

Integrales de superficie campos escalares y vectoriales

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Tres formas de expresar superficies

Curvas:

Forma explícita: $y = f(x)$.

Forma implícita: $F(x, y) = 0$.

Forma vectorial paramétrica: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

Superficies:

Forma explícita: $z = f(x, y)$.

Forma implícita: $F(x, y, z) = 0$.

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

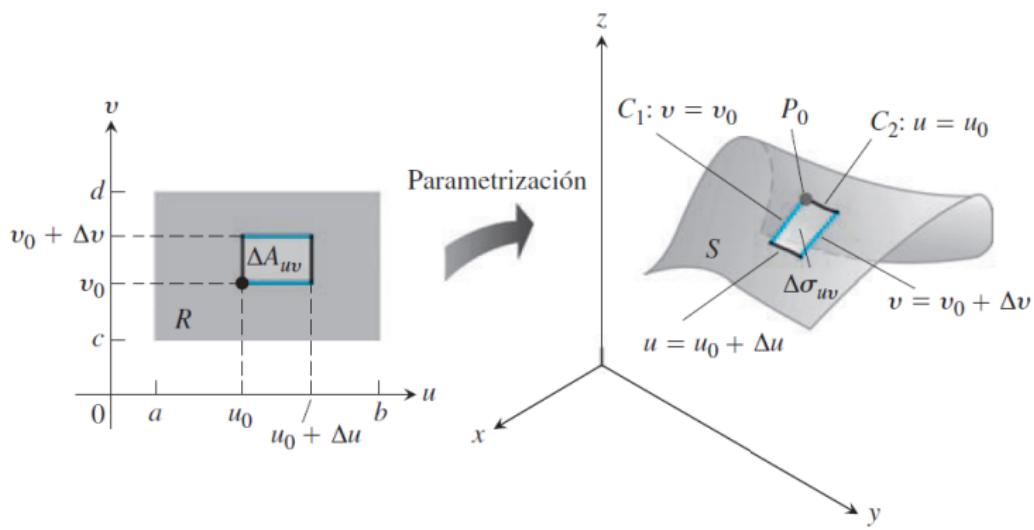
una función vectorial continua definida en una región R del plano uv , inyectiva en el interior de R .

Parametrizaciones de superficies

Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región R del plano uv , inyectiva en el interior de R .

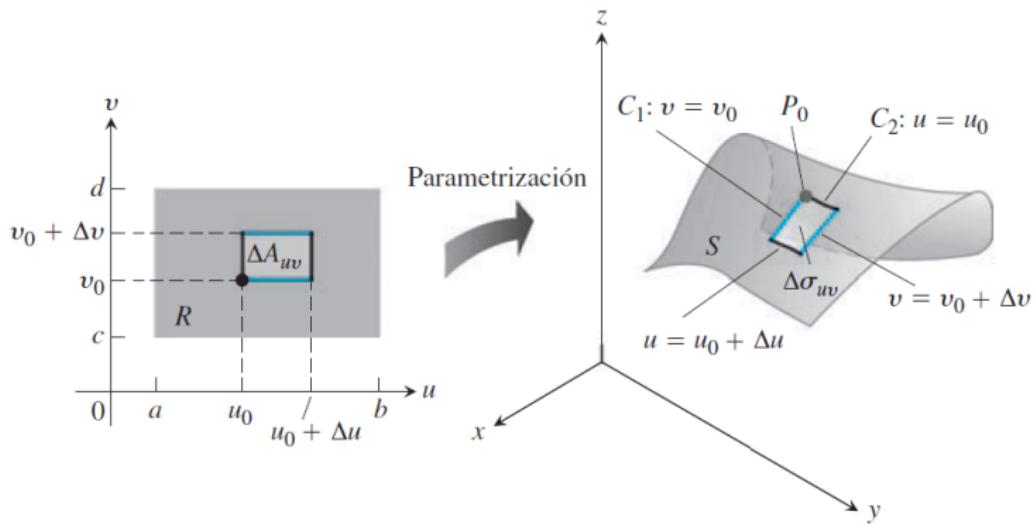


Parametrizaciones de superficies

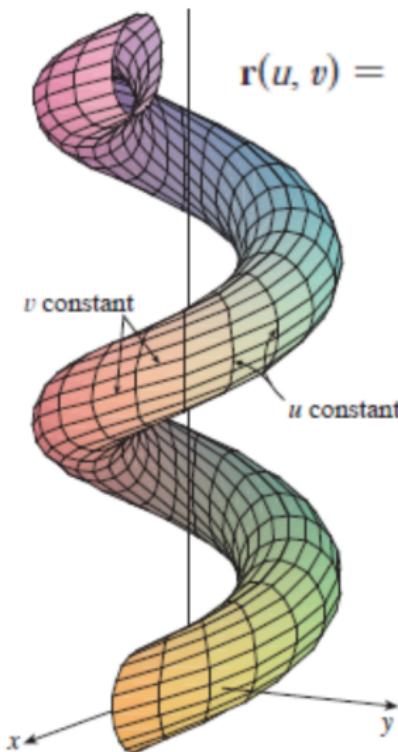
Sea

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R$$

una función vectorial continua definida en una región R del plano uv , inyectiva en el interior de R . El rango de \mathbf{r} es la superficie S , parametrizada por \mathbf{r} ; u y v son los parámetros y R es el dominio de los parámetros.



Ejemplo superficie paramétrica

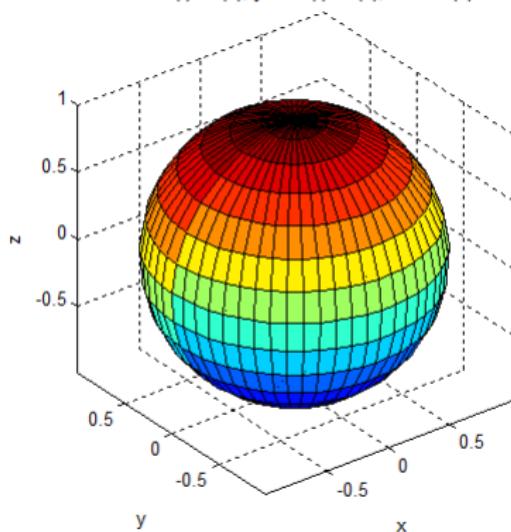


$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v) \cos u, (2 + \sin v) \sin u, u + \cos v \rangle$$
$$0 \leq u \leq 4\pi; 0 \leq v \leq 2\pi$$

