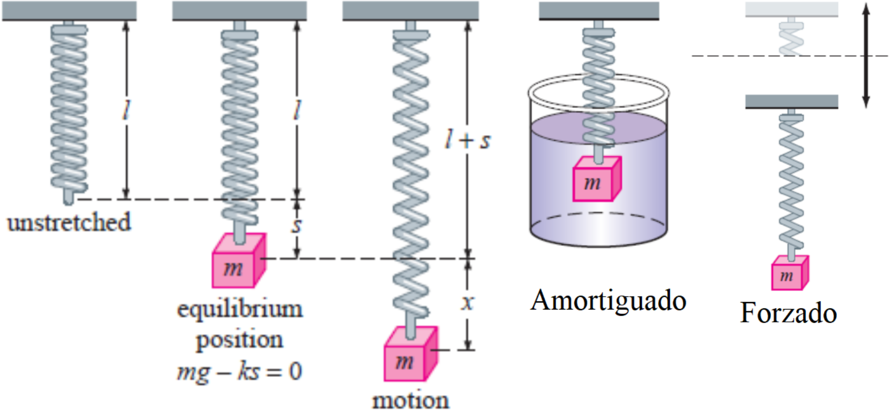
Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Facultad de Ingeniería

Recorrido

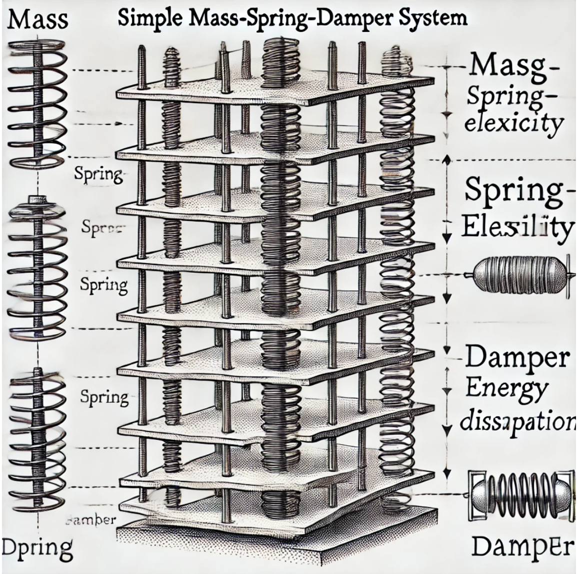
Recorrido

Movimiento en un sistema masa-resorte

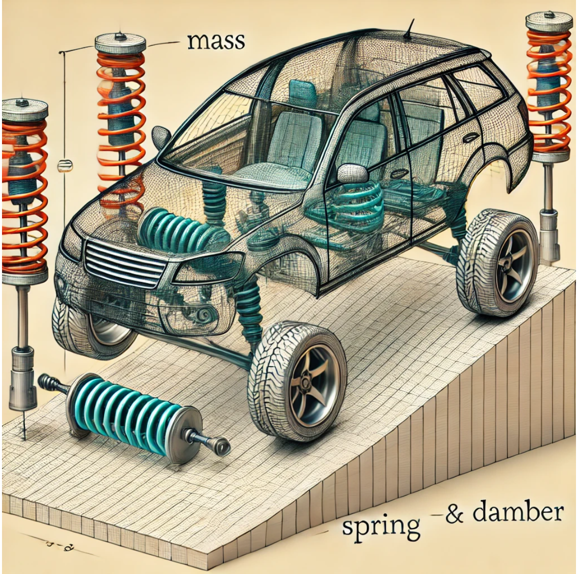


$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$$

Aplicaciones



Aplicaciones



Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

Recorrido

Existencia de solución única a un PVI

Llamemos (1) al PVI

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \\ \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Existencia de una solución única)

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I, entonces ***existe*** *una* ***única*** *solución del PVI* (1) *en I.*

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

Problema con valores en la frontera: PVF

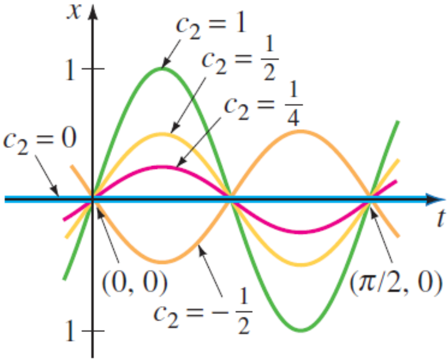
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

