

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): introducción y EDOs de primer orden

Facultad de Ingeniería



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

Modelos: dinámica poblacional



Malthus 1798

$P(t)$: población en el instante t

$$P'(t) = kP(t)$$

Ejercicio de dinámica poblacional

$$P'(t) = kP(t)$$

Adapte este modelo a los siguientes escenarios:

- 1 Se agrega un crecimiento constante por inmigración.
- 2 Hay una tasa de natalidad y una tasa de mortalidad.
- 3 La natalidad es proporcional a P , la mortalidad es proporcional a P^2 .
- 4 En una población de peces como el ítem 3, agregue una tasa constante de desaparición por ser pescados.

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$: temperatura en el instante t

T_m : temperatura del medio

Modelos: Ley del enfriamiento-calentamiento de Newton



$T(t)$: temperatura en el instante t

T_m : temperatura del medio

$$T'(t) = k(T(t) - T_m)$$

Ejercicio sobre la Ley de enfriamiento-calentamiento de Newton

Dadas la ecuación

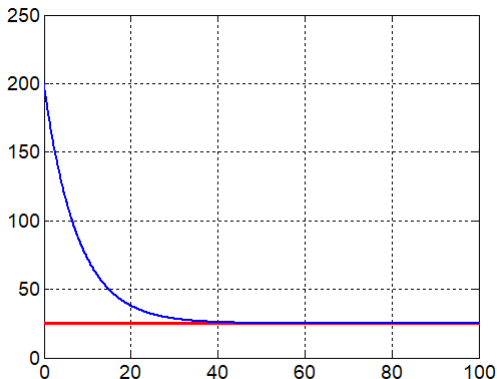
$$T'(t) = k(T(t) - T_m),$$

y el siguiente gráfico de la función T .

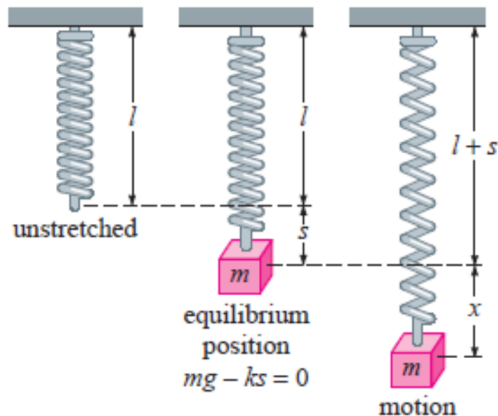
1 Reconozca:

$$T(0) \text{ y } T_m.$$

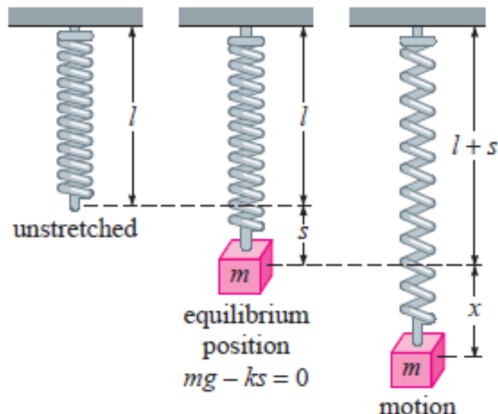
2 Indique cuál es el
 $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$.



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

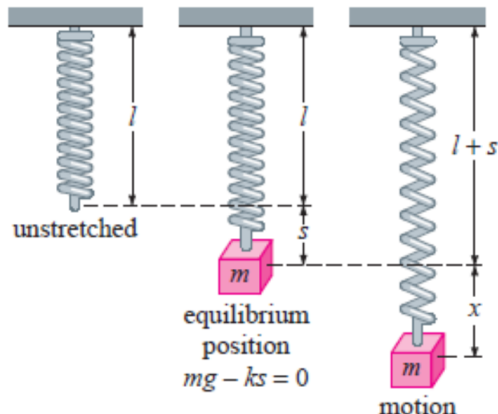
$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