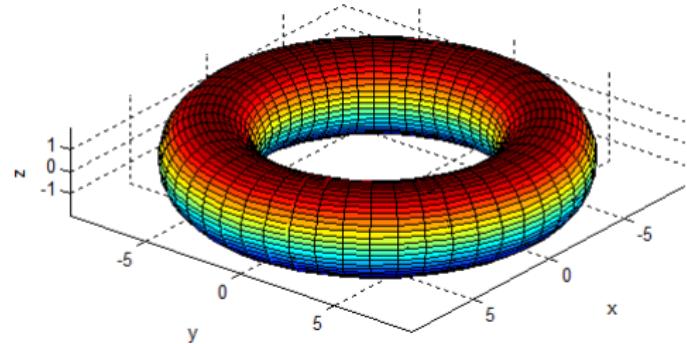
CURVAS RETICULARES

Ejemplo superficie paramétrica

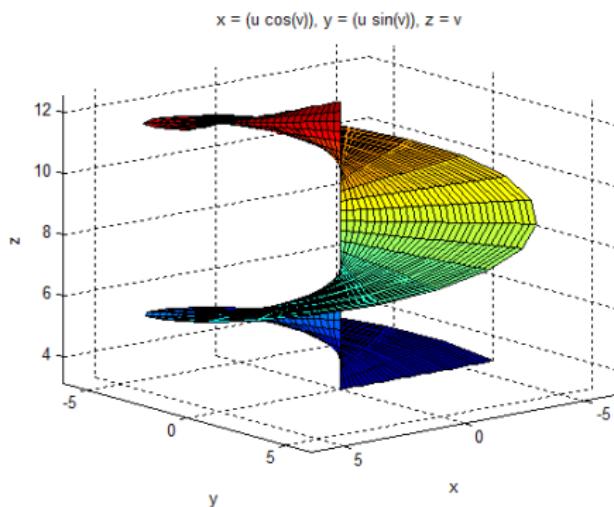
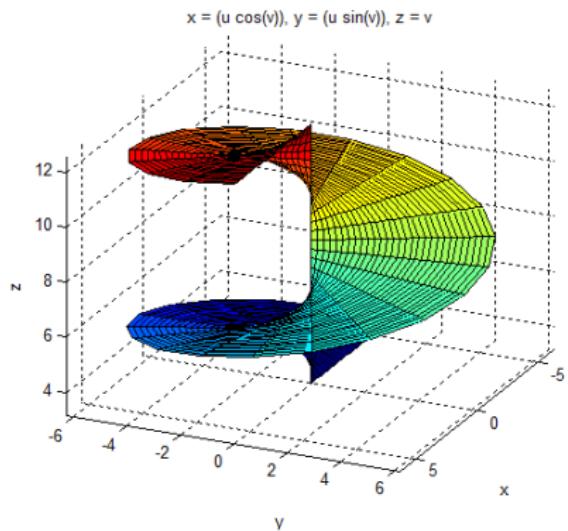
$$x = \cos(t) \sin(u), y = \sin(t) \sin(u), z = \cos(u)$$



$$x = (7+2 \cos(v)) \cos(u), y = (7+2 \cos(v)) \sin(u), z = 2 \sin(v)$$

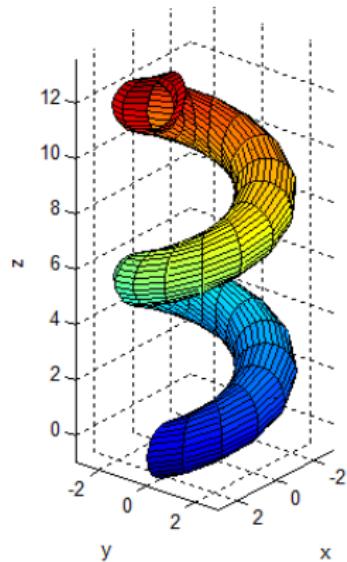
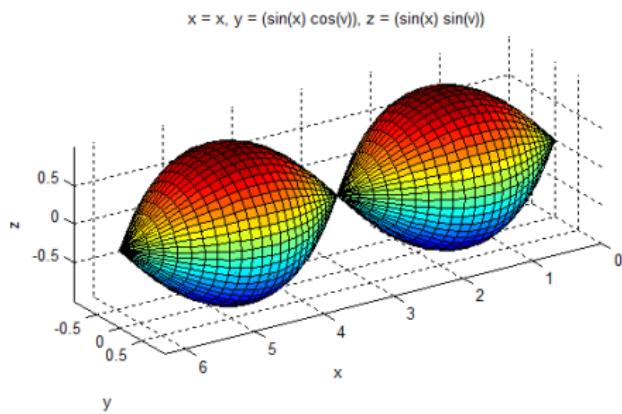


Ejemplo superficie paramétrica

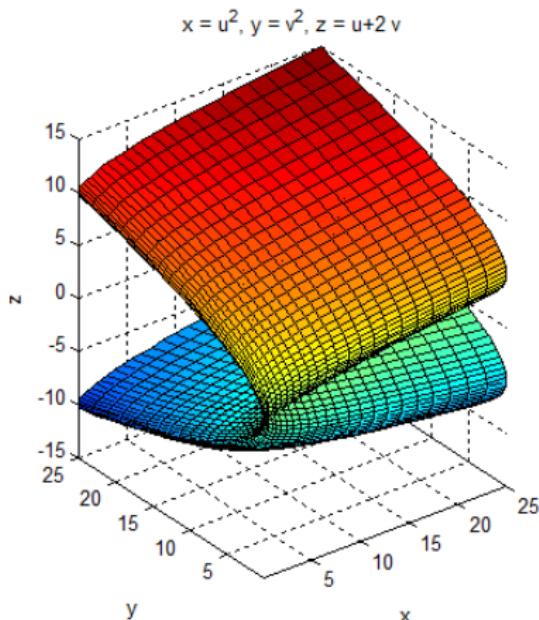
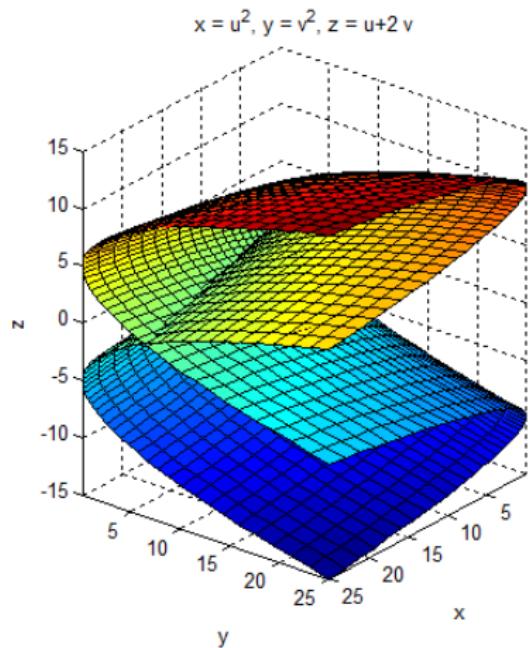


Ejemplo superficie paramétrica

$$x = (2+\sin(v)) \cos(u), y = (2+\sin(v)) \sin(u), z = u+\cos(v)$$



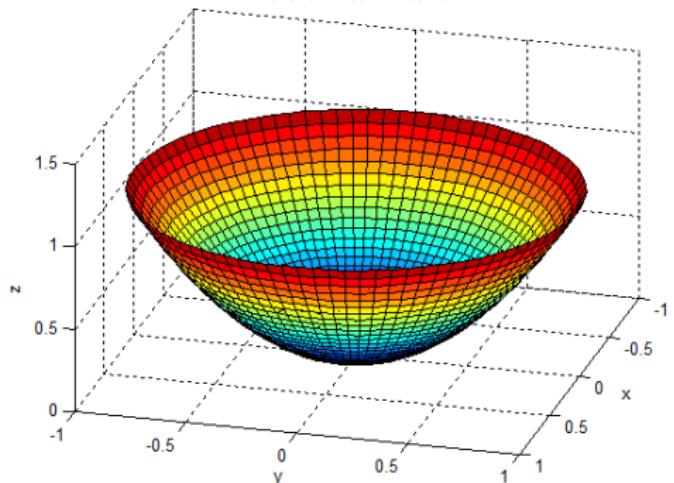
Ejemplo superficie paramétrica



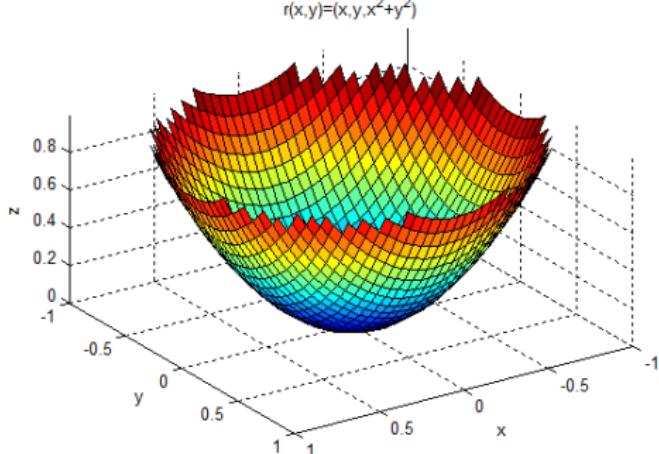
$$\mathbf{r}(u, -\frac{u}{2}) = (u^2, \frac{u^2}{4}, 0) = \mathbf{r}(-u, \frac{u}{2})$$