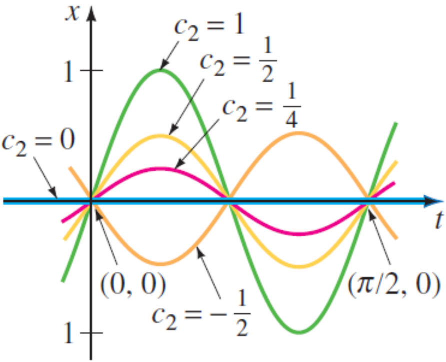


Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

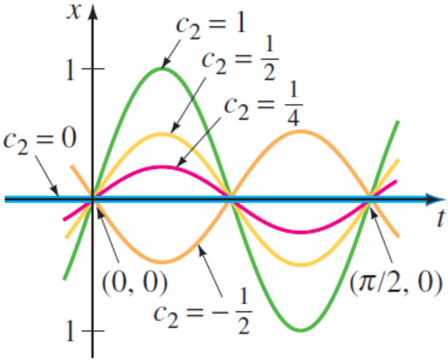
a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.



Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

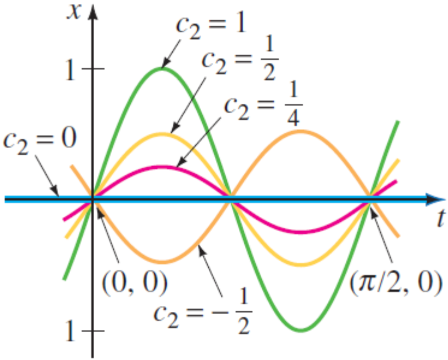
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \,\mathrm{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

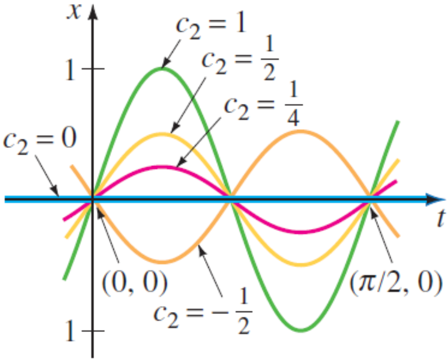
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

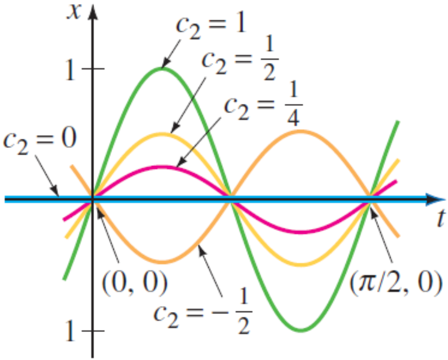
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



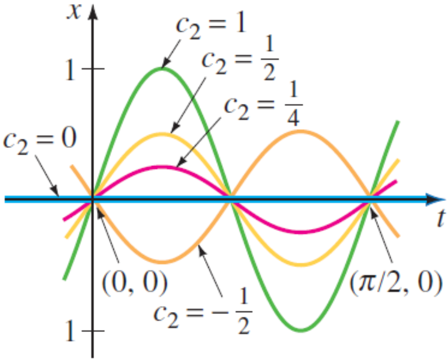
a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

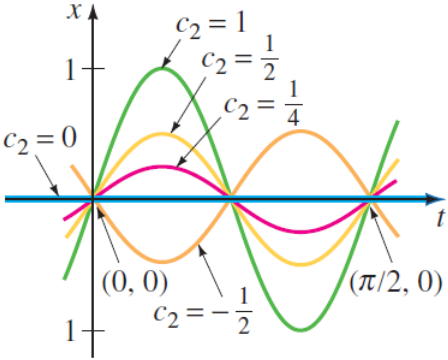


a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

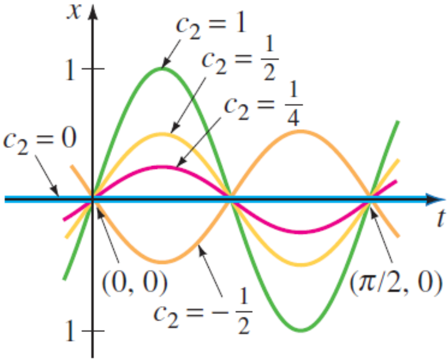


a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

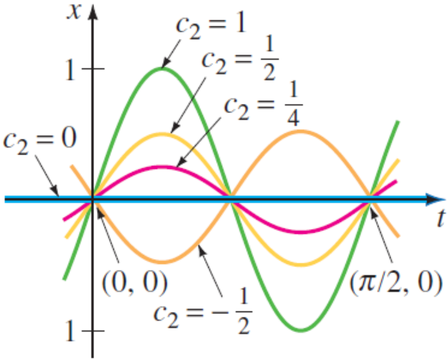


a) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0$;
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t)$.
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{8}) = 0$.
$x(0) = c_1 + 0 = 0$;
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0$.
Tiene solución única $x \equiv 0$.

