

# Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): introducción y EDOs de primer orden

Facultad de Ingeniería



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$  : población en el instante  $t$

# Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$  : población en el instante  $t$

$$P'(t) = kP(t)$$

# Ejercicio de dinámica poblacional

$$P'(t) = kP(t)$$

Adapte este modelo a los siguientes escenarios:

- ① Se agrega un crecimiento constante por inmigración.
- ② Hay una tasa de natalidad y una tasa de mortalidad.
- ③ La natalidad es proporcional a  $P$ , la mortalidad es proporcional a  $P^2$ .
- ④ En una población de peces como el ítem 3, agregue una tasa constante de desaparición por ser pescados.

# Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$  : temperatura en el instante  $t$

$T_m$  : temperatura del medio

# Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$  : temperatura en el instante  $t$

$T_m$  : temperatura del medio

$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$

# Ejercicio sobre la Ley de enfriamiento-calentamiento de Newton

Dadas la ecuación

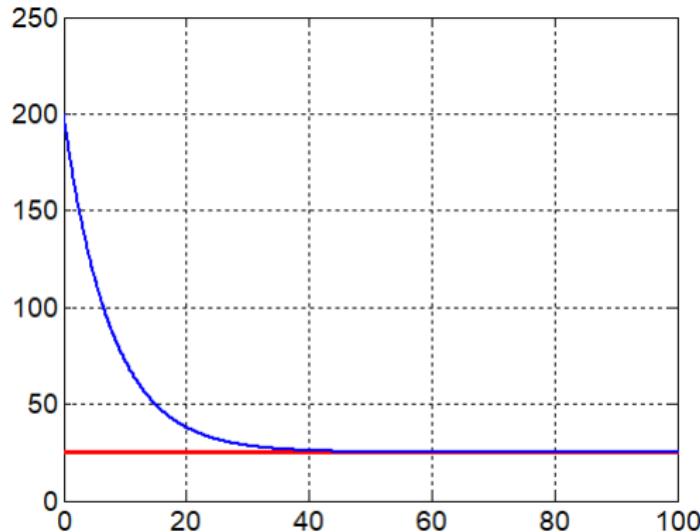
$$T'(t) = k(T(t) - T_m),$$

y el siguiente gráfico de la función  $T$ .

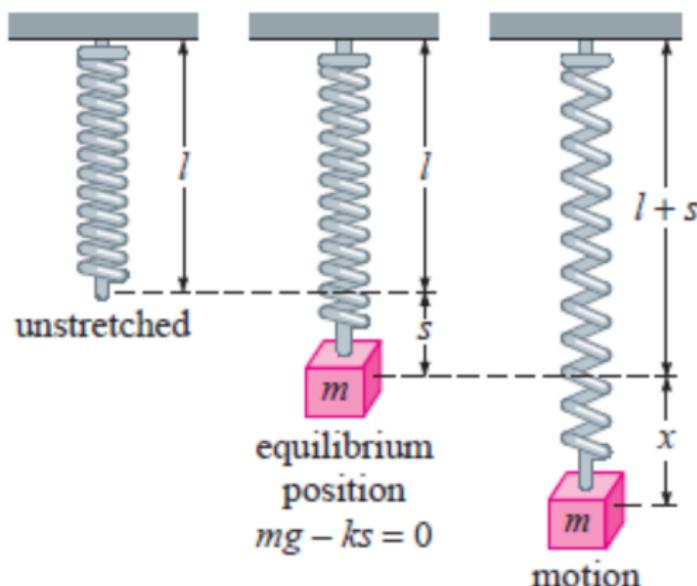
- ① Reconozca:

$$T(0) \text{ y } T_m.$$

- ② Indique cuál es el  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ .