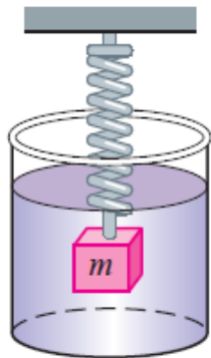
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r + \mathbf{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s + x) + mg = -kx$$

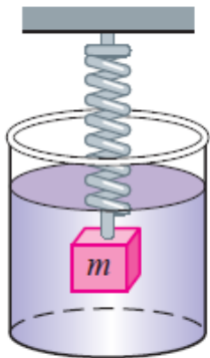
$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

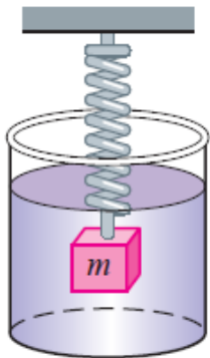
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$

Modelos: movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



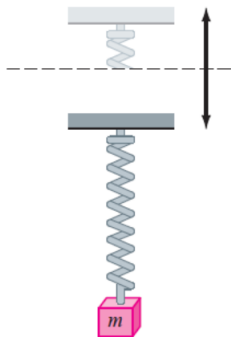
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

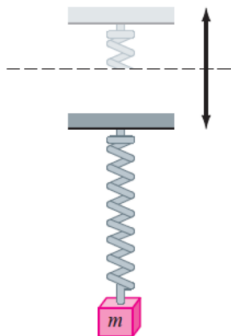
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

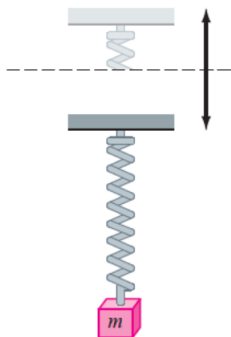
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

Modelos: movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = f(t)$$

Definición

Se llama **ecuación diferencial** a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- **Clasificación**
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

Clasificación

Clasificación de las ED:

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx} y = 1$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0 \qquad \frac{dy}{dx} y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

Clasificación

Clasificación de las ED:

Por tipo: pueden ser ordinarias o parciales.

Por orden: orden de la mayor derivada presente.

Por linealidad: lineales o no lineales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} - e^x y = \sin^2(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \sin(y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- **Definiciones**
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo** I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo** I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I .

Definiciones

Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo** I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I .

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.

Definiciones

Definición

Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un **intervalo** I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$.

Una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I .

Ejemplo

- La función $y(x) = -7e^{4\sqrt{x}}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial $\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = 2y$, en el intervalo $(0, \infty)$.
- $y = xe^y + 5$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1+xe^y}$ en el intervalo $(8, +\infty)$.

Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la **solución general** de la ecuación es una expresión paramétrica tal que **toda** solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Definición

Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** de la misma, es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros.

Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a los parámetros.

Una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la **solución general** de la ecuación es una expresión paramétrica tal que **toda** solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Distinguir dominio de definición de la función f en cuanto solución y como función.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplos

Ejemplo 1: comprobar que $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $y' = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: dada la ed $y' = x\sqrt{y}$, una familia uniparamétrica de soluciones de la misma es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Verificar que $y(x) = 0$ también es solución (singular).

Ejemplo 3: dada la ed $xy' + y = 0$, una solución es $y = \frac{1}{x}$. Estudiar el dominio.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 5 \frac{dy}{dx} - 4y - x^2$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x, y, y', y'', y^{(3)})$$

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Problemas con valores iniciales

Condiciones iniciales: condiciones prescritas que debe cumplir la función desconocida y o sus derivadas.

Dada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

Ejemplo 1: resolver los PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e} e^x$$

PVI

Ejemplo 1: resolver los PVI

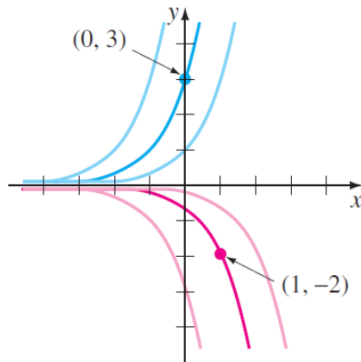
$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ \text{Que pase por el punto } (1, -2) \end{cases}$$

$$y(x) = c e^x$$

$$y_1(x) = 3 e^x,$$

$$y_2(x) = -\frac{2}{e} e^x$$



Soluciones de los dos PVI.

