} a \cos \theta \sin \phi \\ a \sin \theta \sin \phi \\ a \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \cos \theta \sin^2 \phi \\ a^2 \sin \theta \sin^2 \phi \\ a^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} d\phi \, d\theta = 4a^3\pi.$$

# Observación

Si el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  es  $k$ , ¿necesariamente el flujo a través de una superficie  $S_1$  que es una parte de  $S$  con exactamente la mitad de área que  $S$  es  $k/2$ ?



- 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
  - Teorema de Stokes
  - Teorema de la divergencia de Gauss
- 3 Interpretación de rotor y divergencia
  - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
  - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial
- 4 Laplaciano

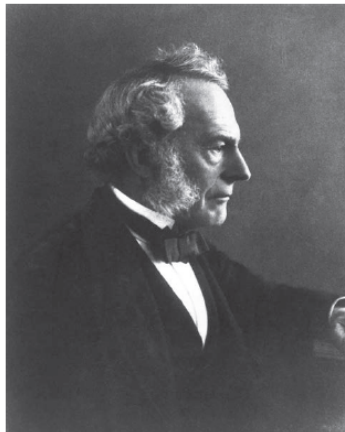


# Teoremas de Stokes y de Gauss

Enunciados por Thomas. Demostración del Teorema de Stokes, por Stewart.

Teorema de Stokes: se ofrece un video con una prueba del mismo en <https://www.youtube.com/watch?v=aaJgkbqjCSg>

# Teorema de Stokes: 1850



**GEORGE GABRIEL STOKES**  
**(1819–1903)**

# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema



# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

*Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes,  $C$ .*



# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

*Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ .*



# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

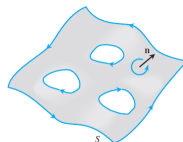


# Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

## Teorema

Sea  $S$  una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes,  $C$ . Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



superficies con agujeros



## Ejemplo

Sea  $C$  la curva intersección de las superficies dadas por  $y + z = 2$  y  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ . Plantee una integral para calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

$$\text{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 1 + 2r \sin t) \cdot (0, -r, r) dr dt = \pi$$

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ .
- ② Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .

- 1 Supongamos que  $\mathbf{F}$  es conservativo. Entonces es el gradiente de alguna función potencial  $f$ . **Ya lo hemos demostrado**, probando que  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$  componente a componente.

# Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

## Teorema

Sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial definido en un dominio conexo  $D$ , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- 1 Si  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ , entonces  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ .
- 2 Si  $D$  es simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$  en  $D$ , entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .

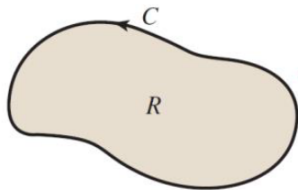
- 2 Supongamos que  $D$  es abierto, conexo y simplemente conexo y  $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$  en  $D$ .

Aplicando un teorema de Topología, dado que  $D$  es simplemente conexa, se puede asegurar que existe una superficie  $S$  en  $D$  que tiene como “frontera” a la curva  $C$ . Así:

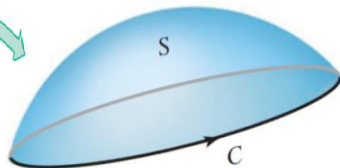
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

# Comparar teoremas de Green y Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy; \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

# Recorrido

## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

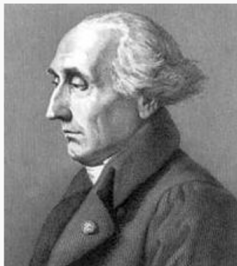
## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

# Teorema de la divergencia de Gauss

**Joseph-Louis Lagrange**



Joseph-Louis (Giuseppe Luigi),  
comte de Lagrange

**Born** Giuseppe Lodovico  
Lagrangia  
25 January 1736  
Turin, Piedmont-Sardinia

**Died** 10 April 1813 (aged 77)  
Paris, France

Lagrange 1762

**Johann Carl Friedrich Gauss**



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), painted by  
Christian Albrecht Jensen

**Born** Johann Carl Friedrich Gauss  
30 April 1777  
Brunswick, Duchy of  
Brunswick-Wolfenbüttel,  
Holy Roman Empire

**Died** 23 February 1855 (aged 77)  
Göttingen, Kingdom of  
Hanover

Gauss 1813

**Mikhail Ostrogradsky**



Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

**Born** September 24, 1801  
Pashennaya

**Died** January 1, 1862 (aged 60)  
Poltava

Ostrogradsky 1826

# Teorema de la divergencia de Gauss

## Teorema

Sea  $S$  una superficie **cerrada** positivamente orientada, suave por partes, sea  $D$  la región sólida encerrada por  $S$  y sea  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a  $S$ . Entonces el flujo de  $\mathbf{F}$  a través hacia fuera de  $S$  es:

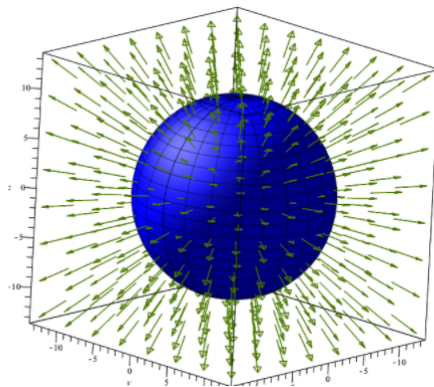
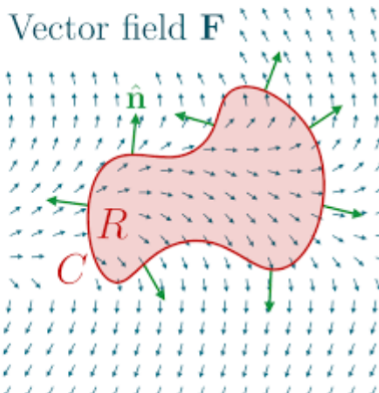
$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

SIN DEMOSTRAR

# Comparar teoremas de Green y Gauss

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy;$$

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$



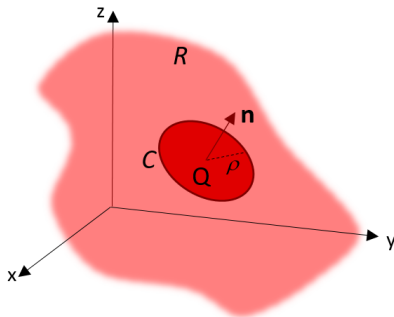




# Recorrido

- 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
  - Superficies paramétricas y sus áreas
  - Integral de superficie de campos escalares
  - Superficies orientadas
  - Integral de superficie de campos vectoriales
- 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss
  - Teorema de Stokes
  - Teorema de la divergencia de Gauss
- 3 Interpretación de rotor y divergencia
  - Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
  - Interpretación de la divergencia de un campo vectorial
- 4 Laplaciano

# Interpretación del rotor



El Teorema de Stokes establece que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

cuando  $C$  está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por  $\mathbf{n}$  a  $S$ .

# Interpretación del rotor

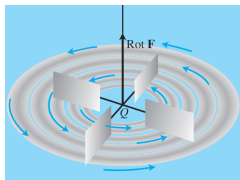
El Teorema del Valor Medio aplicado a  $\nabla \times \mathbf{F}$  en  $S$  asegura que existe un punto  $Q_1 \in S$  tal que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \pi \rho^2 [(\nabla \times \mathbf{F})(Q_1) \cdot \mathbf{n}(Q_1)].$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (1)$$

Aplicando el Teorema de Stokes en el primer miembro de (1), obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}.$$

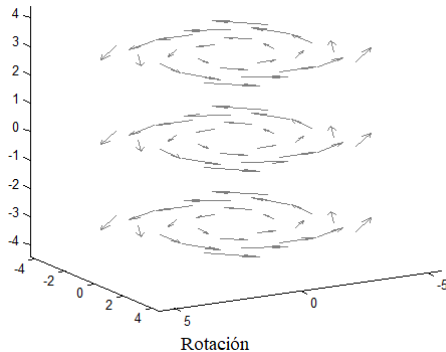


$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}.$$

# Interpretación del rotor: ejemplos

Supongamos que  $\mathbf{F}$  es la velocidad de un gas que fluye en el espacio, para los siguientes casos:

**Rotación:**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ;  $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 2) = 2\mathbf{k}$ .

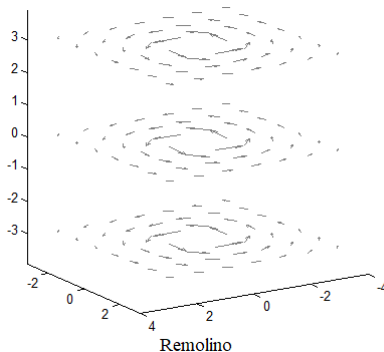


# Interpretación del rotor: ejemplos

**Remolino:**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ ;  $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ , es  $\mathbb{R}^3$  sin el eje  $z$ .

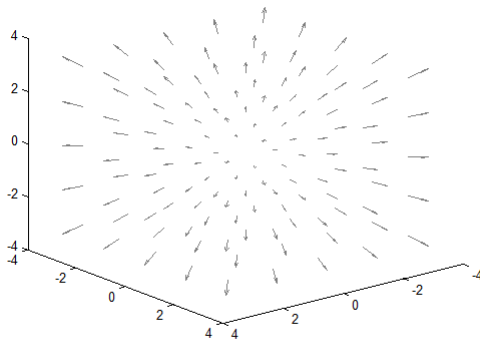
$D$  es abierto y conexo pero no es simplemente conexo.