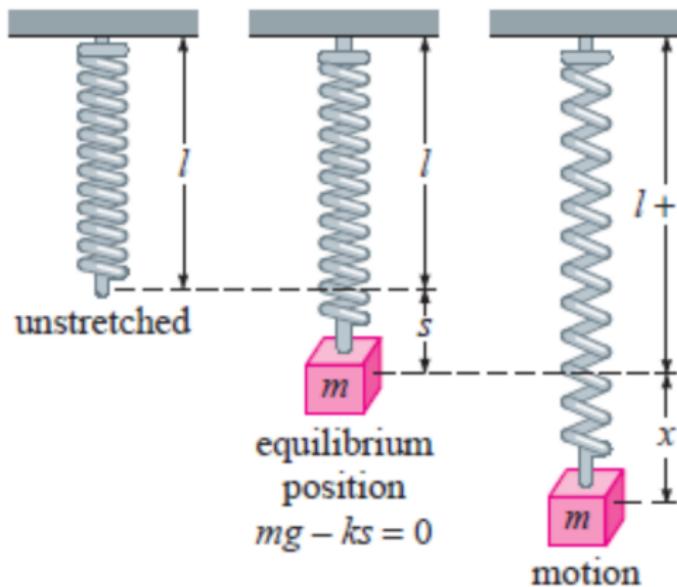


# Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



$$mg - ks = 0$$

# Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

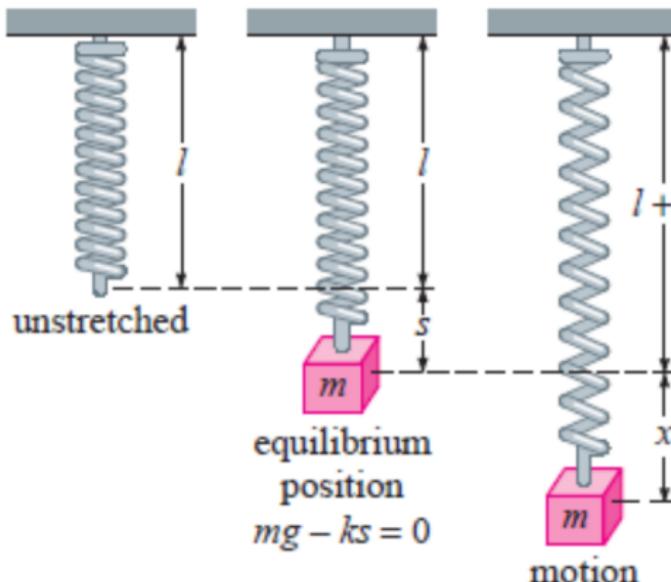
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

# Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

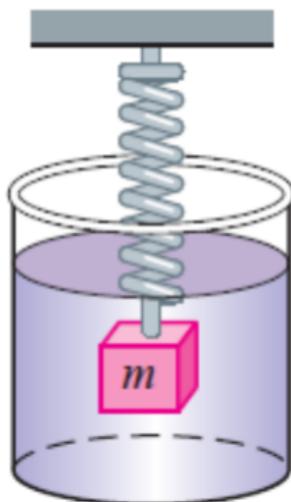
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

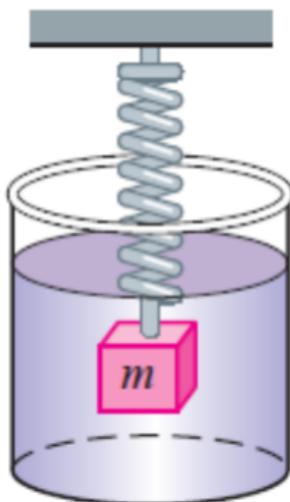
$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

# Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



# Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$ : constante de amortiguamiento.

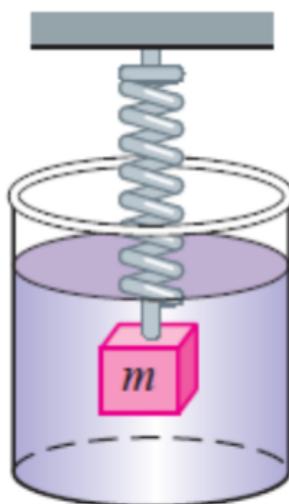
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$

# Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



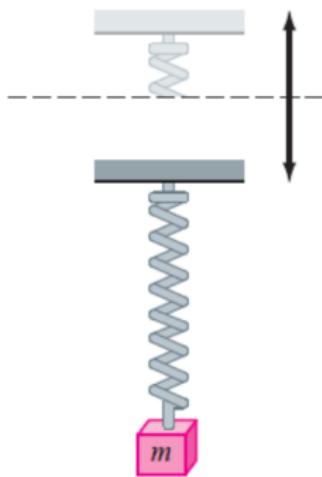
$\beta > 0$ : constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

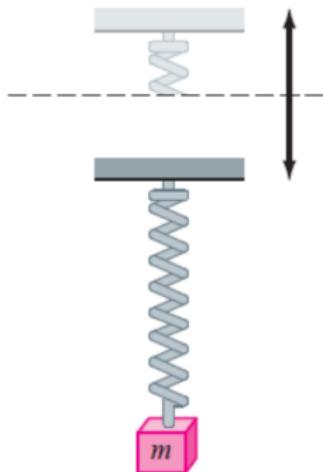
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$

# Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



# Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$ : fuerza externa.

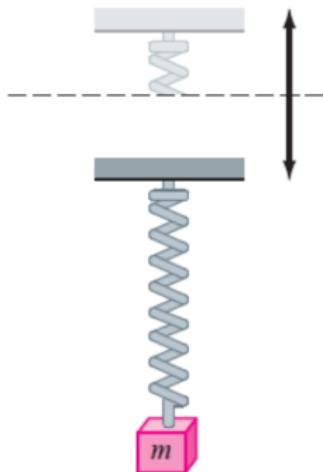
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

# Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$ : fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

# Definición

## Definición

Se llama **ecuación diferencial** a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- **Clasificación**
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Clasificación

Clasificación de las ED:

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0$$

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} y = 1$$

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0 \quad \frac{dy}{dx} y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

# Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0 \quad \frac{dy}{dx} y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- **Definiciones**
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Definiciones

## Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo  $I$**  a una función  $y$  (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo  $x \in I$ .

# Definiciones

## Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo  $I$**  a una función  $y$  (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo  $x \in I$ .

Una relación  $G(x, y) = 0$  es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo  $I$  si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en  $I$ .

# Definiciones

## Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo  $I$**  a una función  $y$  (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo  $x \in I$ .

Una relación  $G(x, y) = 0$  es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo  $I$  si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en  $I$ .

## Ejemplo

- La función  $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$  es una solución explícita de la ecuación diferencial  $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$ , en el intervalo  $(0, \infty)$ .

# Definiciones

## Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo  $I$**  a una función  $y$  (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo  $x \in I$ .

Una relación  $G(x, y) = 0$  es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo  $I$  si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en  $I$ .

## Ejemplo

- La función  $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$  es una solución explícita de la ecuación diferencial  $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = 2y$ , en el intervalo  $(0, \infty)$ .
- $y = xe^y + 5$  es una solución implícita de  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1+xe^y}$  en el intervalo  $(8, +\infty)$ .

# Definiciones

## Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

# Definiciones

## Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

# Definiciones

## Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

# Definiciones

## Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la **solución general** de la ecuación es una expresión paramétrica tal que **toda** solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

# Definiciones

## Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la **solución general** de la ecuación es una expresión paramétrica tal que **toda** solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función  $f$  en cuanto solución y como función.

# Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que  $x^2 + y^2 = 25$  es una solución implícita de  $y' = -\frac{x}{y}$ .

# Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que  $x^2 + y^2 = 25$  es una solución implícita de  $y' = -\frac{x}{y}$ .

Ejemplo 2: dada la ed  $y' = x\sqrt{y}$ , una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ . Verificar que  $y(x) = 0$  también es solución (singular).

## Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que  $x^2 + y^2 = 25$  es una solución implícita de  $y' = -\frac{x}{y}$ .

Ejemplo 2: dada la ed  $y' = x\sqrt{y}$ , una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ . Verificar que  $y(x) = 0$  también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed  $xy' + y = 0$ , una solución es  $y = \frac{1}{x}$ . Estudiar el dominio.

# Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y/o sus derivadas.

# Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

# Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 5 \frac{dy}{dx} - 4y - x^2$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$$

# Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y/o sus derivadas.

# Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e} e^x$$

# PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

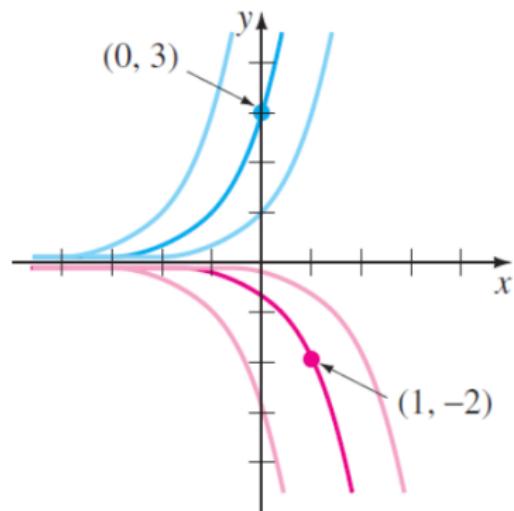
$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e} e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

# PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

# PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

## Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

## Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

# PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \quad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

# PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

$$1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

# PVI

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \quad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) \quad 1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

# PVI

## Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \quad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) \quad 1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

$$y(x) = -2 \cos(4x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ .

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ .  
Además  $y(x) = 0$  es solución singular de la ED.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ .  
Además  $y(x) = 0$  es solución singular de la ED.

**Soluciones del PVI:**

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ .  
Además  $y(x) = 0$  es solución singular de la ED.

**Soluciones del PVI:**

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es  $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ .  
Además  $y(x) = 0$  es solución singular de la ED.

**Soluciones del PVI:**

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \quad y(x) = 0$$

# Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

# Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea  $R$  una región rectangular en el plano  $xy$  definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , y sea  $(x_0, y_0)$  un punto interior a  $R$ . Si  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $R$ , entonces existe un intervalo  $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ ,  $h > 0$ , contenido en  $[a, b]$  y existe una única función  $y$  definida en  $I$  que es solución del problema con valores iniciales (1).

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Definición

Dada una ED  $y' = f(x, y)$ , el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a  $f$  en una cuadrícula de puntos en el plano  $xy$  se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

# Definición

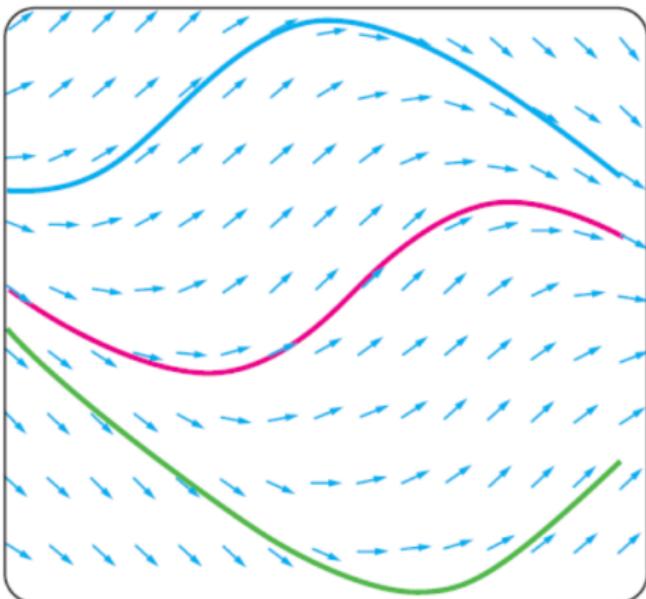
Dada una ED  $y' = f(x, y)$ , el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a  $f$  en una cuadrícula de puntos en el plano  $xy$  se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

Ejemplo 1:  $y' = \operatorname{sen}(x + y)$

# Definición

Dada una ED  $y' = f(x, y)$ , el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a  $f$  en una cuadrícula de puntos en el plano  $xy$  se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