Ejemplo superficie paramétrica

$$\mathbf{r}(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t), r^2)$$



$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$



$$\mathbf{r}_1(t, s) = (s \cos(t), s \sin(t), s^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

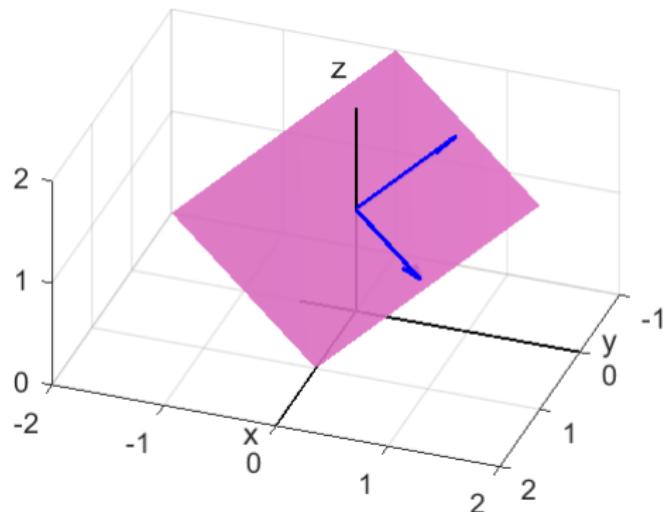
$$\mathbf{r}_2(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

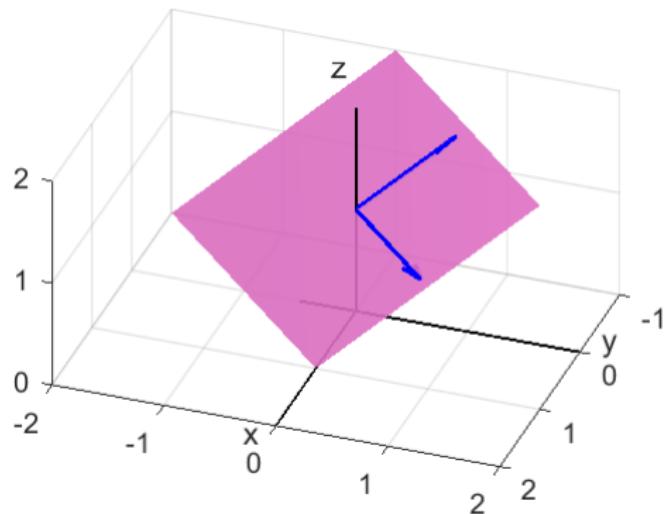
Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.



Ejemplos

- 1) Dé una parametrización del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y está generado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.



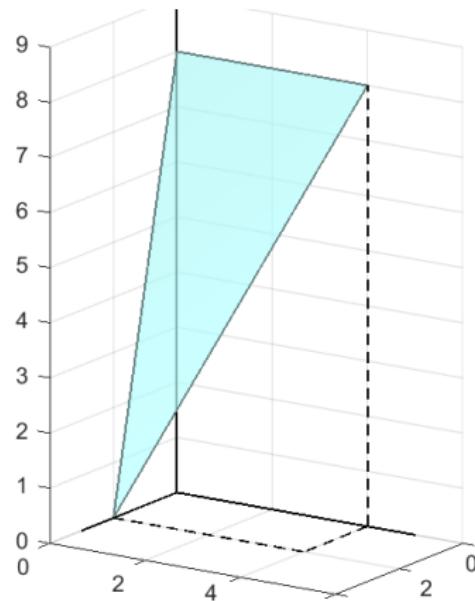
$$\mathbf{r}(s, t) = (0, 0, 1) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 8)$ y $(0, 0, 8)$:

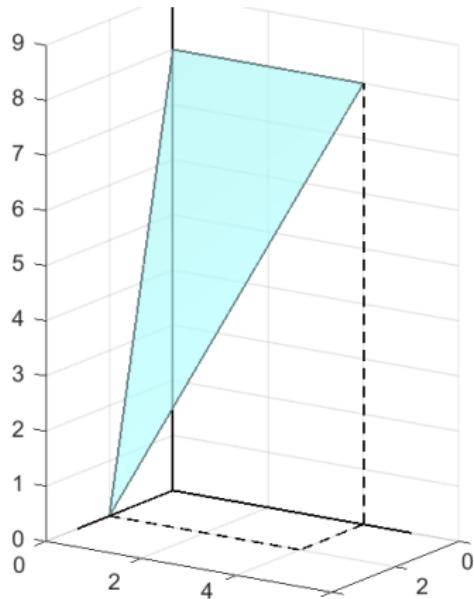
Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 8)$ y $(0, 0, 8)$:



Ejemplos

- 2) Dé una parametrización del triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 8)$ y $(0, 0, 8)$:



$$\mathbf{r}(x, h) = (x, h(4 - 2x), 8 - 4x), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq h \leq 1.$$

Ejemplos

- 3) Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

Ejemplos

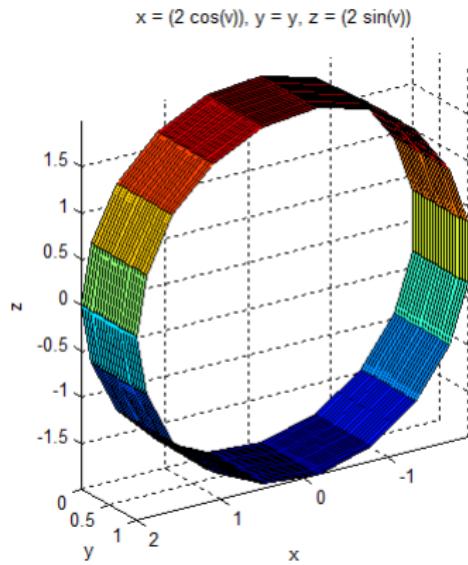
- 3) Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio 3.

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Observar que cuando $\phi = 0$, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

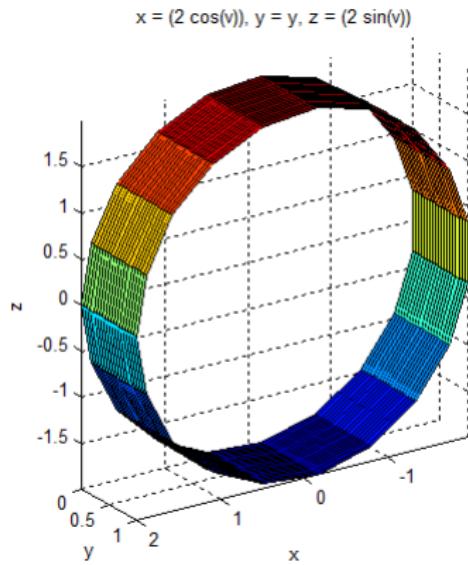
Ejemplos

Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Ejemplos

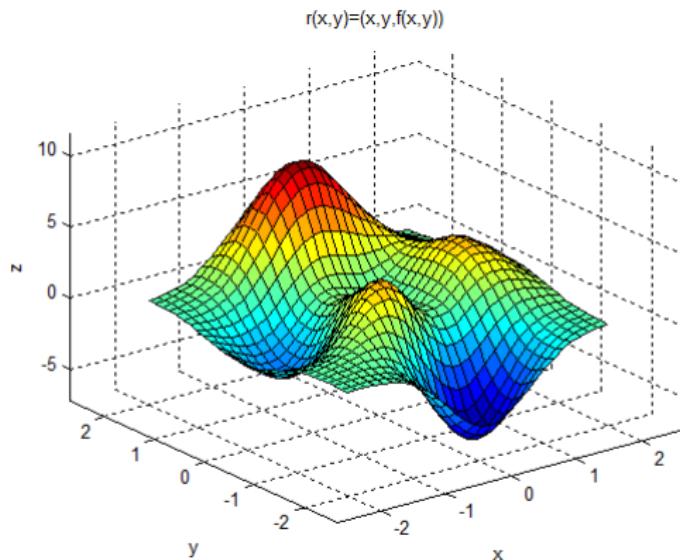
Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Solución: $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