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) \qquad 1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) \qquad 1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2: PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) + 16y(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) \qquad y'(x) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$$

$$-2 = C_1 \cos(2\pi) + C_2 \sin(2\pi) \qquad 1 = -4C_1 \sin(2\pi) + 4C_2 \cos(2\pi)$$

$$C_1 = -2$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

$$y(x) = -2 \cos(4x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Soluciones del PVI:

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4$$

Ejemplo 3: PVI con más de una solución.

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ed es $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$.
Además $y(x) = 0$ es solución singular de la ED.

Soluciones del PVI:

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4 \qquad y(x) = 0$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Teorema

Problema con valor inicial de primer orden:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Teorema (Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden)

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R . Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R , entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y existe una única función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales (1).

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

Ejemplo 1: $y' = \text{sen}(x + y)$

Definición

Dada una ED $y' = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

Ejemplo 1: $y' = \sin(x + y)$

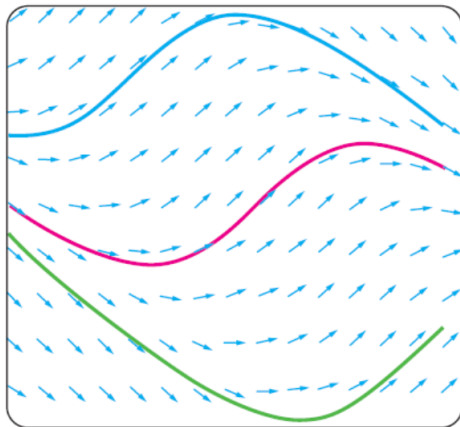


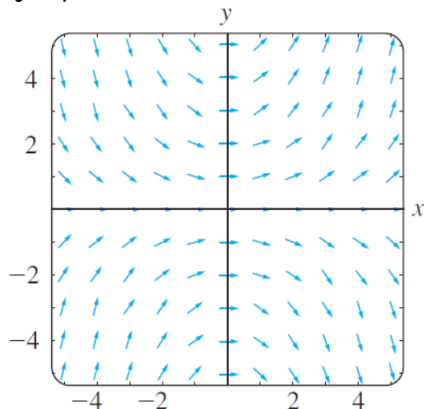
FIGURA 2.1.2 Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional.

Campos direccionales

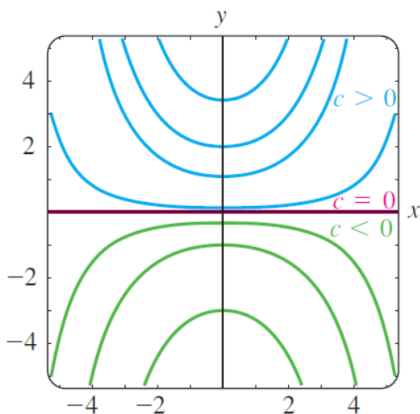
Ejemplo 2:

Campos direccionales

Ejemplo 2:



a) Campo direccional para $dy/dx = 0.2xy$.



b) Algunas curvas solución en la familia $y = ce^{0.1x^2}$.

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

- 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades
 - Modelos matemáticos
 - Clasificación
 - Definiciones
 - Campos direccionales
- 2 Métodos para resolver edo de primer orden
 - Separación de variables
 - Ecuaciones lineales de primer orden
 - Ecuaciones exactas
 - Ecuación de Bernoulli

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \operatorname{sen} x$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \sin x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \sin x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \sin x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y dx \quad \rightarrow$$

Separación de variables

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:

$$y' = g(x)p(y).$$

Ejemplos:

$$y' = y^2 x e^{3x+4y} \quad \rightarrow \quad y' = y^2 e^{4y} x e^{3x}$$

$$y' = y + \sin x \quad \text{NO es una EDO separable}$$

$$(1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad (1+x)dy = y dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}y$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h : $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h : $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h : $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