Ejemplo 1:  $y' = \operatorname{sen}(x + y)$



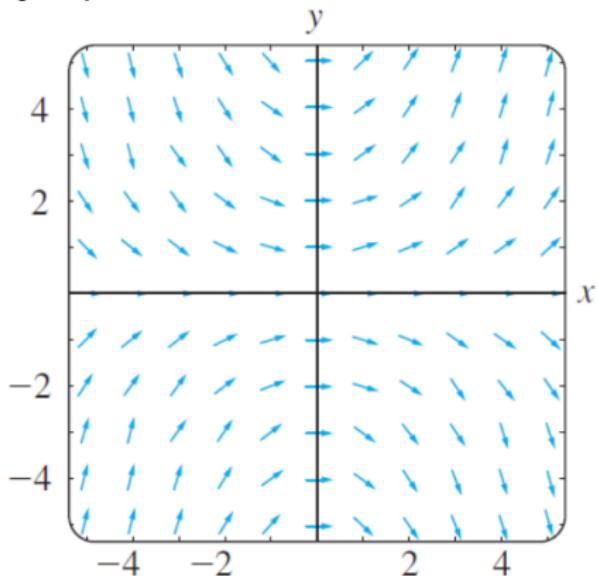
**FIGURA 2.1.2** Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

# Campos direccionales

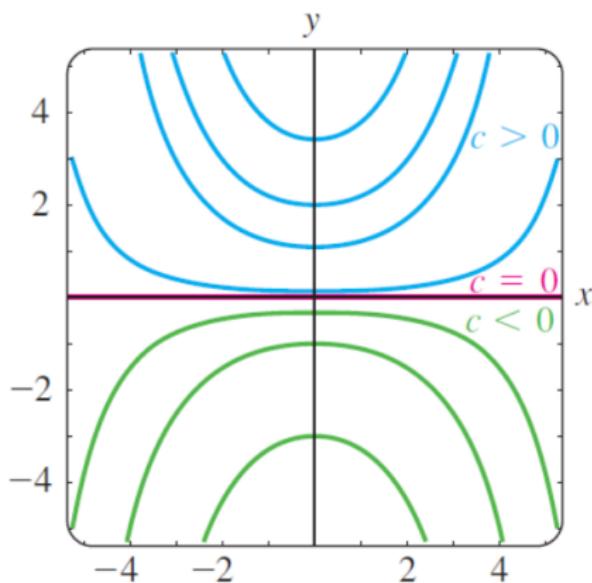
Ejemplo 2:

# Campos direccionales

Ejemplo 2:



- a) Campo direccional para  $dy/dx = 0.2xy$ .



- b) Algunas curvas solución en la familia  $y = ce^{0.1x^2}$ .

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \rightarrow y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \rightarrow y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \rightarrow y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0 \rightarrow (1+x)dy = y dx \rightarrow$$

# Separación de variables

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

## Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \rightarrow y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0 \rightarrow (1+x)dy = y dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y)$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \rightarrow h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea  $H$  una primitiva de  $h$ :  $H' = h$ .

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x)$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \rightarrow h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea  $H$  una primitiva de  $h$ :  $H' = h$ .

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \rightarrow h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea  $H$  una primitiva de  $h$ :  $H' = h$ .

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

# Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \rightarrow h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea  $H$  una primitiva de  $h$ :  $H' = h$ .

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

En la práctica:  $h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ , o sea  $h(y)dy = g(x)dx$ , e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

# Ejemplos

Ejemplo 1:  $y' = \frac{x-5}{y^2}$

# Ejemplos

Ejemplo 1:  $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como  $y^2 dy = (x - 5)dx$

# Ejemplos

Ejemplo 1:  $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como  $y^2 dy = (x - 5)dx$  y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

# Ejemplos

Ejemplo 1:  $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como  $y^2 dy = (x - 5)dx$  y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

# Ejemplos

Ejemplo 1:  $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como  $y^2 dy = (x - 5)dx$  y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + k}$$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

## Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

## Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

## Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

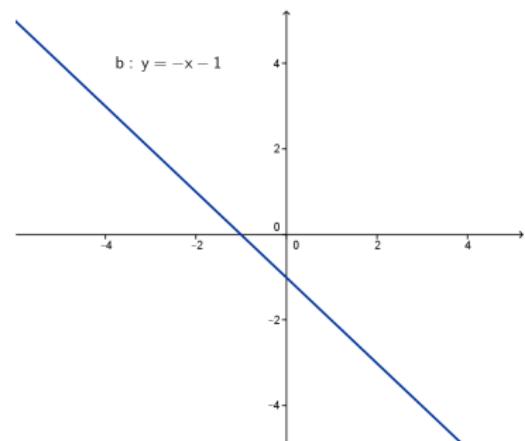
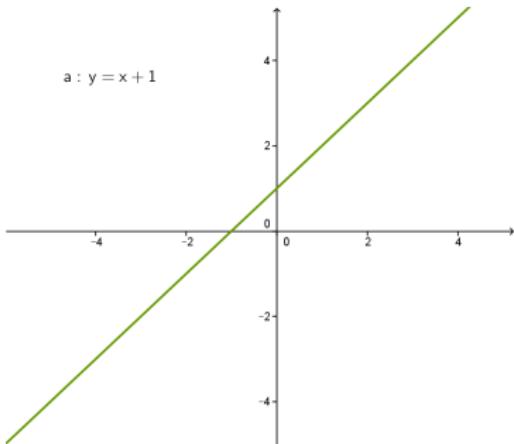
# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + C_1$$

$$|y| = C|x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$



# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x + 1| \quad \text{en } \dots$$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x + 1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x + 1| \quad \text{en } \dots$$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

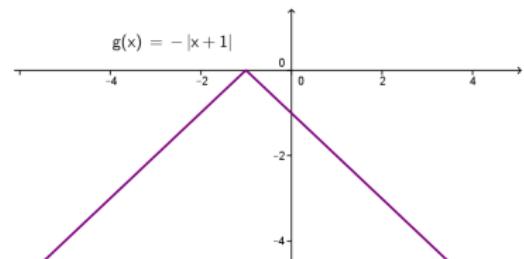
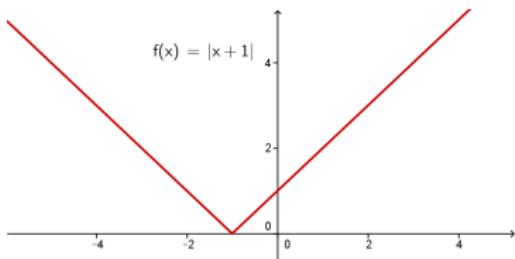
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \rightarrow \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x + 1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x + 1| \quad \text{en } \dots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$



# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$
$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$
$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$
$$y = C|x + 1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x + 1| \quad \text{en } \dots$$
$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$
$$y = 0(x + 1) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

# Ejemplos

Ejemplo:  $(1 + x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x + 1| + C_1$$

$$|y| = C|x + 1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x + 1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x + 1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x + 1| \quad \text{en } \dots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad o \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x + 1) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = k(1 + x) \quad \text{en } \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{R}$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}}$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2;$$

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

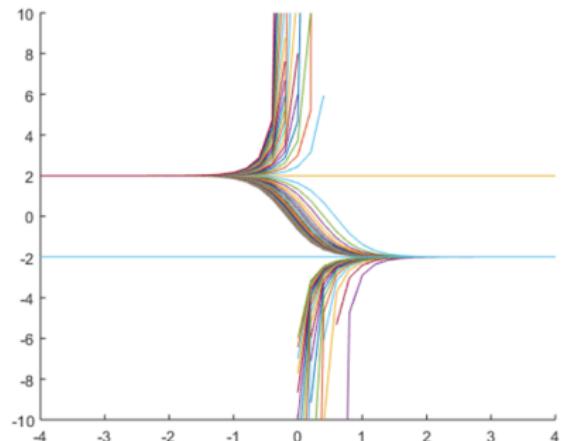
$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2$ ;  $y \equiv -2$  es solución singular.

# Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \quad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2$ ;  $y \equiv -2$  es solución singular.



# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- **Ecuaciones lineales de primer orden**
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente  $y$ , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $g$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  y  $a_1(x) \neq 0$  en  $I$ .