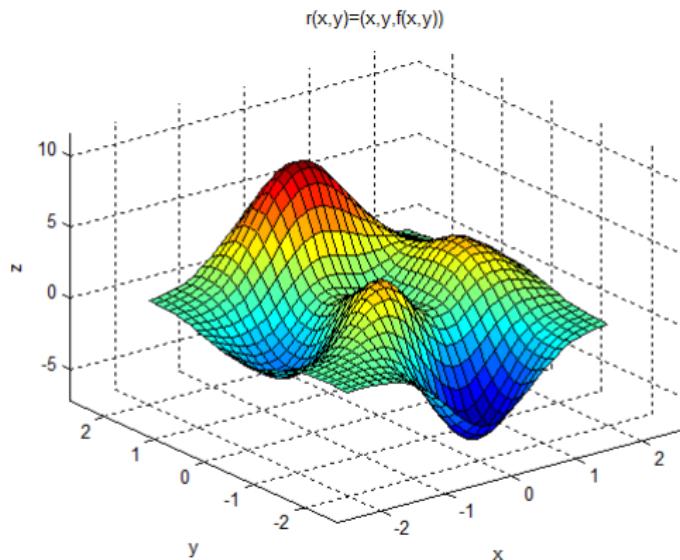
Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?



Ejemplos

¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?



Solución: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in D(f).$

Superficies suaves

Definición

Una superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, $(u, v) \in R$, es suave si \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \bar{\mathbf{0}}$ en R .

Observación: Si se parametriza un cono SIN VÉRTICE o un tronco de cono mediante $\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, r)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\delta < r \leq R$ para algún $\delta \geq 0$, se tiene una superficie suave. La misma parametrización, pero con $0 \leq r \leq R$, refleja un cono (con su vértice) y **no es una superficie suave**.

Ver gif y

Resolver ej 2b y 2c del TP4B.

Área de una superficie suave dada paramétricamente

Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Área de una superficie suave dada paramétricamente

Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Observación 1: el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Área de una superficie suave dada paramétricamente

Definición (Área de una superficie suave parametrizada)

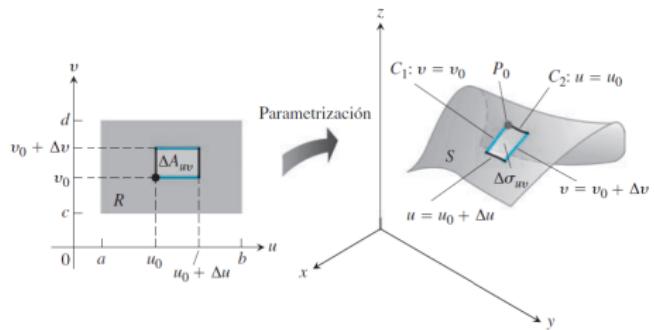
Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

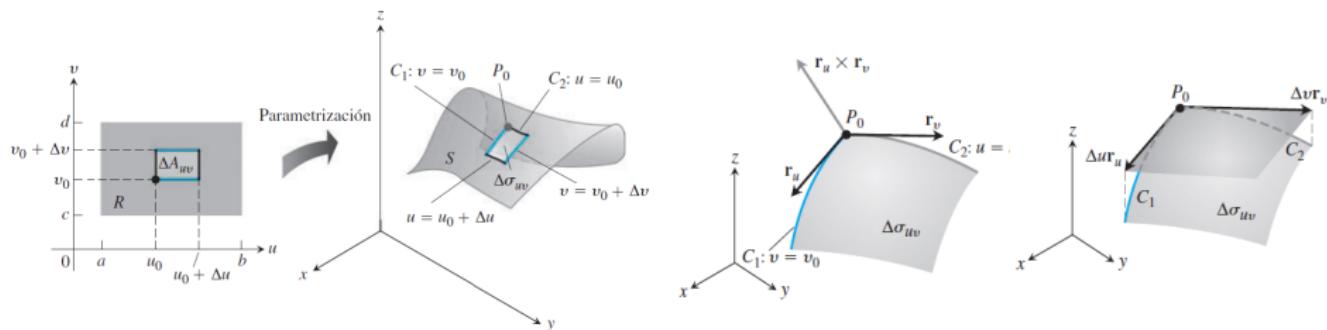
Observación 1: el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Observación 2: en el caso de un cono, por ejemplo, se puede calcular el área planteando una integral impropia.

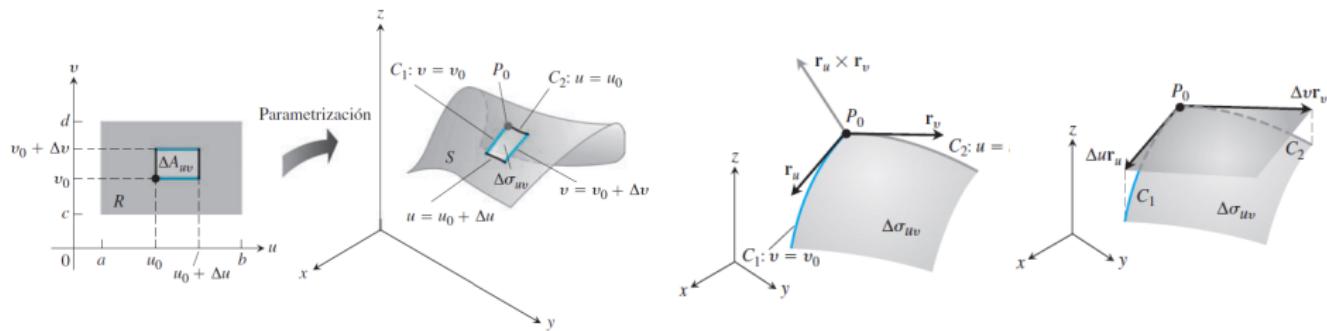
Justificación de la definición de área de una superficie



Justificación de la definición de área de una superficie



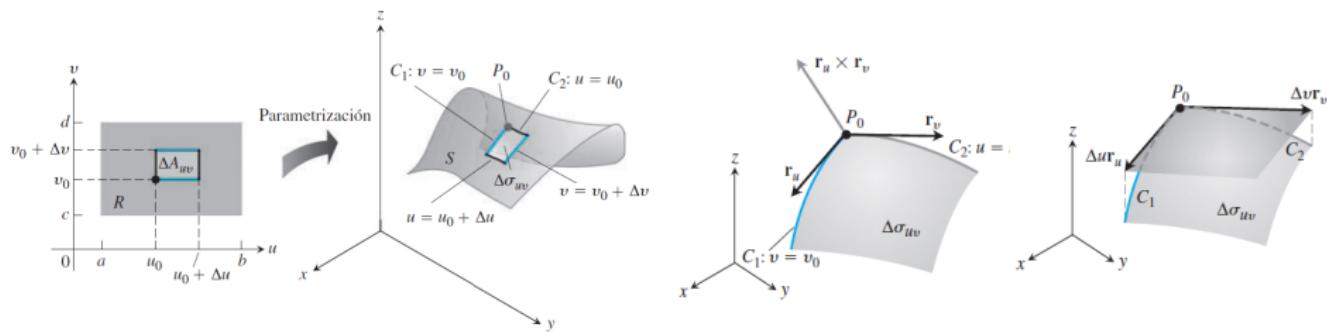
Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u$$

Justificación de la definición de área de una superficie



$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$$

$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v \quad A \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j$$

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

Ejemplo

Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y| = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

TP4B 5b

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- **Integral de superficie de campos escalares**
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Definición

Definición

Dados la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ y el campo escalar f definido en S , se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du \, dv,$$

siempre que exista la integral del segundo miembro.

Observación: la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización que se haga de la misma. (Sin demostración.)

