UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

ÁRBOLES Y EJES

2025

Ing Cristian Aguilera

NOMENCLATURA

En la literatura técnica hay mucha confusión entre los términos usados para definir que es un árbol o un eje o si es lo mismo, para evitar esto vamos a definir como:

Árbol: barra cilíndrica giratoria, que sirve para transmitir potencia mediante dispositivos fijos a él, como ser, engranajes, poleas, levas, ruedas para cadena, etc. Generalmente está sujeto a cargas de flexión y torsión.

Eje: barra fija que sirve para soportar a diversos Elementos de Máquinas giratorios, como poleas, engranajes, etc. Generalmente está sujeto solo a cargas de flexión.

Mango o husillo: árbol de pequeña longuitud, usado generalmente en Maquinas Herramientas Generalmente están sometidos a flexión y torsión.

Árbol flexible: son aquellos que permiten la transmisión de potencia entre dos puntos en los ejes de giro se encuentran a cierto ángulo uno del otro. Transmiten potencias bajas y están sometidos a flexión y torsión.

MOMENTO TORSOR- POTENCIA- NÚMERO DE VUELTAS

Generalmente en los problemas técnicos se dan como datos la potencia que transmite el árbol y su velocidad angular, expresada en revoluciones por minuto (r.p.m). Con estos datos se suele calcular el momento torsor que transmite el árbol. Como se sabe, la potencia en caballos vapor (cv)

Es Igual a: $P = Mt.\ w/75$

Siendo P: potencia transmitida. en (cv)

Mt: Momento torsor, en (Kgm)

W: Velocidad angular, en (1/s)

$$w = \pi.n/30$$

Despejando y reemplazando nos queda

$Mt = 75.P/w = (30.75/\pi)\ .\ P/n = 716{,}20\ P/n$

Correntemente el Mt se expresa en (kgcm), por lo que tenemos:

Mt = 7162 0 . P/n

Algunos ejemplos de elementos acoplados a Árboles

- ***Rueda de cadenas***

$F_{cad} = M_t \cdot D/2$

$F_{cad}\,x = F_{cad} \cos\theta$ $\qquad$ $F_{cad}\,y = F_{cad} \operatorname{sen}\theta$

- ***Poleas en V***

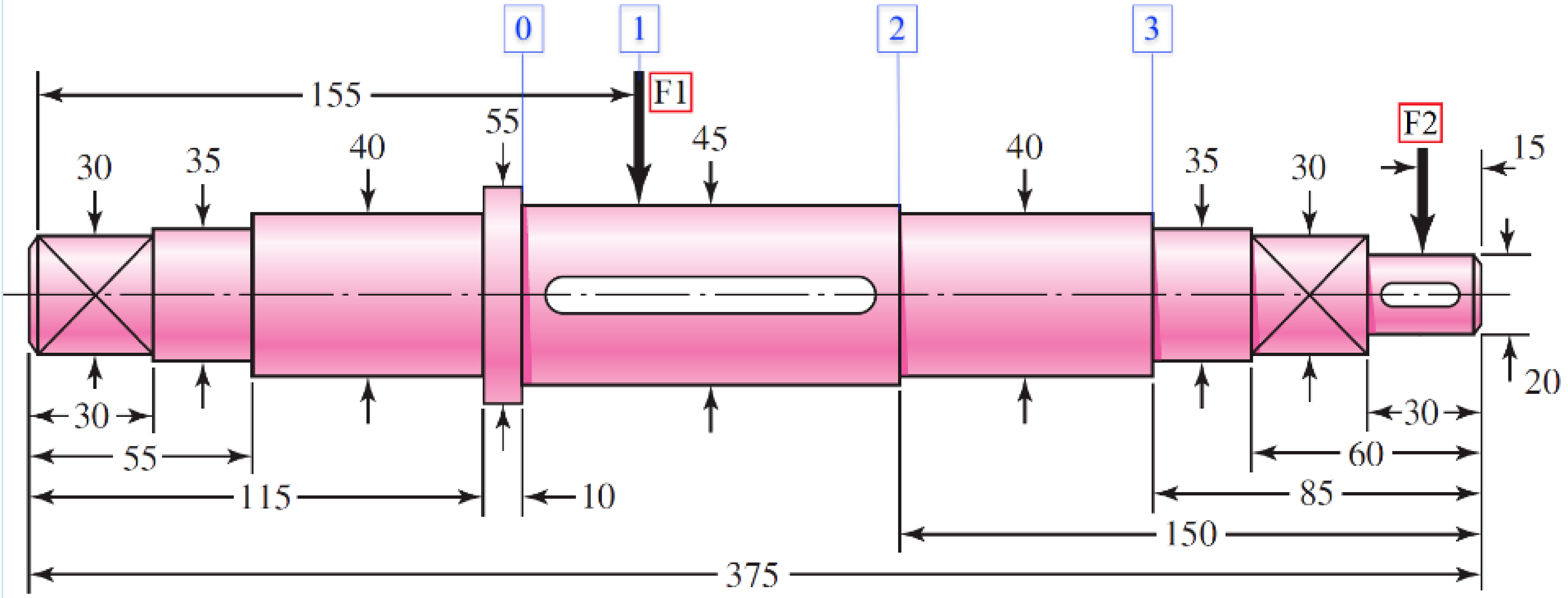
$F_B = 1{,}5\ F_t = 1{,}5\ M_t\ D/2$

- ***Poleas planas***

$F_B = 2\ F_t = 2\ M_t\ D/2$

TEORÍA	FÓRMULA BÁSICA	ECUACIÓN
Soderberg	$\frac{n.\sigma_a}{\sigma_{f1}} + \frac{n.\sigma_m}{\sigma_f} = 1$	(a)
Goodman	$\frac{n.\sigma_a}{\sigma_{f1}} + \frac{n.\sigma_m}{\sigma_R} = 1$	(b)
Gerber	$\frac{n.\sigma_a}{\sigma_{f1}} + \left(\frac{n.\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$	(c)
Elíptica ASME	$\left(\frac{n.\sigma_a}{\sigma_{f1}}\right)^2 + \left(\frac{n.\sigma_m}{\sigma_f}\right)^2 = 1$	(d)
Bagci	$\frac{n.\sigma_a}{\sigma_{f1}} + \left(\frac{n.\sigma_m}{\sigma_f}\right)^4 = 1$	(e)
Fluencia (Langer)	$\frac{n}{\sigma_f}(\sigma_a + \sigma_m) = 1$	(f)

Problema N°1



Todos los filetes 2 mm

Problema N°1

Se requiere ***verificar el árbol*** mostrado en la figura. Dicha pieza estará instalada sobre ***dos apoyos*** (por lo cual se considera como viga simplemente apoyada) en las zonas donde el ***diámetro es de 30mm***.

Tendrá un engranaje instalado en el chavetero mayor (sobre la zona de diámetro 45mm), y una polea en el chavetero menor (sobre la zona de diámetro 15mm).