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente  $y$ , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $g$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  y  $a_1(x) \neq 0$  en  $I$ .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente  $y$ , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $g$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  y  $a_1(x) \neq 0$  en  $I$ .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

$$y' + y = x$$

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente  $y$ , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $g$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  y  $a_1(x) \neq 0$  en  $I$ .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \quad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos  $\mu$  de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos  $\mu$  de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) =$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos  $\mu$  de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos  $\mu$  de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser **separable**:  $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**:  $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos  $\mu$  de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser **separable**:  $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C \quad y(x)e^{\int P(x) dx} = \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

# Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C \quad y(x)e^{\int P(x) dx} = \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + C e^{-\int P(x) dx}$$

# Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

# Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

# Ejemplos

## Ejemplo 2:

### EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de  $\frac{1}{2}$  henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente  $i$ , si la corriente inicial es cero.

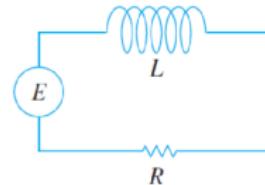


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie  $LR$ .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \quad i(0) = 0.$$

# Ejemplos

## Ejemplo 2:

### EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de  $\frac{1}{2}$  henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente  $i$ , si la corriente inicial es cero.

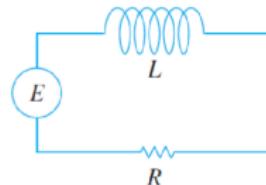


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie  $LR$ .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \quad i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

# Ejemplos

## Ejemplo 2:

### EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de  $\frac{1}{2}$  henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente  $i$ , si la corriente inicial es cero.

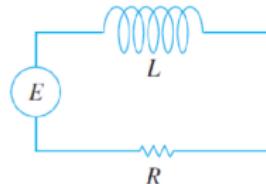


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie  $LR$ .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \quad i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$$

# Ejemplos

## Ejemplo 2:

### EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de  $\frac{1}{2}$  henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente  $i$ , si la corriente inicial es cero.

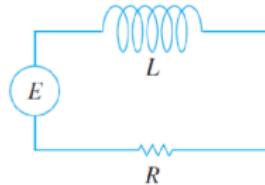


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie  $LR$ .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; \quad i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \quad i(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{5} \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas**
- Ecuación de Bernoulli

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  o  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una forma diferencial exacta.

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  o  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa, es

$$N_x = M_y$$

### Criterio de los componentes para determinar si $M dx + N dy + P dz$ es exacta

La forma diferencial  $M dx + N dy + P dz$  es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  es conservativo.

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  o  
 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una forma diferencial exacta.

# Definición

## Definición

Una ecuación diferencial  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$  o  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una forma diferencial exacta.

Para encontrar su solución tenemos en cuenta la definición:

**DEFINICIONES** Cualquier expresión  $M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$  es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio  $D$  en el espacio si

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

para alguna función escalar  $f$  a través de  $D$ .

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

Para hallar  $S$ , derivo con respecto a  $x$ :

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

Para hallar  $S$ , derivo con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

Para hallar  $S$ , derivo con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

Para hallar  $S$ , derivo con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$  será una solución implícita de la ED es decir, si  $S$  es una función potencial del campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N)$ .

# Método

Dada una edo exacta,  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ , propongo una solución **implícita**  $S(x, y) = C$ .

Para hallar  $S$ , derivo con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$  será una solución implícita de la ED es decir, si  $S$  es una función potencial del campo vectorial  $\mathbf{F} = (M, N)$ .