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

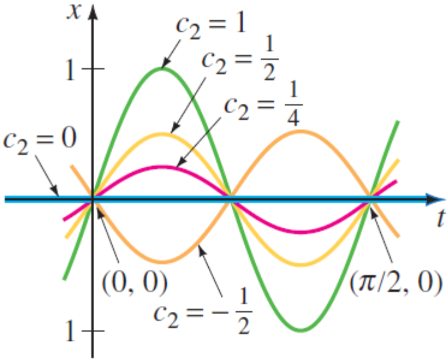
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

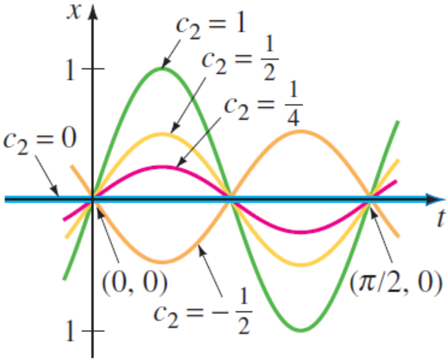
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

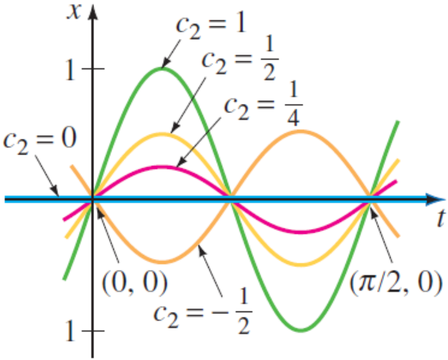
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

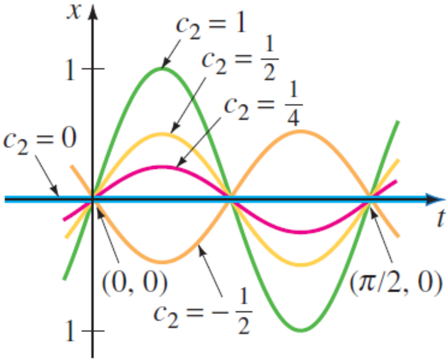
b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$;
solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

¿CONCLUSIÓN?

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Demostrción (en la próxima diapositiva.)

Observaciones:

1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier ED lineal homogénea.

2) Combinaciones lineales.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$;

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Derivamos g:

$$g'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x); \quad g''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x).$$

y sustituimos en la ED:

$$\begin{aligned}
&a_2(x)g''(x) + a_1(x)g'(x) + a_0(x)g(x) = \\
&= a_2(x)(c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)) + a_1(x)(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)) \\
&\qquad\qquad + a_0(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\
&= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) \\
&\qquad\qquad + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)) \\
&= c_1\, 0 + c_2\, 0 = 0.
\end{aligned}$$

Recorrido

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0,1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0,1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1,1]$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0,1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0,1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1,1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1,1]$.
- $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

Definición

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = \mathbf{0}$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0,\ t \in I.$$

2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.

Ejemplo

- Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0,1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0,1]$.
- Mismo ejemplo en $[-1,1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1,1]$.
- $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,...,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ *es una familia LD en* I *y las funciones son suficientemente derivables, entonces* $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ *para toda* $x \in I$*.*

Equivalentemente, su contrarrecíproco:

Teorema

Si existe una $x \in I$ *tal que* $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$*, entonces* $\{f_1, ..., f_n\}$ *es una familia LI en* I*.*

Propiedades del Wronskiano

Teorema

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ *es una familia LD en* I *y las funciones son suficientemente derivables, entonces* $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ *para toda* $x \in I$*.*

Equivalentemente, su contrarrecíproco:

Teorema

Si existe una $x \in I$ *tal que* $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$*, entonces* $\{f_1, ..., f_n\}$ *es una familia LI en* I*.*

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *soluciones de la ED*
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en* I*. Entonces*
$\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en* I *si y solo si* $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*.*

Sin demostrar.