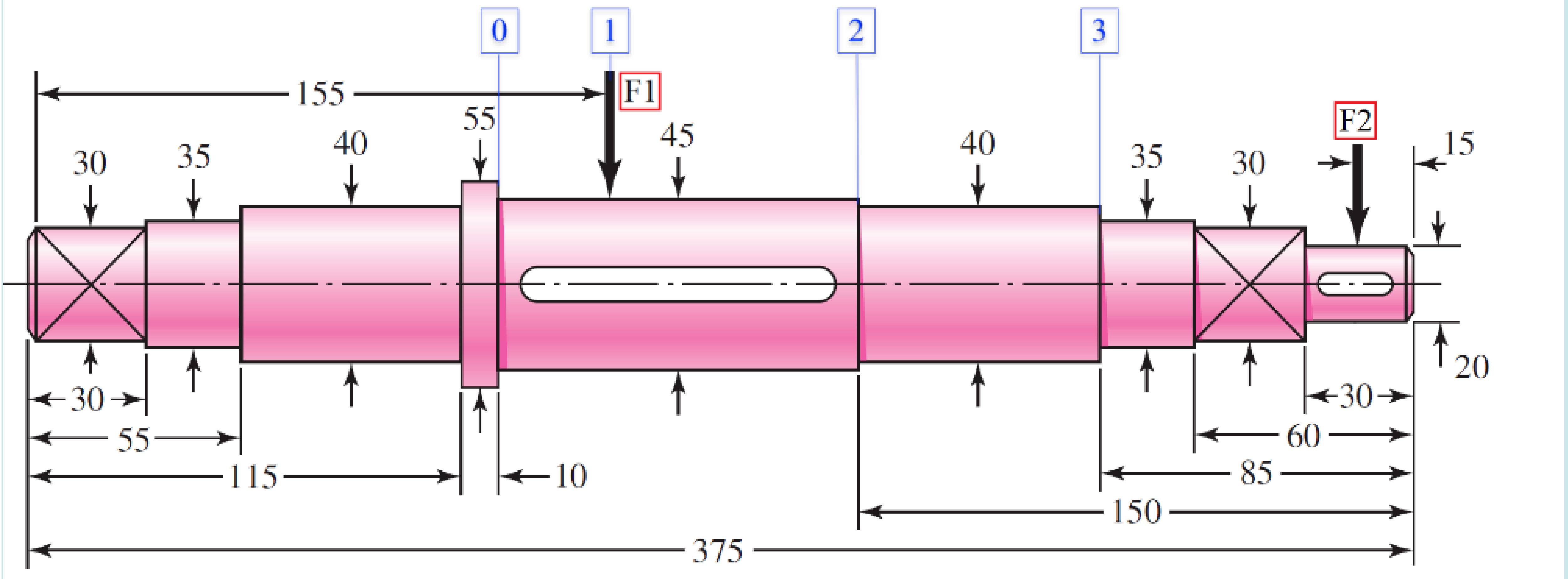
Entre esas zonas el árbol transmite una potencia de **30 kW** y trabaja a una velocidad de **1000 rpm**.

El engrane provoca una fuerza transversal **F1 = 7000** N, y la polea provoca una fuerza transversal **F2 = 3200 N**.

Se usará **acero SAE 4140 TyR a 425ºC,** la terminación superficial será **"rectificado",** y se requiere una confiabilidad de **99,9999%** Todos los radios de los hombros son de **2 mm,** y el radio en el fondo de los chaveteros es de **0,45 mm.**

Se deben verificar las secciones 0, 1, 2 y 3.

Problema N°1



Todos los filetes 2 mm

Problema N°1

a) Calcule las reacciones sobre los soportes.

b) Luego, calcule el momento flector y momento torsor para cada plano de análisis.

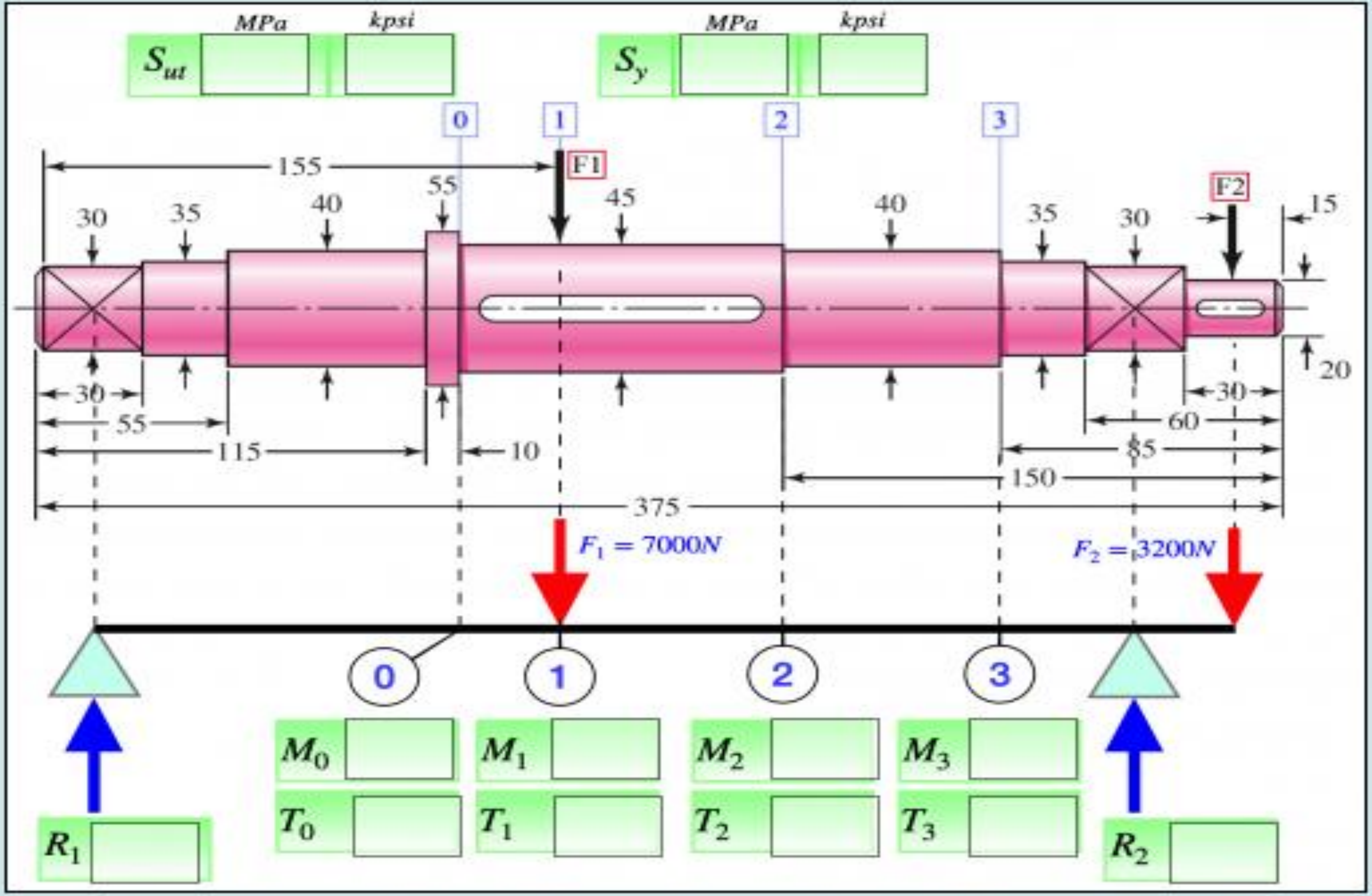
Indique en los cuadros superiores las tensiones limites del material.