Justificación

Si S está parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, tomamos una partición en R y

$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\sigma &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij} \\&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \\ \iint_S f \, d\sigma &= \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du \, dv.\end{aligned}$$

Ejemplo

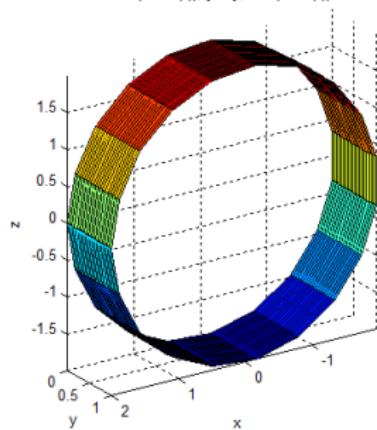
Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$.

Ejemplo

Plantee una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$.

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$x = (2 \cos(\nu)), \quad y = y, \quad z = (2 \sin(\nu))$$



$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$$

$$\|\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y)\| = 2$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dA = \\ &= \iint_R \delta(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta(2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta) 2 dy d\theta. \end{aligned}$$

Ejercicio: TP4B 12e

12. ■ Calcule la integral de la función f dada, sobre la superficie S indicada:
- c) (r) $f(x, y, z) = x\sqrt{5 - 4z}$ sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
- Agregue planteos usando integrales apropiadas, para calcular valores medios de las funciones anteriores sobre las superficies correspondientes.
 - Además, si en algún caso se puede interpretar a la función f como la densidad en cada punto de la superficie S , indique cómo se podrían calcular la masa y las coordenadas del centro de masa de la placa delgada.

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t), 1 - r^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_t| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

$$\iint_S f \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos(t) \sqrt{5 - 4(1 - r^2)} \, dr \, dt = 0.$$

$$\text{vm} = \frac{1}{A(S)} \iint_S f \, d\sigma$$

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- **Superficies orientadas**
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

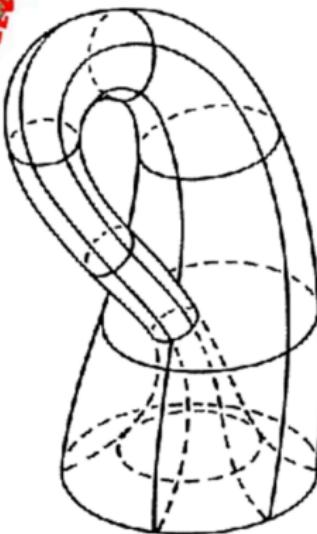
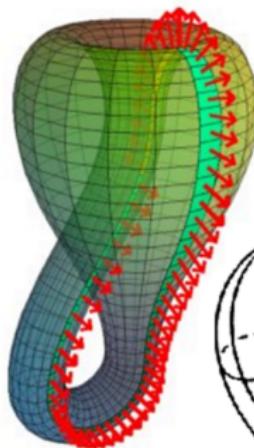
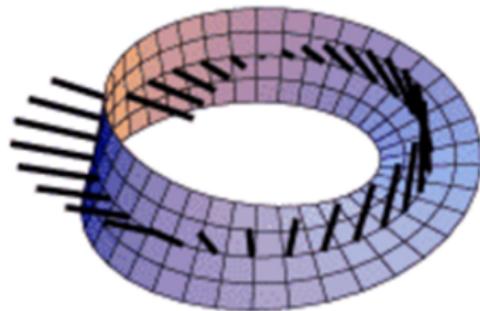
3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Superficies no orientables

Ejemplos: cinta de Möbius y botella de Klein.



Definición

Definición

Una superficie suave S es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial continuo \mathbf{n} que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario.

Una superficie suave S está orientada cuando se ha definido un tal campo vectorial \mathbf{n} sobre S .

Observación: Una superficie que no es suave (como un cono con su vértice, con las parametrizaciones usuales), **no es una superficie orientable**. Pero una superficie suave, como un cono sin vértice, sí puede serlo.

Definición

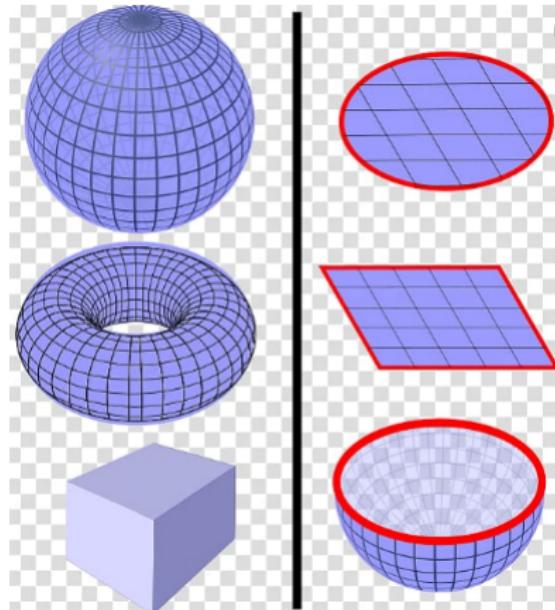
Definición

Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la “interior”, que es acotada, y la “exterior”, que es no acotada.

Una superficie suave **cerrada** está **orientada positivamente** si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S . Si es suave por partes, podemos extender esta idea.

Ejemplo

Las siguientes son superficies suaves por partes y orientables:



Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- **Integral de superficie de campos vectoriales**

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

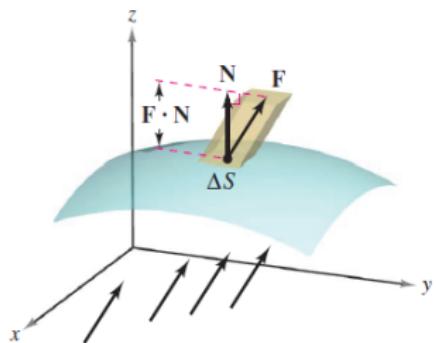
3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Integral de superficie de campos vectoriales

El **flujo** de un campo vectorial \mathbf{F} definido en \mathbb{R}^3 a través de una superficie orientada S en la dirección de \mathbf{n} es $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

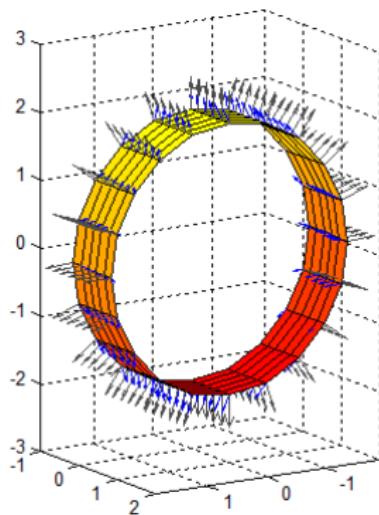


$$\begin{aligned}\text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv \\ &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv.\end{aligned}$$

Notación: si la superficie S es cerrada, se suele anotar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

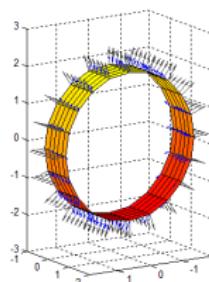
Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y .



Ejemplo

Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y .