Recorrido

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n: una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n: una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, *tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *existe un conjunto fundamental de soluciones en* I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teoremas (ED lineal homogénea)

Definición

Un conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n: una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I.

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, *tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *existe un conjunto fundamental de soluciones en* I, $\{y_1, \cdots y_n\}$.
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de ED lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, *tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *si* $\{y_1, \cdots y_n\}$ *es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en* I, *la solución general se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

(Sin demostrar.)

Recorrido

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad \leftarrow \text{la ecuación me habla}$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la ecuación me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad \leftarrow \text{la ecuación me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad \leftarrow \text{la ecuación me habla}$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0)$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}; \qquad y(0) = c_1 + c_2 = 1;$
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}; \qquad y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0;$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4; r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $\quad y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $\quad y_2 = xe^{rx}$;

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $\quad y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $\quad y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $\quad y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$: $\quad y_2 = xe^{rx}; y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0.$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0;$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\,\mathrm{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\operatorname{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0; \quad ar^2+br+c = 0; \quad r_1 = \alpha+i\beta; \quad r_2 = \alpha-i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\operatorname{sen}(\beta x)); \qquad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED; probemos que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$W_{(y_1, y_2)}(x) =$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$
$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$
$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejercicios

1. La ED de un sistema masa-resorte es: $2y''(t) + 10y'(t) + 8y(t) = 0$.
   1. Interprete cada término.
   2. Indique si se trata de la ecuación de un movimiento libre o forzado, amortiguado o no amortiguado.
   3. Resolver el PVI dado por la ED y las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
   4. Halle posición y velocidad de la masa en $t = 1$.
2. Resuelva $16y''(x) + 8y'(x) + y(x) = 0$.
3. Resuelva $\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 25x(t) = 0$.

Recorrido

Recorrido

Función o solución complementaria

Definición

Dada una ED no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la ED homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA o SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I. *Entonces la solución general de la ED tiene la forma*

$$y = y_c + y_p,$$

donde y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar. Se prueba para $n = 2$.

Teorema (Principio de superposión para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

$$\vdots$$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Observación: no hay relación entre k y n.

Demostración dejada como ejercicio.

Recorrido

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

   Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

   Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

   Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3}xe^x$.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

   Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$

   Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3} x e^x.$

3) $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x).$

   Rta:
   $y_c = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$
   $y_p = A\,\mathrm{sen}(3x) + B\cos(3x)$
   $y_G = e^{x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x).$

Tabla

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de ...	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
$\operatorname{sen} kx$, $\cos kx$	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C\operatorname{sen} kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \mathrm{sen}(x) + 3e^x$$

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \operatorname{sen}(x) + 3e^{x}$$

Sol. complementaria: $y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$.

EJEMPLO

$$y''(x) + 4y(x) = \text{sen}(x) + 3e^x$$

Sol. complementaria: $y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \,\text{sen}(2x)$.
Sol. gral:

$$y_G(x) = y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \,\text{sen}(2x) + \frac{1}{3} \text{sen}(x) + \frac{3}{5} e^x.$$

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ o subintervalos de éste.

Recorrido

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

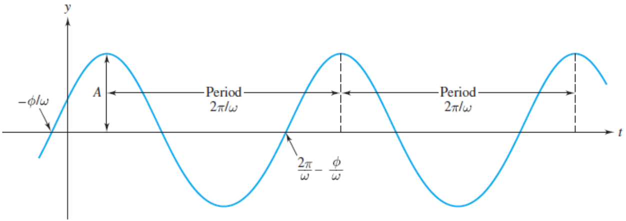
Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \quad \to \quad y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \ \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}; \quad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

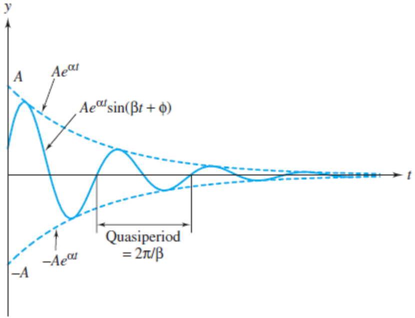
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento subamortiguado: $b^2 < 4mk \qquad \alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