Unidades considerar:

Momentos torsores y flectores: **[N.m]**

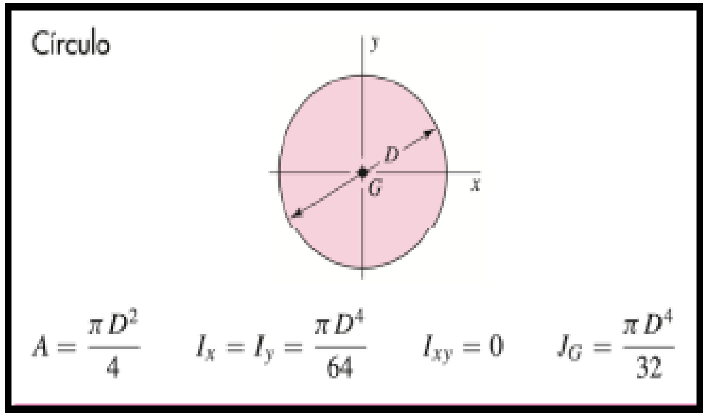
Fuerzas: **[N]**

Esfuerzos: **[MPa]** y **[kpsi]**



502	181	3584	6616	41	0	1248	1138	394	165	263	286

SECCION 0 (hombro 55—>45 r2)



FLEXION

$\boxed{M_0 = 394Nm}$

$M_{0max} = 394Nm$

$M_{0min} = -394Nm$

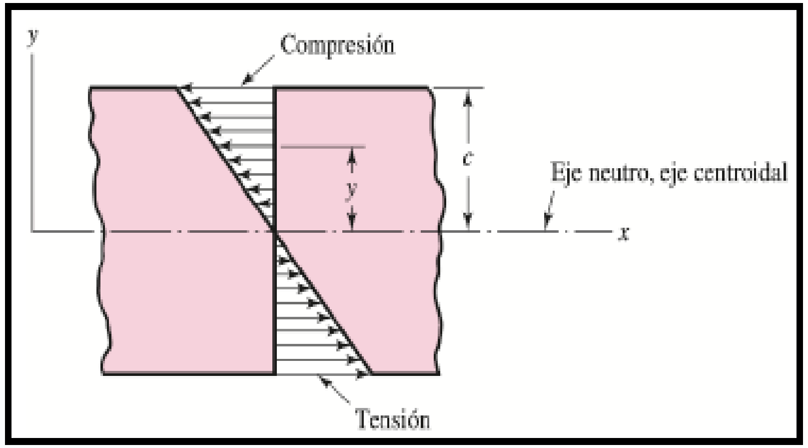
$$\boxed{\sigma_{flexion} = \frac{M_F}{I_{xx}} * c}$$

$$I_{xx} = \frac{\pi * d^4}{64}$$

$$I_{xx} = \frac{\pi * (45mm)^4}{64} = 201289mm^4$$

$$d_2 = 45mm$$

$$c = d_2/2 = 45mm/2 = 22,5mm$$



$$M_m = \frac{M_{max} + M_{min}}{2} = 0N.m$$

$$\sigma_m = \frac{M_m}{I_{xx}} * c = 0MPa$$

$$M_a = \left| \frac{M_{max} - M_{min}}{2} \right| = 394N.m$$

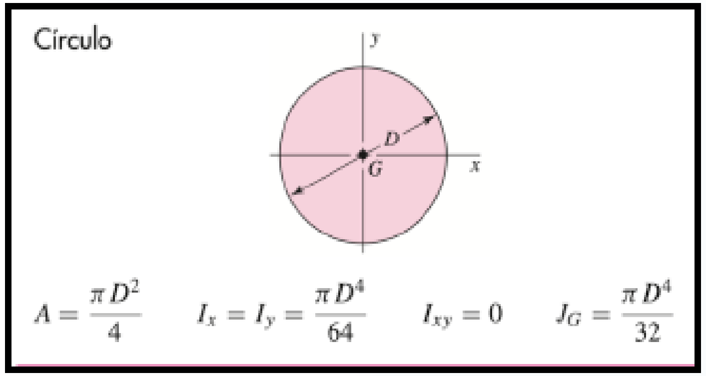
$$\sigma_a = \frac{M_a}{I_{xx}} * c = 44,1MPa$$

SECCION 0 (hombro 55—>45 r2)

$$T_0 = 0Nm \qquad T_{1max} = 0Nm \qquad T_{1min} = 0Nm$$

TORSION

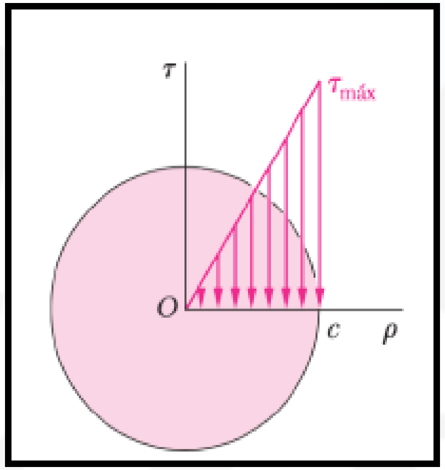
$$T_1 = 286Nm \qquad T_{1max} = 286Nm \qquad T_{1min} = 286Nm$$



$$\boxed{\tau = \frac{T}{J} * c}$$

$$J = \frac{\pi * d^4}{32} \qquad J = \frac{\pi * (45mm)^4}{32} = 402578mm^4$$

$$d_2 = 45mm \qquad c = d_2/2 = 45mm/2 = 22{,}5mm$$



$$T_m = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} = 0Nm \qquad \tau_m = \frac{T_m}{J} * c = 0MPa$$

$$T_a = \left| \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \right| = 0Nm \qquad \tau_a = \frac{T_a}{J} * c = 0MPa$$

1- Calculo del limite de resistencia a la fatiga del material (probeta) (Ec. 4-1)

2-Determinacion de los factores que modifican la resistencia a la fatiga de un elemento de maquina.

3- Resistencia a la fatiga del elemento de maquina (S_e) (Ec. 4-8)

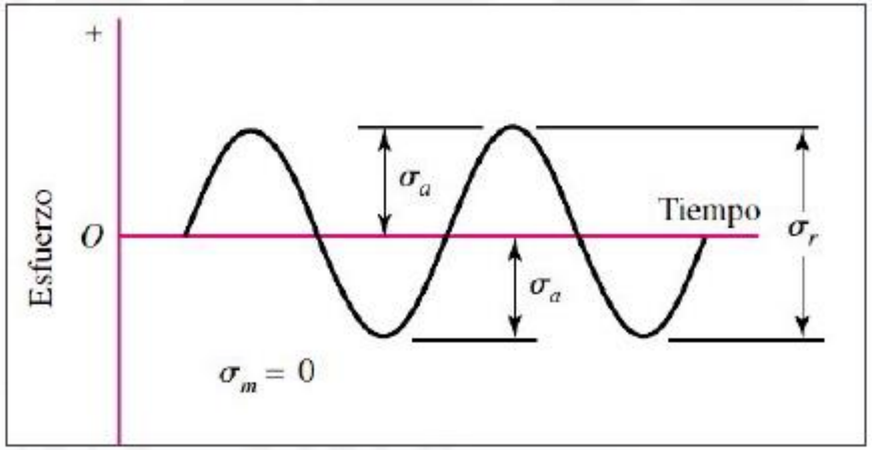
4-Calculo del esfuerzo medio y esfuerzo fluctuante para cargas simples (Ec. 5-1 y 5-2)