Separación de variables

$$y' = g(x)p(y) \quad \rightarrow \quad h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{donde } h(y(x)) = \frac{1}{p(y(x))}$$

Sea H una primitiva de h : $H' = h$.

$$H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

$$H(y(x)) = \int g(x)dx + C$$

En la práctica: $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$H(y) = \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2 dy = (x - 5)dx$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2 dy = (x - 5)dx$ y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2 dy = (x - 5)dx$ y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

Ejemplos

Ejemplo 1: $y' = \frac{x-5}{y^2}$

Se puede reescribir como $y^2 dy = (x - 5)dx$ y luego

$$\int y^2 dy = \int (x - 5)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 15x + k}$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1 + x)dy - y dx = 0$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

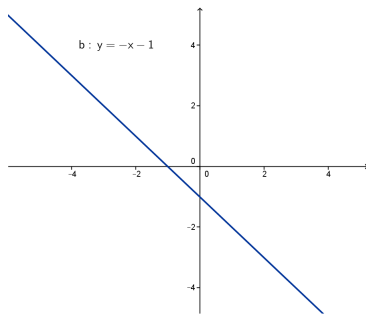
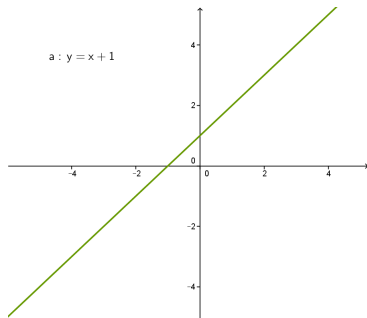
Ejemplo: $(1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$



Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C |x+1| \quad \text{en } \dots$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x+1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x+1| \quad \text{en } \dots$$

Ejemplos

Ejemplo: $(1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$

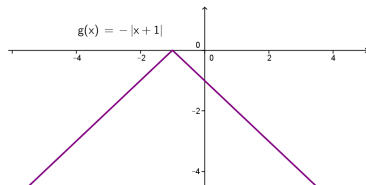
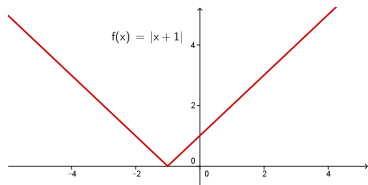
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x+1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x+1| \quad \text{en } \dots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad \text{o} \quad I = (-1, \infty)$$



Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x+1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x+1| \quad \text{en } \dots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad \text{o} \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejemplos

$$\text{Ejemplo: } (1+x)dy - y dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x+1| + C_1$$

$$|y| = C |x+1| \quad \text{donde } C = e^{C_1} > 0$$

$$y = C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R} \quad y = -C(x+1) \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = C|x+1| \quad \text{en } \dots \quad y = -C|x+1| \quad \text{en } \dots$$

$$I = (-\infty, -1) \quad \text{o} \quad I = (-1, \infty)$$

$$y = 0(x+1) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$y = k(1+x) \quad \text{en } \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{R}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4$$

$$\frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

$$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2;$$

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

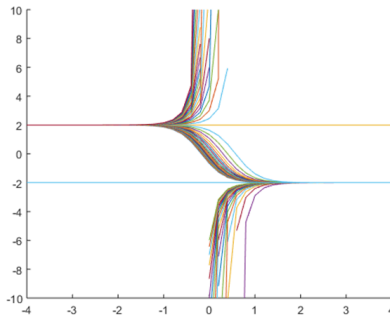
$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2$; $y \equiv -2$ es solución singular.

Pérdida de una solución

$$y' = y^2 - 4 \qquad \frac{1}{y^2 - 4} dy = dx$$

$$y = 2 \frac{ke^{4x} + 1}{1 - ke^{4x}} \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{si } k > 0, \quad x \neq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{k}$$

$k = 0 \Rightarrow y \equiv 2$; $y \equiv -2$ es solución singular.