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ?$$

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0)$$

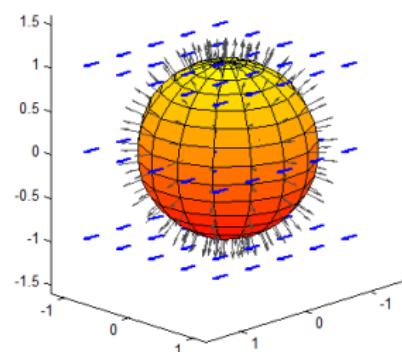
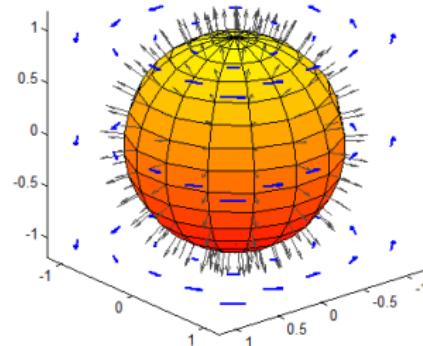
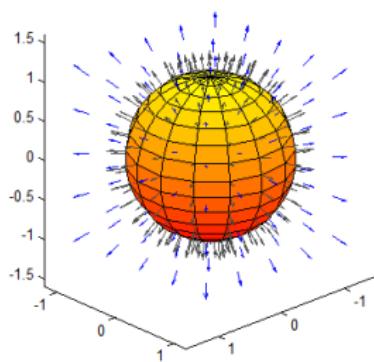
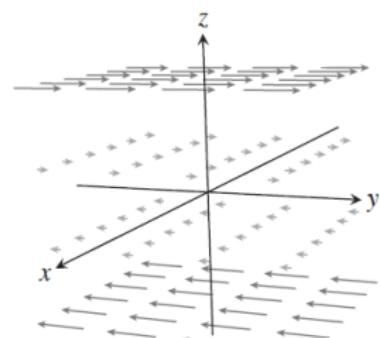
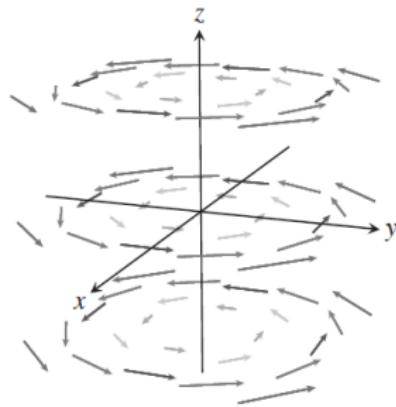
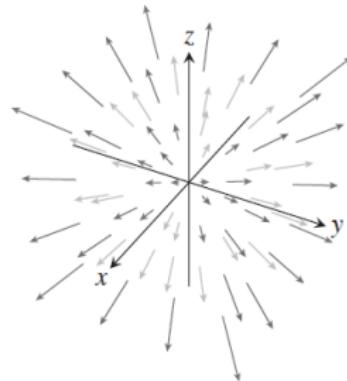
$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$$

Elijo $\theta = 0$ y $y = 0$. Allí: $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y)(0, 0) = (-2, 0, 0)$, **hacia el eje y**.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cdot (2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta) dy d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y \cos \theta + 4 \sin^2 \theta) dy d\theta = 4\pi.$$

Ejemplos gráficos



Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

Ejemplo

Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

$$\text{flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi) \, d\phi \, d\theta$$

$$(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(\theta, \phi) = (-a^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \phi \cos \phi)$$

Para $\theta = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$: $\mathbf{r}(0, \frac{\pi}{2}) = (a, 0, 0)$ y $(\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi)(0, \frac{\pi}{2}) = (-a^2, 0, 0)$.

Apunta hacia el origen: cambio el sentido.

$$\text{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} a \cos \theta \sin \phi \\ a \sin \theta \sin \phi \\ a \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \cos \theta \sin^2 \phi \\ a^2 \sin \theta \sin^2 \phi \\ a^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \, d\phi \, d\theta = 4a^3\pi.$$

Observación

Si el flujo de \mathbf{F} a través de S es k , ¿necesariamente el flujo a través de una superficie S_1 que es una parte de S con exactamente la mitad de área que S es $k/2$?



Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

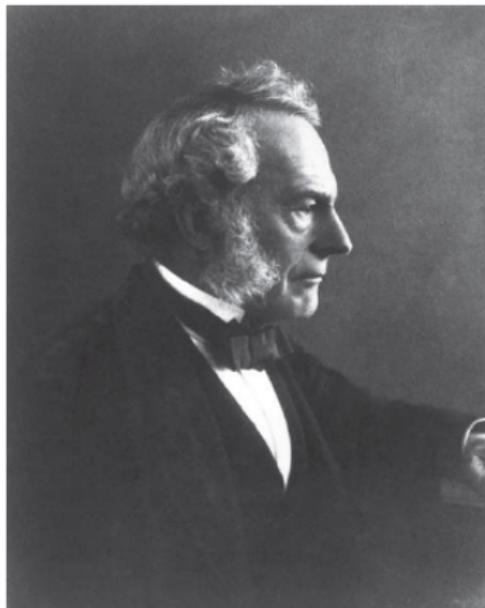
4 Laplaciano

Teoremas de Stokes y de Gauss

Enunciados por Thomas. Demostración del Teorema de Stokes, por Stewart.

Teorema de Stokes: se ofrece un video con una prueba del mismo en
<https://www.youtube.com/watch?v=aaJgkbqjCSg>

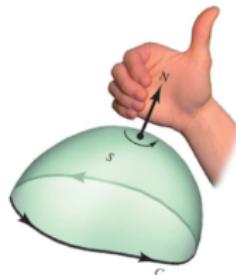
Teorema de Stokes: 1850



**GEORGE GABRIEL STOKES
(1819–1903)**

Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

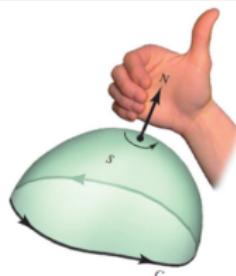
Teorema



Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

Teorema

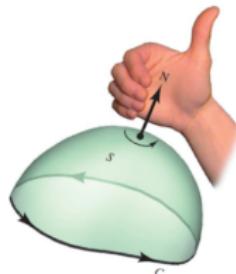
Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes, C .



Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S .

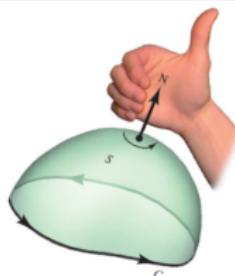


Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes, C . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S . Entonces la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, \mathbf{n} , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

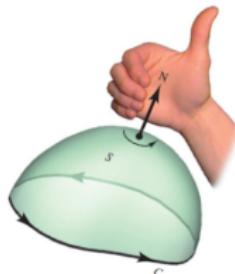


Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes, C . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S . Entonces la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, \mathbf{n} , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

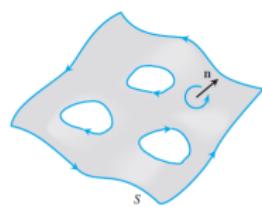
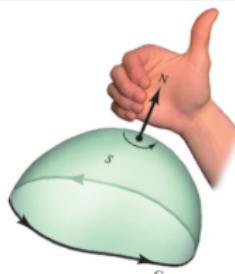


Teorema de Stokes: DEMOSTRAR

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como “frontera” una curva suave por partes, C . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S . Entonces la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, \mathbf{n} , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



Ejemplo

Sea C la curva intersección de las superficies dadas por $y + z = 2$ y $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$. Plantee una integral para calcular la circulación de \mathbf{F} a lo largo de la curva C .