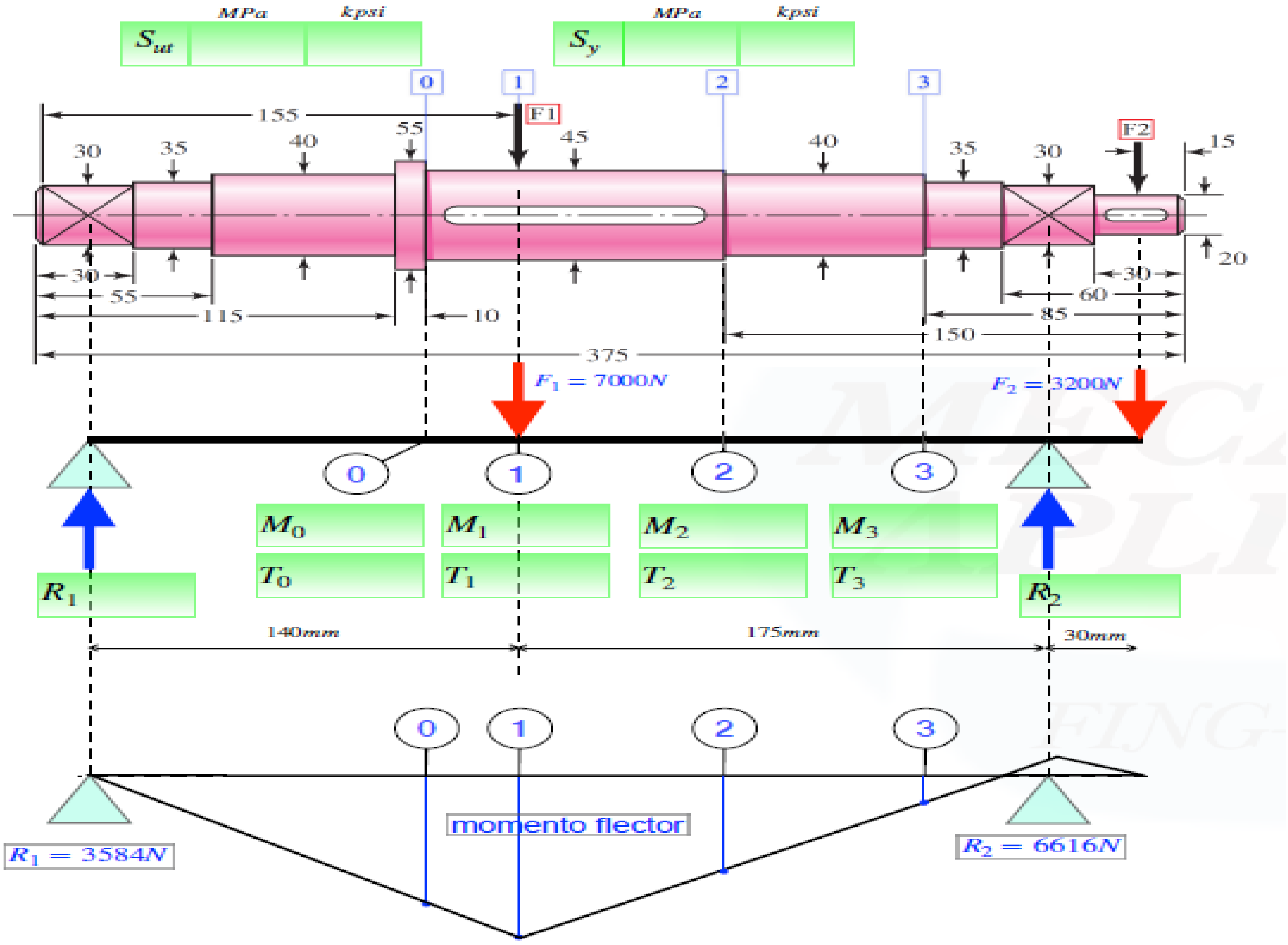
5-Calculo de los factores de concentracion de tensiones (Ec. 5-3 y 5-4)

6- Esfuerzos fluctuantes de fatiga aplicados al elemento de maquina. (σ'_a, σ'_m) (Ec. 5-5 y 5-6)

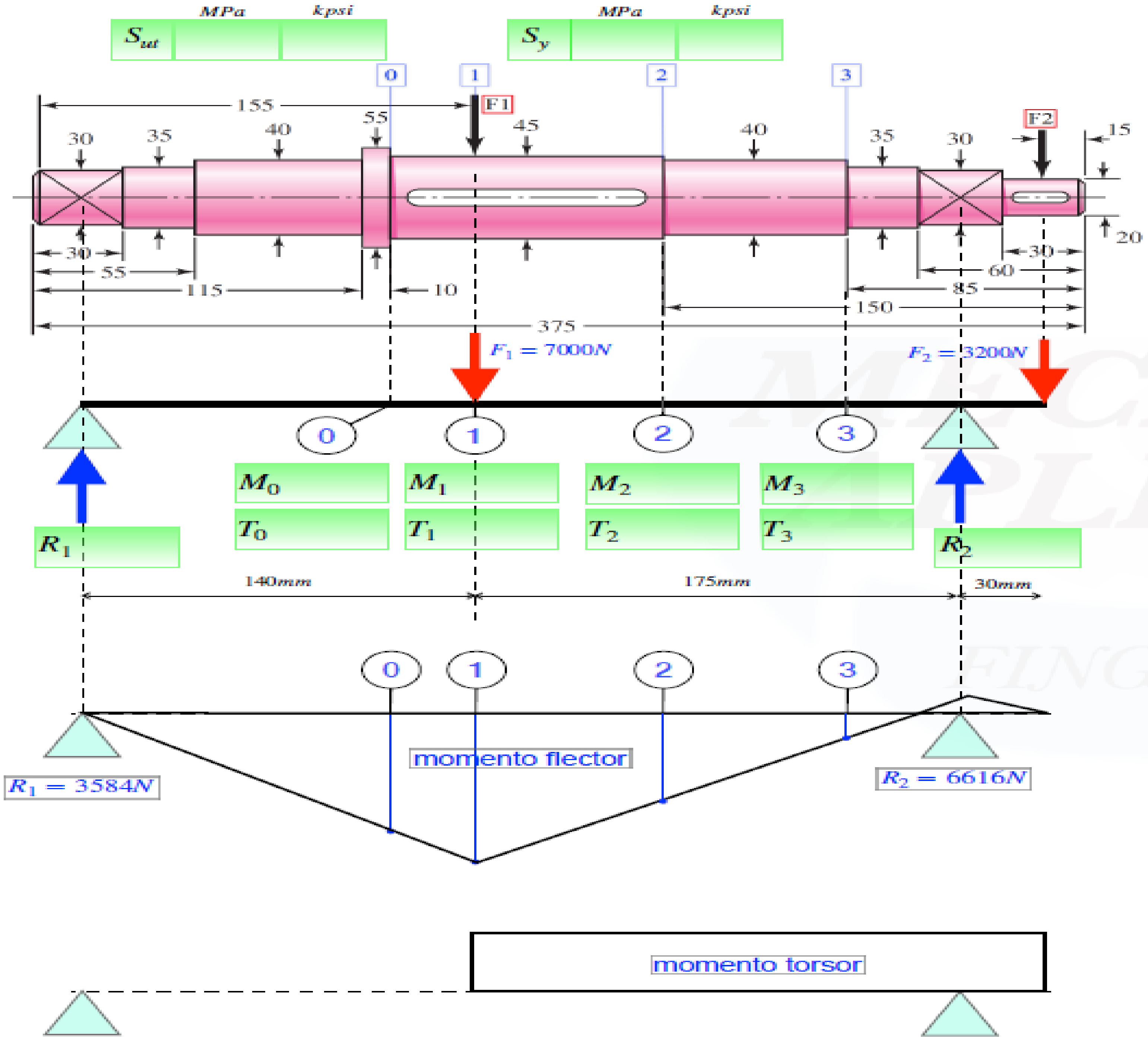
7- Verificacion a la Fatiga para piezas sometidas a esfuerzos fluctuantes, de acuerdo a varios criterios de falla

(calculo del factor de seguridad) (Tabla 4)