# Interpretación del rotor: ejemplos

## Expansión o compresión uniforme:

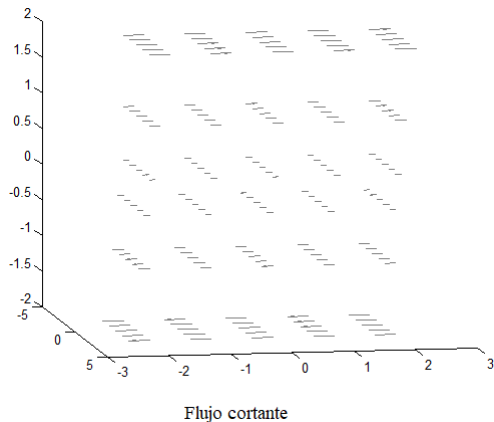
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (cx, cy, cz); (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0).$$



Expansión

# Interpretación del rotor: ejemplos

**Corte:**  $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, z, 0)$ ;  $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (-1, 0, 0)$ .





## 1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

## 2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

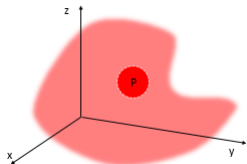
- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

## 3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

## 4 Laplaciano

# Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Aplicando el Teorema del valor medio para integrales en el segundo miembro,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) \frac{4}{3} \pi r^3, \quad \text{para cierto } Q \in W.$$

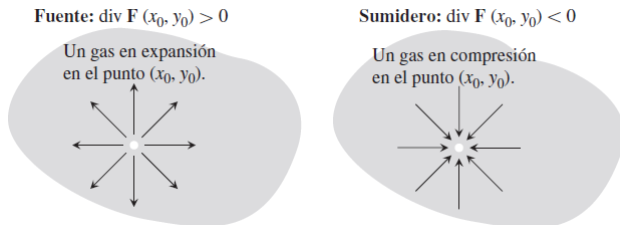
Tomando límites obtenemos:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

y, si tomamos un valor fijo de  $r > 0$  pequeño,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) \approx \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

# Interpretación de la divergencia de $\mathbf{F}$



La divergencia en el punto  $P$  es la tasa de flujo neto hacia fuera en  $P$  por unidad de volumen.

Así, si  $\text{div} \mathbf{F}(P) > 0$ , el punto  $P$  se llama **fuentes** ya que el flujo neto alrededor de  $P$  es positivo; si  $\text{div} \mathbf{F}(P) < 0$ ,  $P$  se llama **sumidero** para  $\mathbf{F}$ . Si  $\text{div} \mathbf{F}(P) = 0$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathbf{F}$  se llama **solenoidal** y, si es un campo de velocidades de un fluido, decimos que el fluido es **incompresible**.

## Definición

El Laplaciano de un campo escalar  $f$  se anota  $\Delta f$  o  $\nabla^2 f$  y se define como la divergencia del gradiente de  $f$ :

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

El Laplaciano de un campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N, P)$  se anota  $\Delta \mathbf{F}$  o  $\nabla^2 \mathbf{F}$  y es el vector de los Laplacianos de las funciones componentes de  $\mathbf{F}$ :

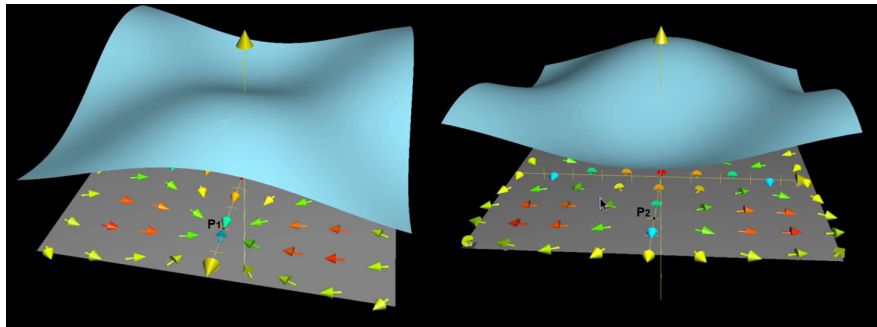
$$\Delta \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 M, \nabla^2 N, \nabla^2 P).$$

# Laplaciano: interpretación

Video de Khan Academy

<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/laplacian/v/laplacian-intuition>.

Figura: Interpretación del Laplaciano



Si  $f(P_1)$  es máximo,  $\Delta f(P_1) < 0$ ; si  $f(P_2)$  es mínimo,  $\Delta f(P_2) > 0$ .

## Propiedad:

- ① El Laplaciano de un campo escalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cumple:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{x_n^2}.$$

- ② El Laplaciano de un campo vectorial definido en  $\mathbb{R}^3$  cumple:

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Dejamos la demostración como ejercicio.