**LA SOLUCIÓN DE LA ED ES  $S(x, y) = C$ .**

# Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}$$

## Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

## Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2} = C$$

# Ejemplo

$$\begin{cases} -y \operatorname{sen}(x) - 4 + \cos(x)y' = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

# Recorrido

## 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

## 2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- **Ecuación de Bernoulli**

# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

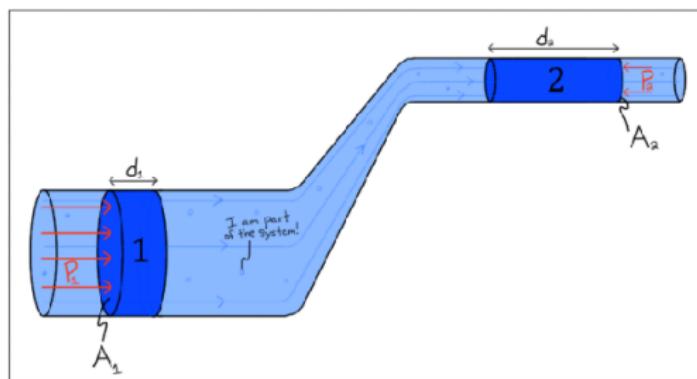
Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

## Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

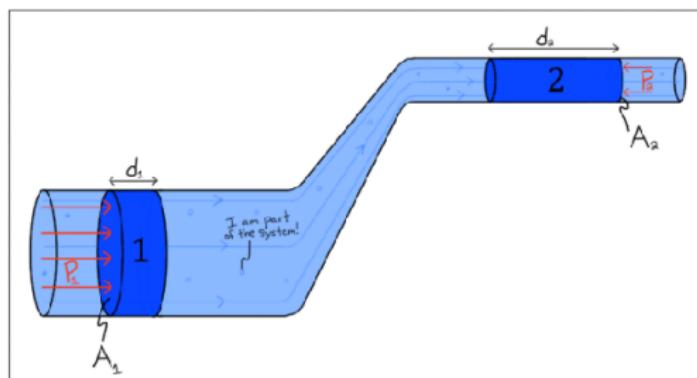


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

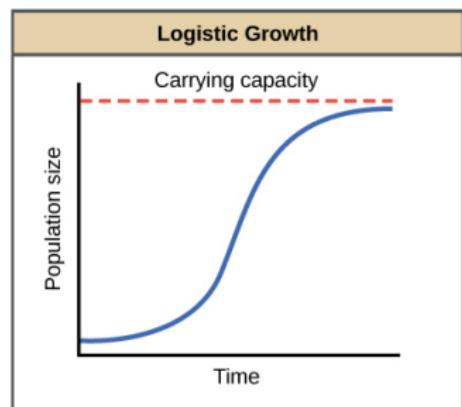
# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max} \frac{(K - N)}{K} N$$

# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

Si  $n = 0$  :  $y' + P(x)y = Q(x)$  es lineal.

# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

Si  $n = 0$  :  $y' + P(x)y = Q(x)$  es lineal.

Si  $n = 1$  :  $y' + P(x)y = Q(x)y$  es lineal y separable:

$$y' + (P(x) - Q(x))y = 0.$$

# Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

Si  $n = 0$  :  $y' + P(x)y = Q(x)$  es lineal.

Si  $n = 1$  :  $y' + P(x)y = Q(x)y$  es lineal y separable:

$$y' + (P(x) - Q(x))y = 0.$$

Si  $n \neq 1$ , se resuelve haciendo la sustitución  $v = y^{1-n}$ .

# Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2$$

# Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2.$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \quad \text{y asumo } x \neq 0.$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)},$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo:}$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y}$$

## Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \text{ Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por  $y^n$ , en este caso  $y^2$ , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \text{ (lineal en } v\text{). Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

# Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

# Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x)$$

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $-3y^{-4}$  y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $-3y^{-4}$  y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por  $v'$  y  $v$  y nos queda:  $v' + 3v = -3$ .

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $-3y^{-4}$  y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por  $v'$  y  $v$  y nos queda:  $v' + 3v = -3$ .

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante  $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$  , al resolverla obtenemos:  $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $-3y^{-4}$  y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por  $v'$  y  $v$  y nos queda:  $v' + 3v = -3$ .

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante  $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$  , al resolverla obtenemos:  $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \quad \rightarrow \quad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

## Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \quad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por  $-3y^{-4}$  y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por  $v'$  y  $v$  y nos queda:  $v' + 3v = -3$ .

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante  $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$  , al resolverla obtenemos:  $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \quad \rightarrow \quad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$