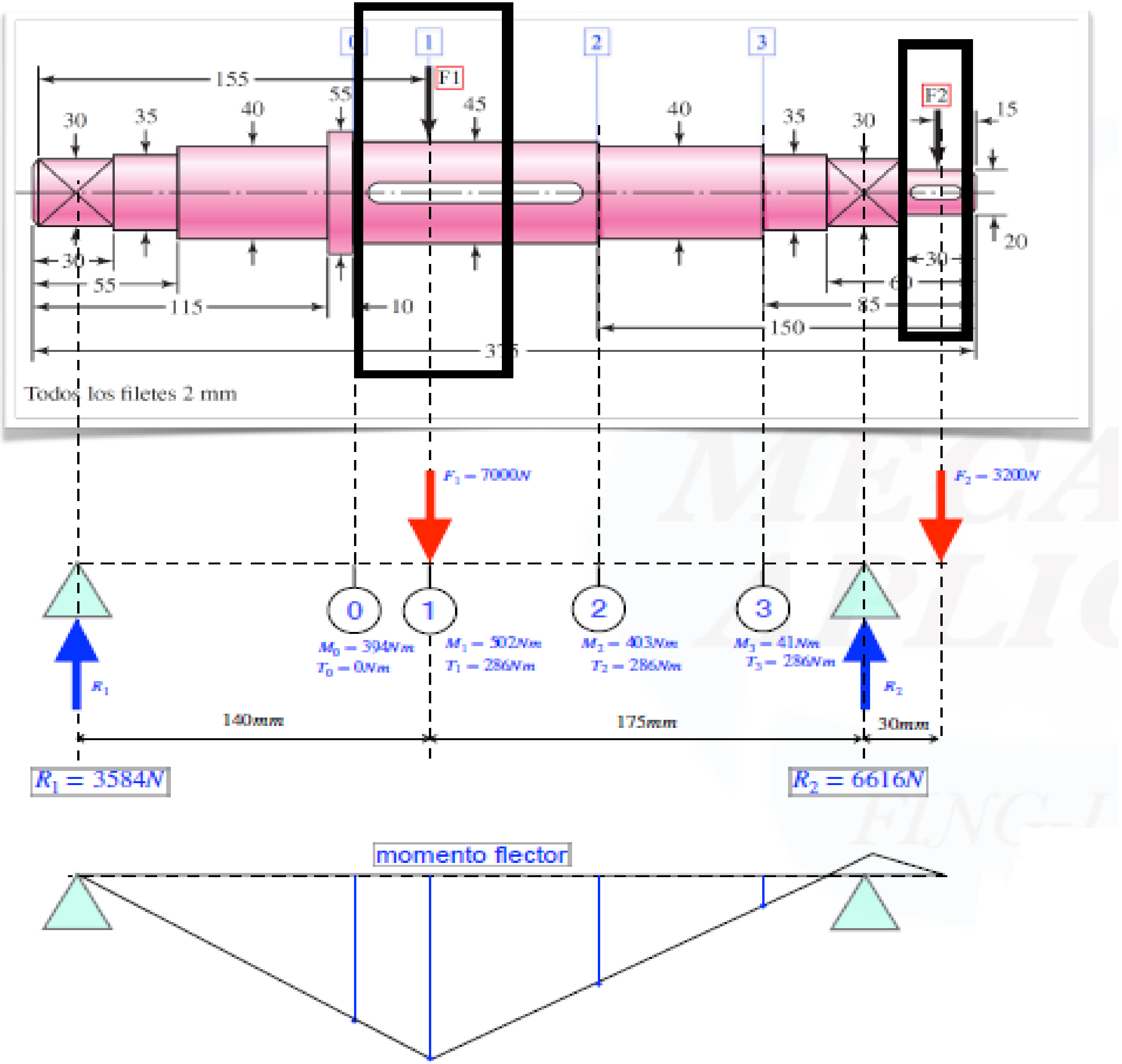


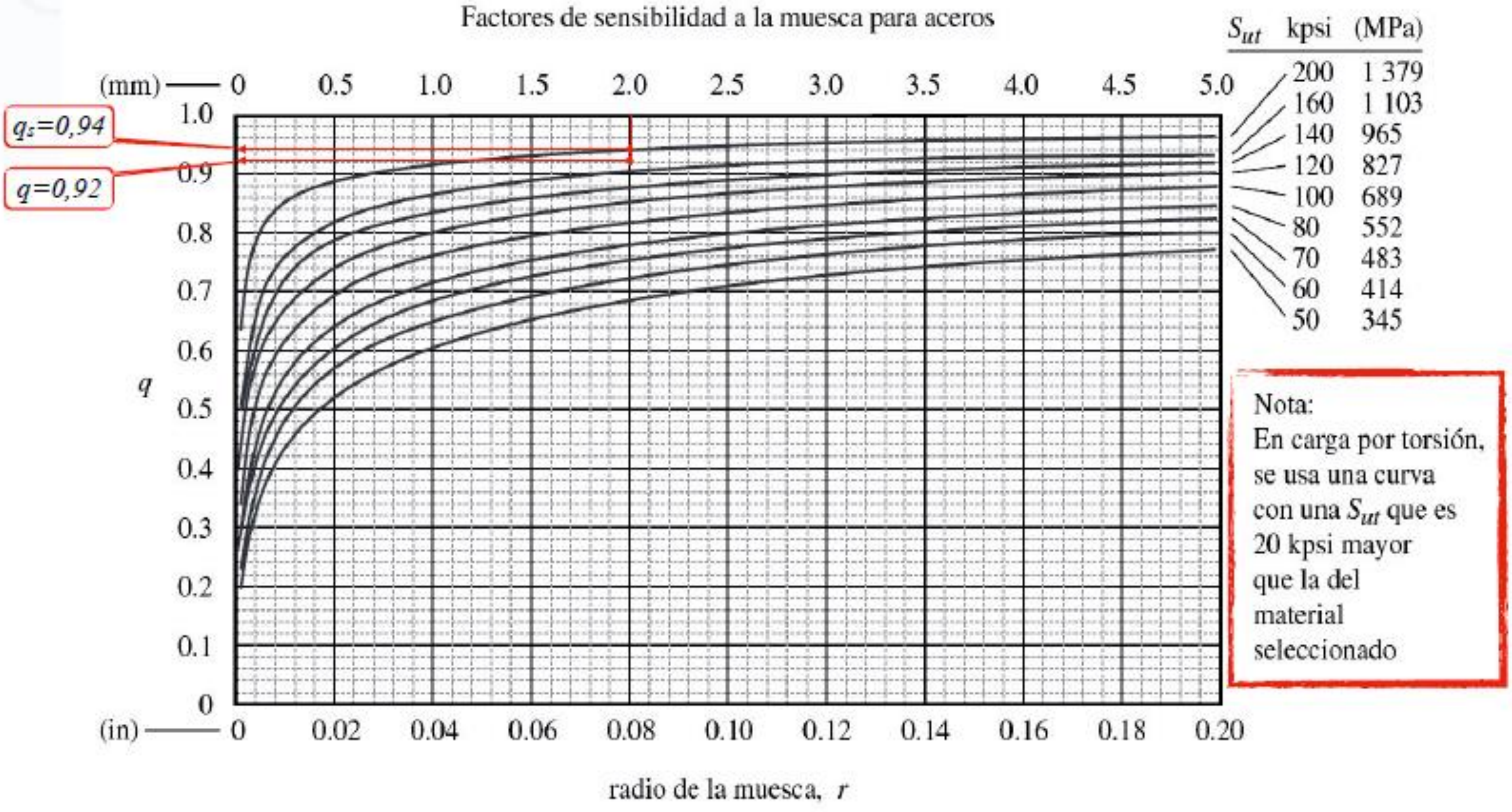
S_{ut} MPa kpsi
S_y MPa kpsi
0 1 2 3
155
F1
F2
30 35 40 55 45 40 35 30 15
20
30 55 115 10
30 60 85 150
375
$F_1 = 7000N$
$F_2 = 3200N$
M_0 M_1 M_2 M_3
T_0 T_1 T_2 T_3
R_1
R_2
140mm
175mm
30mm
momento flector
$R_1 = 3584N$
$R_2 = 6616N$