Solución:

$$\text{flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\text{flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

$$\text{flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 1 + 2r \sin t) \cdot (0, -r, r) dr dt = \pi$$

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo D , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si \mathbf{F} es conservativo en D , entonces $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$.
 - ② Si D es simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D , entonces \mathbf{F} es conservativo en D .
- 1 Supongamos que \mathbf{F} es conservativo. Entonces es el gradiente de alguna función potencial f . **Ya lo hemos demostrado**, probando que $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ componente a componente.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en un dominio conexo D , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:

- ① Si \mathbf{F} es conservativo en D , entonces $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$.
 - ② Si D es simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D , entonces \mathbf{F} es conservativo en D .
- 2 Supongamos que D es abierto, conexo y simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{0}}$ en D . Aplicando un teorema de Topología, dado que D es simplemente conexa, se puede asegurar que existe una superficie S en D que tiene como “frontera” a la curva C . Así:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Comparar teoremas de Green y Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy; \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

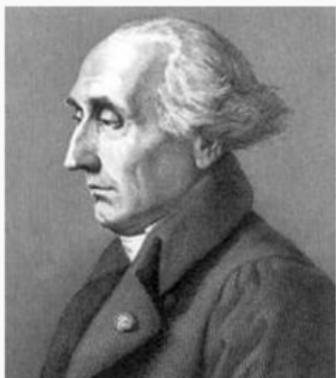
3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Teorema de la divergencia de Gauss

Joseph-Louis Lagrange



Joseph-Louis (Giuseppe Luigi), comte de Lagrange

Born	Giuseppe Lodovico Lagrangia 25 January 1736 Turin, Piedmont-Sardinia
Died	10 April 1813 (aged 77) Paris, France

Lagrange 1762

Johann Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauß (1777–1855), painted by Christian Albrecht Jensen

Born	Johann Carl Friedrich Gauss 30 April 1777 Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Holy Roman Empire
Died	23 February 1855 (aged 77) Göttingen, Kingdom of Hanover

Gauss 1813

Mikhail Ostrogradsky



Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky

Born	September 24, 1801
Died	January 1, 1862 (aged 60) Poltava

Ostrogradsky 1826

Teorema de la divergencia de Gauss

Teorema

Sea S una superficie **cerrada** positivamente orientada, suave por partes, sea D la región sólida encerrada por S y sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S . Entonces el flujo de \mathbf{F} a través hacia fuera de S es:

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

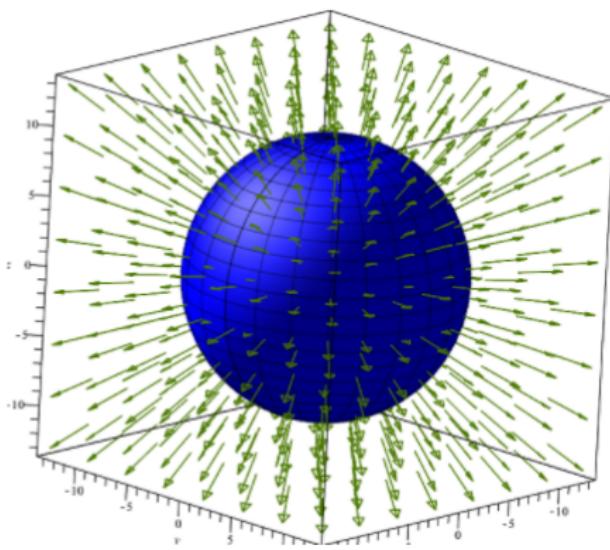
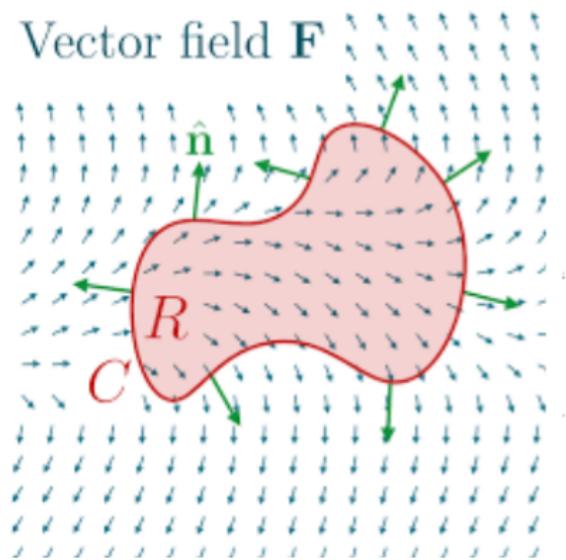
SIN DEMOSTRAR

Comparar teoremas de Green y Gauss

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy;$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

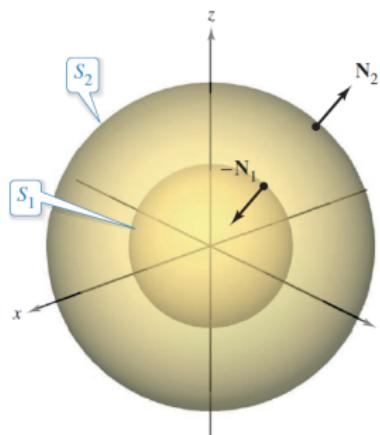
Vector field \mathbf{F}



Teorema de la divergencia en otras regiones

El Teorema de la divergencia de Gauss puede aplicarse a regiones más generales, en particular, a regiones con agujeros. Supongamos que D es la región del espacio entre las superficies esféricas S_2 y S_1 , como se ve en la imagen siguiente:

Figura: Aplicación del Teorema de la divergencia a regiones con agujeros



Las superficies S_1 y S_2 se orientan de manera conveniente.

Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

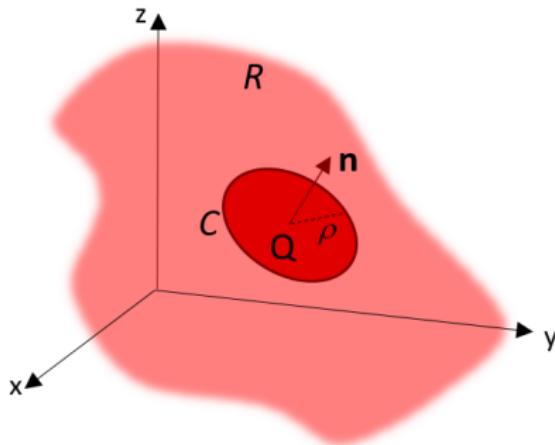
- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Interpretación del rotor



El Teorema de Stokes establece que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

cuando C está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por \mathbf{n} a S .

Interpretación del rotor

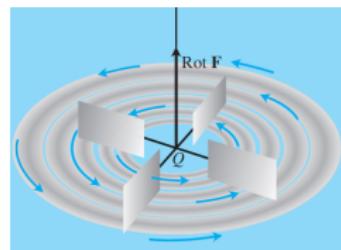
El Teorema del Valor Medio aplicado a $\nabla \times \mathbf{F}$ en S asegura que existe un punto $Q_1 \in S$ tal que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \pi \rho^2 [(\nabla \times \mathbf{F})(Q_1) \cdot \mathbf{n}(Q_1)].$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (1)$$

Aplicando el Teorema de Stokes en el primer miembro de (1), obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}.$$

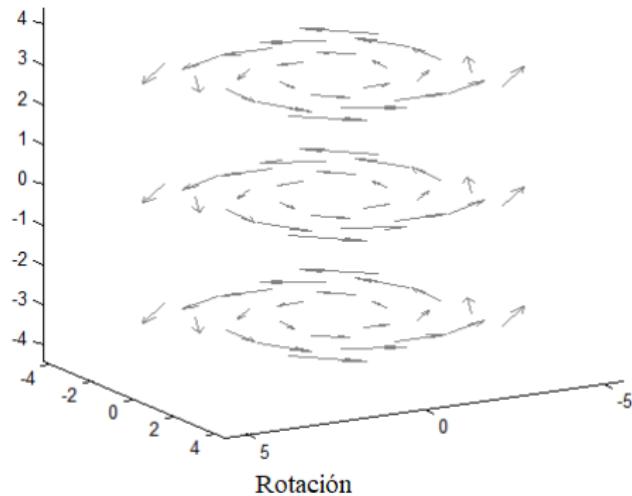


$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}.$$

Interpretación del rotor: ejemplos

Supongamos que \mathbf{F} es la velocidad de un gas que fluye en el espacio, para los siguientes casos:

Rotación: $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 2) = 2\mathbf{k}$.

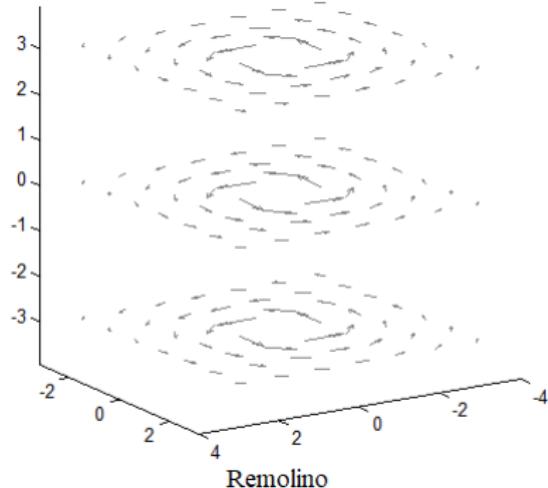


Interpretación del rotor: ejemplos

Remolino: $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$, es \mathbb{R}^3 sin el eje z .