- 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades
 - Modelos matemáticos
 - Clasificación
 - Definiciones
 - Campos direccionales
- 2 Métodos para resolver edo de primer orden
 - Separación de variables
 - Ecuaciones lineales de primer orden
 - Ecuaciones exactas
 - Ecuación de Bernoulli

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0 , a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I .

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0 , a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0 , a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad y' + y = x$$

Definición

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y , si es de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde a_0 , a_1 y g son funciones continuas en un intervalo I y $a_1(x) \neq 0$ en I .

Algunas ed lineales son separables, otras no:

$$y' = x + 5 \qquad y' + y = x$$

FORMA ESTÁNDAR:

$$y' + P(x)y = f(x)$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

Método

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) =$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser **separable**: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

Multiplicamos por un **factor integrante**: $\mu(x)$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

Buscamos μ de manera que el primer miembro sea la derivada de un producto:

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que felizmente resulta ser **separable**: $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = k e^{\int P(x) dx}$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C \quad y(x)e^{\int P(x) dx} = \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

$$y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$$

$$y'(x)\mu(x) + y(x)P(x)\mu(x) = f(x)\mu(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \mu(x) = ke^{\int P(x) dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)\mu(x)) = f(x)\mu(x)$$

$$y(x)\mu(x) = \int f(x)\mu(x) dx + C \quad y(x)e^{\int P(x) dx} = \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \int f(x)e^{\int P(x) dx} dx + Ce^{-\int P(x) dx}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

$$xy'(x) + y(x) = x^4 \ln(x)$$

Ejemplos

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i , si la corriente inicial es cero.

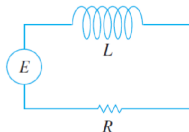


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \qquad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; i(0) = 0.$$

Ejemplos

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i , si la corriente inicial es cero.

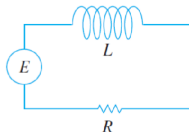


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ejemplos

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i , si la corriente inicial es cero.

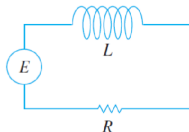


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$$

Ejemplos

Ejemplo 2:

EJEMPLO 7 Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i , si la corriente inicial es cero.

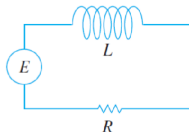


FIGURA 3.1.7 Circuito en serie LR .

$$Li'(t) + Ri(t) = E(t) \quad \frac{1}{2}i'(t) + 10i(t) = 12; i(0) = 0.$$

$$\begin{cases} i' = f(t, i) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \quad i(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{5} \Rightarrow i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

- 1 Ecuaciones diferenciales: generalidades
 - Modelos matemáticos
 - Clasificación
 - Definiciones
 - Campos direccionales
- 2 Métodos para resolver edo de primer orden
 - Separación de variables
 - Ecuaciones lineales de primer orden
 - Ecuaciones exactas
 - Ecuación de Bernoulli

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ o $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ o $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Una condición suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una forma diferencial exacta, en una región abierta, conexa y simplemente conexa, es

$$N_x = M_y$$

Criterio de los componentes para determinar si $M dx + N dy + P dz$ es exacta

La forma diferencial $M dx + N dy + P dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ o $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Definición

Definición

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ o $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta.

Para encontrar su solución tenemos en cuenta la definición:

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D .

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Para hallar S , derivo con respecto a x :

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Para hallar S , derivo con respecto a x :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Para hallar S , derivo con respecto a x :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Para hallar S , derivo con respecto a x :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$ será una solución implícita de la ED es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$.

Método

Dada una edo exacta, $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, propongo una solución **implícita** $S(x, y) = C$.

Para hallar S , derivo con respecto a x :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$S(x, y) = C$ será una solución implícita de la ED es decir, si S es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$.

LA SOLUCIÓN DE LA ED ES $S(x, y) = C$.