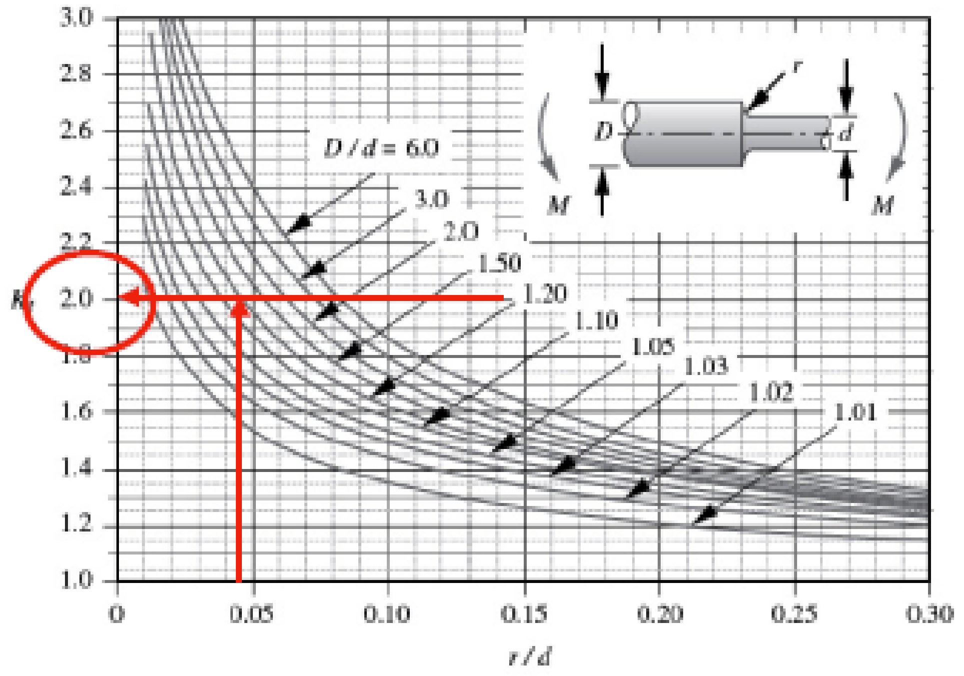
MPa
kpsi
S_{ut}
MPa
kpsi
S_y
0
1
2
3
F1
F2
155
30
35
40
55
45
40
35
30
15
20
30
55
115
10
30
60
85
150
375
$F_1 = 7000N$
$F_2 = 3200N$
M_0
T_0
M_1
T_1
M_2
T_2
M_3
T_3
R_1
R_2
140mm
175mm
30mm
momento flector
$R_1 = 3584N$
$R_2 = 6616N$
momento torsor

$S_{UT} = 1250MPa = 181kpsi$ $S_y = 1140MPa = 165kpsi$




Factores de sensibilidad a la muesca para aceros
S_{ut} kpsi (MPa)
200 1 379
160 1 103
140 965
120 827
100 689
80 552
70 483
60 414
50 345
(mm) 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0
q_s=0,94
q=0,92
q
1.0 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
(in) 0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.10 0.12 0.14 0.16 0.18 0.20
radio de la muesca, r
Nota:
En carga por torsión, se usa una curva con una S_{ut} que es 20 kpsi mayor que la del material seleccionado

SECCION 0 (hombro 55—>45 r2)



$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
6.00	0.878 68	−0.332 43
3.00	0.893 34	−0.308 60
2.00	0.908 79	−0.285 98
1.50	0.938 36	−0.257 59
1.20	0.970 98	−0.217 96
1.10	0.951 20	−0.237 57
1.07	0.975 27	−0.209 58
1.05	0.981 37	−0.196 53
1.03	0.980 61	−0.183 81
1.02	0.960 48	−0.177 11
1.01	0.919 38	−0.170 32

FLEXION

$$K_f = 1 + q\,.\left(K_t - 1\right)$$

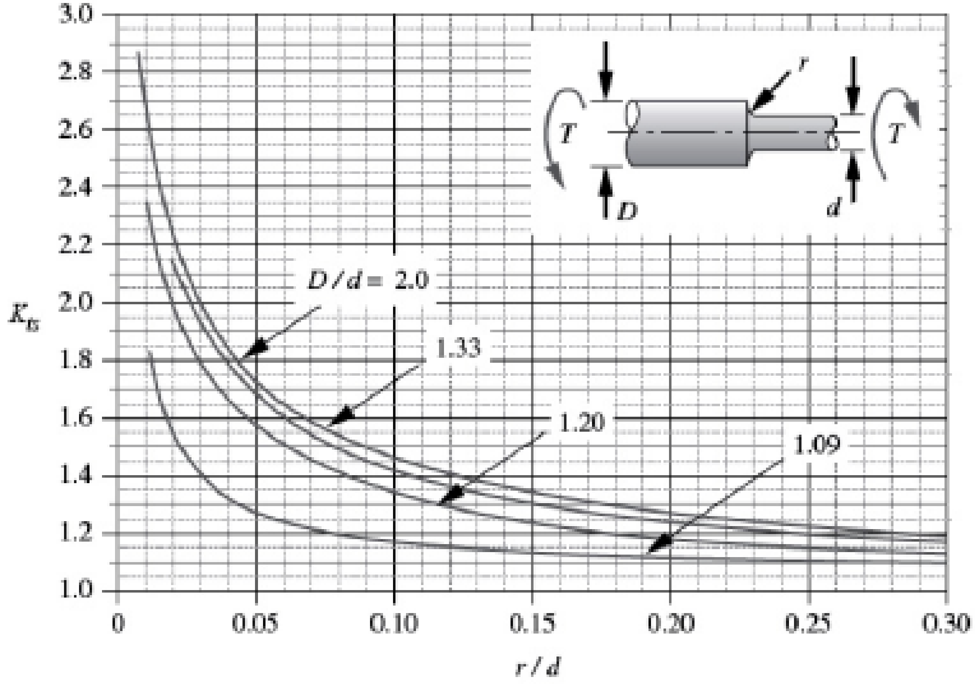
$$\frac{r}{d} = \frac{2}{45} = 0{,}044 \qquad \frac{D}{d} = \frac{55}{45} = 1{,}222$$

$\boxed{K_t = 2}$ $\boxed{q = 0{,}92}$ $K_f = 1 + 0{,}92.\,(2-1) = 1{,}92$ $\boxed{K_f = 1{,}92}$

SECCION 0 (hombro 55—>45 r2)

Tensiones normales PARA TORSION en una barra cilíndrica:

TORSION



$$K_{ts} \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
2.00	0.863 31	–0.238 65
1.33	0.848 97	–0.231 61
1.20	0.834 25	–0.216 49
1.09	0.903 37	–0.126 92

Calculo de la tensión límite de fatiga *Se*

S_{ut} S_y

1 AISI núm.	2 Tratamiento	3 Temperatura, °C (°F)	4 Resistencia a la tensión MPa (kpsi)	5 Resistencia a la fluencia, MPa (kpsi)	6 Elongación, %	7 Reducción del área, %	8 Dureza Brinell
4140	TyR	205 (400)	1 770 (257)	1 640 (238)	8	38	510
	TyR	315 (600)	1 550 (225)	1 430 (208)	9	43	445
	TyR	425 (800)	1 250 (181)	1 140 (165)	13	49	370

$$S_e^{'} = S_{ut} \times 0{,}5 = 1250MPa \times 0{,}5 = 625MPa$$

$$\boxed{S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S_e'}$$

k_a : factor de modificación de la condición superficial

k_b : factor de modificación del tamaño

k_c : factor de modificación de la carga kc= 1

k_d : factor de modificación de la temperatura kd= 1

k_e : factor de confiabilidad

k_f : factor de efectos diversos kf= 1

S'_e : tension limite de fatiga de la probeta

S_e : tension limite de fatiga de la pieza o elemento de maquina

Factor de Superficie

$$\boxed{k_a = a \cdot (S_{ut})^b}$$

Terminación Superficial	Factor a		Exponente b
	S_{ut} en kpsi	S_{ut} en MPa	
Rectificado	1,34	1,58	-0,085
Mecanizado o laminado en frio	2,70	4,51	-0,265
Laminado en caliente	14,4	57,7	-0,718
Forjado (en bruto)	39,9	272	-0,995

$$k_a = a\,.(S_{ut})^b = 1{,}58.(1250)^{(-0{,}085)} = 0{,}862 \longrightarrow \boxed{k_a = 0{,}862}$$