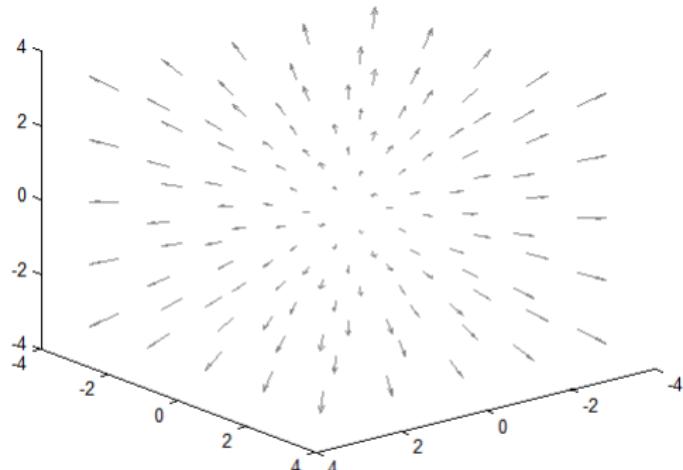
D es abierto y conexo pero no es simplemente conexo.



Interpretación del rotor: ejemplos

Expansión o compresión uniforme:

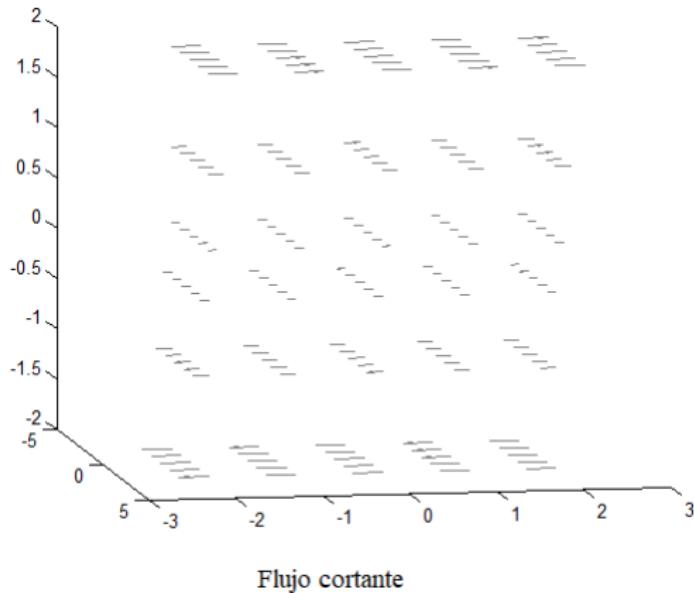
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (cx, cy, cz); \quad (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0).$$



Expansión

Interpretación del rotor: ejemplos

Corte: $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, z, 0)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (-1, 0, 0)$.



Recorrido

1 Integrales de superficie de campos escalares y vectoriales

- Superficies paramétricas y sus áreas
- Integral de superficie de campos escalares
- Superficies orientadas
- Integral de superficie de campos vectoriales

2 Teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss

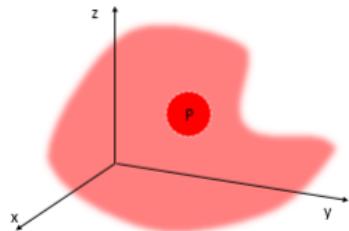
- Teorema de Stokes
- Teorema de la divergencia de Gauss

3 Interpretación de rotor y divergencia

- Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3
- Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

4 Laplaciano

Interpretación de la divergencia de \mathbf{F}



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Aplicando el Teorema del valor medio para integrales en el segundo miembro,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) \frac{4}{3} \pi r^3, \quad \text{para cierto } Q \in W.$$

Tomando límites obtenemos:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

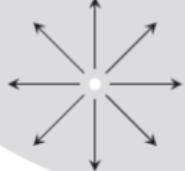
y, si tomamos un valor fijo de $r > 0$ pequeño,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) \approx \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Interpretación de la divergencia de \mathbf{F}

Fuente: $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) > 0$

Un gas en expansión
en el punto (x_0, y_0) .



Sumidero: $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) < 0$

Un gas en compresión
en el punto (x_0, y_0) .



La divergencia en el punto P es la tasa de flujo neto hacia fuera en P por unidad de volumen.

Así, si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, el punto P se llama **fuente** ya que el flujo neto alrededor de P es positivo; si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, P se llama **sumidero** para \mathbf{F} . Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = 0$ en todo \mathbb{R}^3 , entonces \mathbf{F} se llama **solenoidal** y, si es un campo de velocidades de un fluido, decimos que el fluido es **incompresible**.

Laplaciano

Definición

El Laplaciano de un campo escalar f se anota Δf o $\nabla^2 f$ y se define como la divergencia del gradiente de f :

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

El Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ se anota $\Delta\mathbf{F}$ o $\nabla^2\mathbf{F}$ y es el vector de los Laplacianos de las funciones componentes de \mathbf{F} :

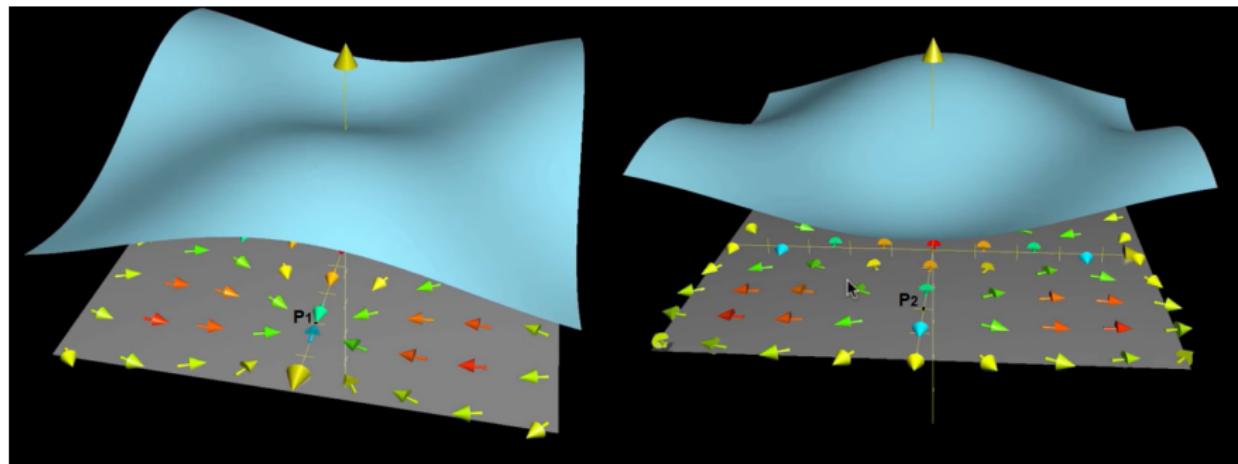
$$\Delta\mathbf{F} = \nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2 M, \nabla^2 N, \nabla^2 P).$$

Laplaciano: interpretación

Video de Khan Academy

[https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/laplacian/v/laplacian-intuition.](https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/laplacian/v/laplacian-intuition)

Figura: Interpretación del Laplaciano



Si $f(P_1)$ es máximo, $\Delta f(P_1) < 0$; si $f(P_2)$ es mínimo, $\Delta f(P_2) > 0$.

Laplaciano: propiedades

Propiedad:

- ① El Laplaciano de un campo escalar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cumple:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{x_n^2}.$$

- ② El Laplaciano de un campo vectorial definido en \mathbb{R}^3 cumple:

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Dejamos la demostración como ejercicio.