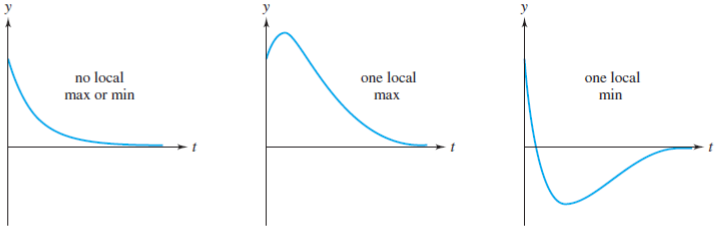
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \;\; b > 0$$

Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > 4mk$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad r_1 < 0;\; r_2 < 0.$$



(a) (b) (c)

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \ b > 0$$

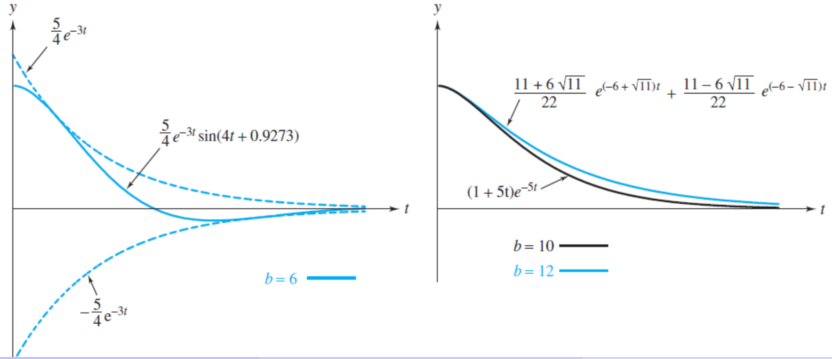
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ b > 0$$

Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = 4mk$

$$y = c_1\, e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2\, t\, e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad b = 6,\ 10,\ 12.$



Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \ 0 < b^2 < 4mk;$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ 0 < b^2 < 4mk; \qquad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

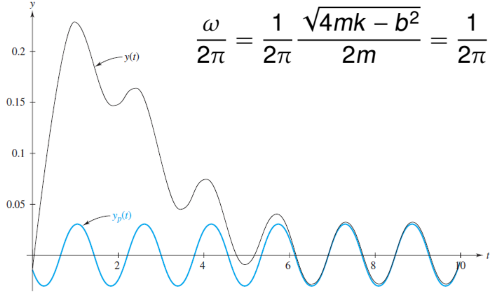


Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \ (b = 0).$$

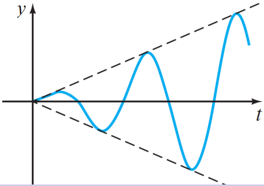
$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \ (b = 0).$$

$$y_G(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t), \text{ si } \gamma \neq \omega.$$

$$y_G(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\operatorname{sen}(\omega t) + \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t).$$

No hay estado transitorio. Tomamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ y calculamos el límite

$$\lim_{\gamma \to \omega} y(t) = \frac{F_0}{2\omega} \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} - t \cos(\omega t) \right).$$



Recorrido

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k*,* $0 \leq k \leq n$*, y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*. Entonces la solución general de la ED tiene la forma* $y = y_c + y_p$ *donde* y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \tag{2}$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I, sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

$$\begin{aligned}
&a_2(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_0(x)Y(x) = \\
&= a_2(x)(\Phi''(x) - y_p''(x)) + a_1(x)(\Phi'(x) - y_p'(x)) + a_0(x)(\Phi(x) - y_p(x)) \\
&= \big(a_2(x)\Phi''(x) + a_1(x)\Phi'(x) + a_0(x)\Phi(x)\big) \\
&\qquad\qquad - \big(a_2(x)y_p''(x) + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x)\big) \\
&= G(x) - G(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Entonces $\Phi(x) - y_p(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$, o sea

$$\Phi(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + y_p(x). \qquad \blacksquare$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= \quad u_1y_1 + u_2y_2 \\
y_p' &= \quad u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\
y_p'' &= \quad u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2''
\end{aligned}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned} y_p = &\quad u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' = &\quad u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' = &\quad u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1''y_1 + u_1'y_1') + a(u_2''y_2 + u_2'y_2') + (au_1'y_1' + bu_1'y_1 + au_2'y_2' + bu_2'y_2)$$

$$= a\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + b(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p = &\quad u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p' = &\quad u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y_p'' = &\quad u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1'' y_1 + u_1' y_1') + a(u_2'' y_2 + u_2' y_2') + (au_1' y_1' + bu_1' y_1 + au_2' y_2' + bu_2' y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2) + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$ Resolver por determinantes.