Factor de Tamaño

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} = 0.879d^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} = 1.24d^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases}$$

$$k_b = 1{,}51.(d)^{(-0{,}157)} = 1{,}51.(55)^{(-0{,}157)} = 0{,}805 \longrightarrow \boxed{k_b = 0{,}805}$$

Factor de Confiabilidad

Confiabilidad %	Factor de Confiabilidad k_e
50	1
90	0,897
95	0,868
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659
99,9999	0,62

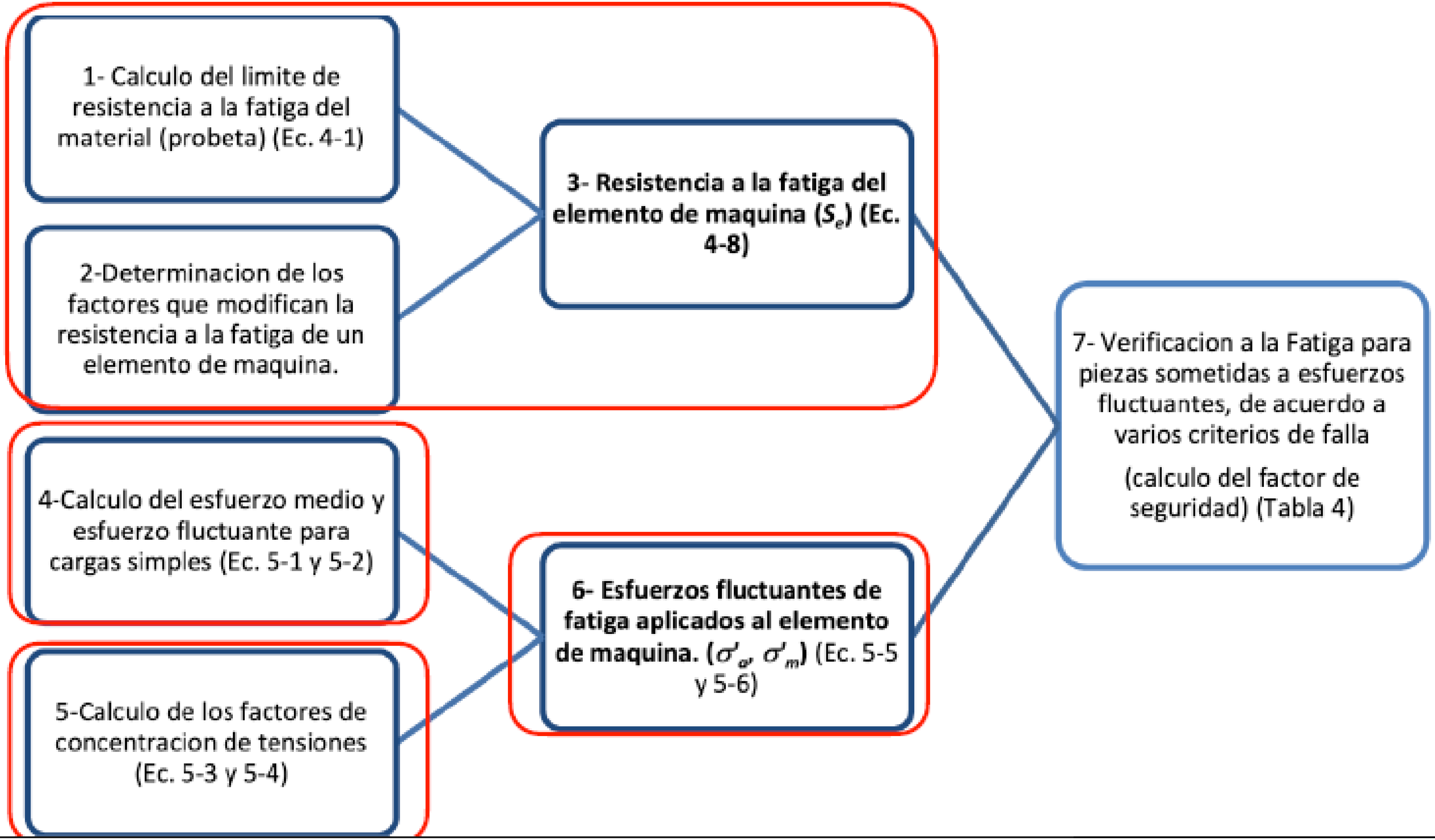
$$\boxed{k_e = 0{,}62}$$

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

$k_a = 0{,}862$ $k_b = 0{,}805$ $k_e = 0{,}62$

$$S'_e = S_{ut} \times 0{,}5 = 1250MPa \times 0{,}5 = 625MPa$$

$$S_e = 625MPa\,.\,ka\,.\,kb\,.\,ke = 268{,}89MPa \rightarrow 268MPa$$


1- Calculo del limite de resistencia a la fatiga del material (probeta) (Ec. 4-1)
2-Determinacion de los factores que modifican la resistencia a la fatiga de un elemento de maquina.
3- Resistencia a la fatiga del elemento de maquina (S_e) (Ec. 4-8)
4-Calculo del esfuerzo medio y esfuerzo fluctuante para cargas simples (Ec. 5-1 y 5-2)
5-Calculo de los factores de concentracion de tensiones (Ec. 5-3 y 5-4)
6- Esfuerzos fluctuantes de fatiga aplicados al elemento de maquina. (σ'_a, σ'_m) (Ec. 5-5 y 5-6)
7- Verificacion a la Fatiga para piezas sometidas a esfuerzos fluctuantes, de acuerdo a varios criterios de falla
(calculo del factor de seguridad) (Tabla 4)

Calculo de tensiones combinadas

$$\boxed{K_f = 1{,}92}$$

$$\boxed{K_{fs} =}$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{M_m}{I_{xx}} * c = 0MPa}$$

$$\boxed{\sigma_a = \frac{M_a}{I_{xx}} * c = 44{,}1MPa}$$

$$\boxed{\tau_m = \frac{T_m}{J} * c = 0MPa}$$

$$\boxed{\tau_a = \frac{T_a}{J} * c = 0MPa}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\left[\cancel{\left(K_{f-flex} \times \sigma_{m-f}\right)} + \cancel{\left(K_{f-ax} \times \sigma_{m-ax}\right)}\right]^2 + 3 \times \cancel{\left(K_{f-torsion} \times \tau_m\right)}^2}$$

$$\sigma'_a = \sqrt{\left[\left(K_{f-flex} \times \sigma_{a-f}\right) + \cancel{\left(K_{f-ax} \times \frac{\sigma_{a-ax}}{0{,}85}\right)}\right]^2 + 3 \times \cancel{\left(K_{f-torsion} \times \tau_a\right)}^2}$$