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

Ejemplo

$$y'(x) = \frac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1 - x^2)}$$

$$S(x, y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1 - x^2)}{2} = C$$

Ejemplo

$$\begin{cases} -y \operatorname{sen}(x) - 4 + \cos(x)y' = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

1 Ecuaciones diferenciales: generalidades

- Modelos matemáticos
- Clasificación
- Definiciones
- Campos direccionales

2 Métodos para resolver edo de primer orden

- Separación de variables
- Ecuaciones lineales de primer orden
- Ecuaciones exactas
- Ecuación de Bernoulli

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

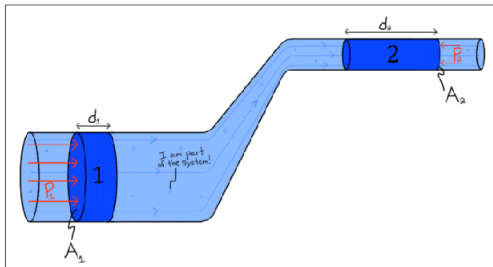
Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$

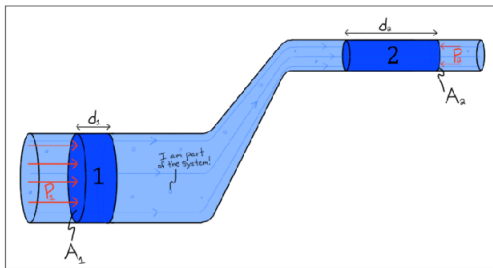


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

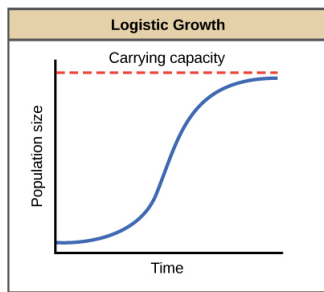
Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x)$$



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$



$$\frac{dN}{dT} = r_{max} \frac{(K - N)}{K} N$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } n = 0 : \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } n = 0 : \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

$$\text{Si } n = 1 : \quad y' + P(x)y = Q(x)y \quad \text{es lineal y separable:}$$

$$y' + (P(x) - Q(x))y = 0.$$

Ecuación de Bernoulli: Modelo y aplicaciones

Modelo:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad \text{no puede faltar } P(x); n \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } n = 0 : \quad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{es lineal.}$$

$$\text{Si } n = 1 : \quad y' + P(x)y = Q(x)y \quad \text{es lineal y separable:}$$

$$y' + (P(x) - Q(x))y = 0.$$

Si $n \neq 1$, se resuelve haciendo la sustitución $v = y^{1-n}$.

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{y}{x} = xy^2.$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)},$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo:}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y}$$

Ejemplo

$$xy' + y = x^2y^2 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = xy^2. \quad \text{Reconozco } n = 2 \text{ y asumo } x \neq 0.$$

Dividimos ambos miembros de la ED por y^n , en este caso y^2 , con lo que se obtiene:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x. \quad (3)$$

Consideramos la sustitución sugerida

$$v(x) = [y(x)]^{1-n} = \frac{1}{y(x)}, \quad \text{derivamos: } v'(x) = -\frac{1}{y^2(x)}y'(x)$$

y sustituimos en la ED (3) para obtener:

$$-v' + \frac{v}{x} = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = -x \quad (\text{lineal en } v). \quad \text{Resuelvo: } \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{v}{x} = -x + c \Rightarrow v = -x^2 + cx = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x)$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x)$$

$$v' = -3y^{-4}y'$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

Ejemplo

$$y' - y = y^4$$

$$v(x) = \frac{1}{y^3(x)} = y^{-3}(x) \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

Multiplicamos la ecuación diferencial dada por $-3y^{-4}$ y obtenemos

$$-3y^{-4}y' + 3y^{-3} = -3,$$

hacemos la sustitución por v' y v y nos queda: $v' + 3v = -3$.

Esta nueva ED es **lineal** con factor integrante $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$, al resolverla obtenemos: $v(x) = -1 + Ce^{-3x}$

$$y^{-3}(x) = -1 + Ce^{-3x} \qquad \rightarrow \qquad y^3(x) = \frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ce^{-3x}}}$$