$$\boxed{\sigma'_m = 0MPa} \qquad \boxed{\sigma'_a = 84{,}7MPa}$$

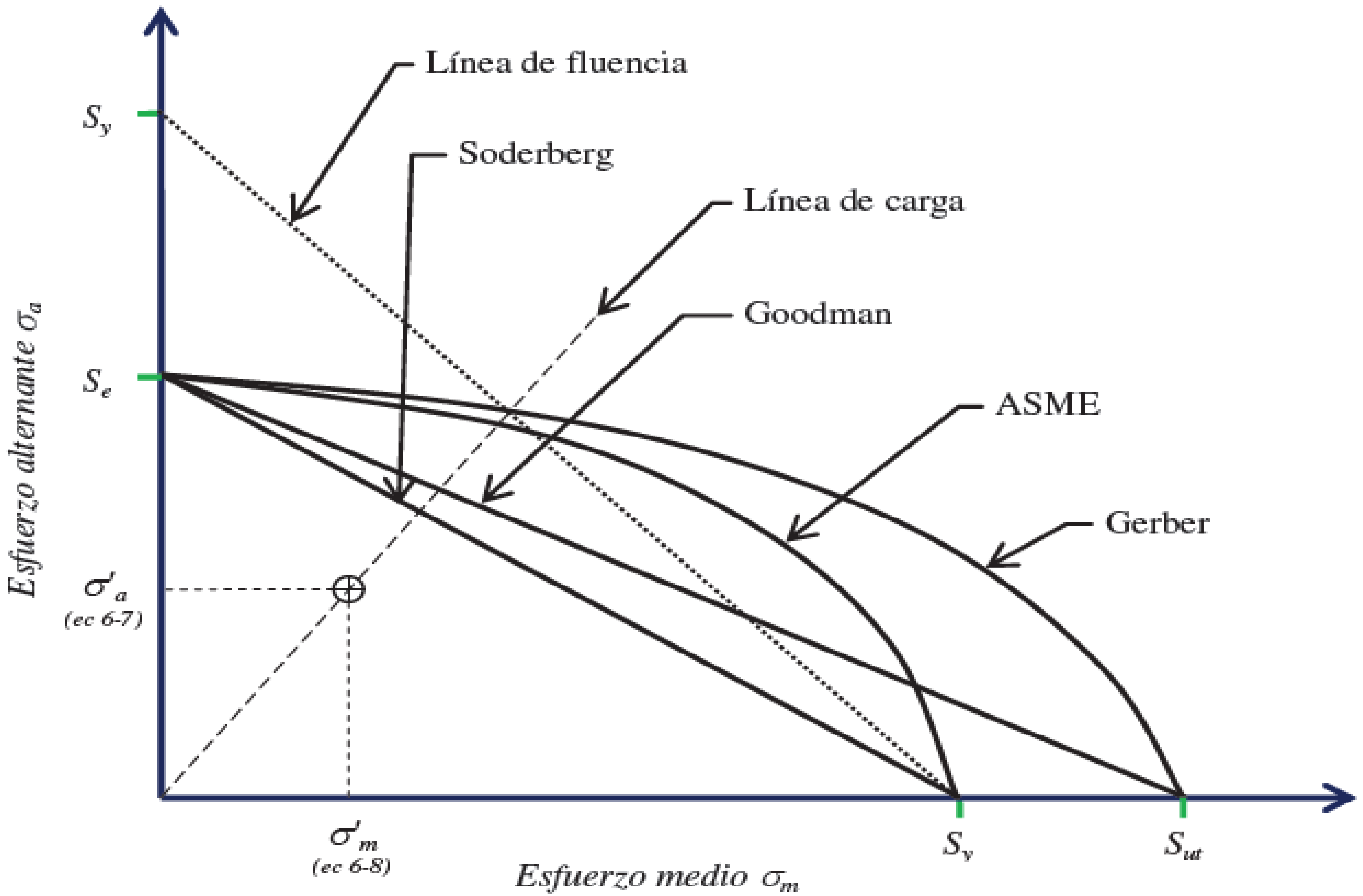
Calculo de los factores de seguridad

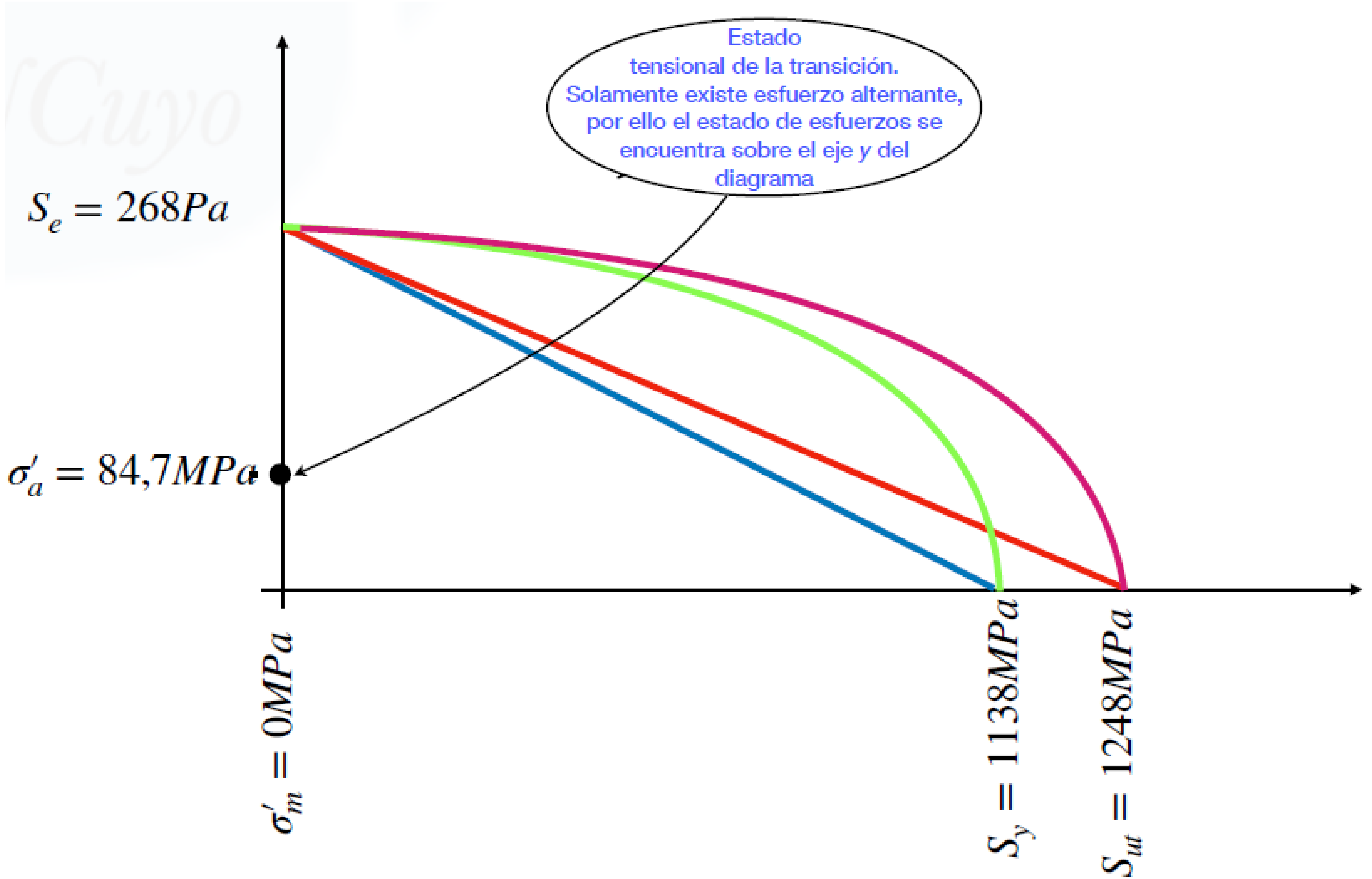
SODERBERG

$$n_{so} = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_y}} \qquad n_{so} = \frac{1}{\frac{84{,}7MPa}{268Mpa} + \frac{0MPa}{0MPa}} = \boxed{3{,}164}$$

Verifica

$$n_{go} = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_{ut}}} \qquad n_{as} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sigma_a'}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m'}{S_y}\right)^2}}$$


Línea de fluencia
Soderberg
Línea de carga
Goodman
ASME
Gerber
S_y
S_e
σ'_a
(ec 6-7)
σ'_m
(ec 6-8)
S_y
S_{ut}
Esfuerzo alternante σ_a
Esfuerzo medio σ_m


Estado tensional de la transición. Solamente existe esfuerzo alternante, por ello el estado de esfuerzos se encuentra sobre el eje y del diagrama
$S_e = 268Pa$
$\sigma'_a = 84,7MPa$
$\sigma'_m = 0MPa$
$S_y = 1138MPa$
$S_{ut} = 1248MPa$

Gracias por su atención