

1.1 LÓGICA

INGENIERÍA Y LCC



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

Esta presentación es sólo una guía para la clase de Álgebra que utilizamos los docentes. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

Puede resultar de apoyo para estudiar, pero de ninguna forma es la bibliografía principal de la materia ni abarca todos los contenidos a estudiar.

1 Proposiciones y conectivos lógicos

- Proposiciones
- Conectivos lógicos
 - Jerarquía de conectivos
- Implicación lógica y Equivalencia lógica

2 Uso de cuantificadores

- Proposiciones cuantificadas
- Negación de proposiciones cuantificadas
- Cuantificadores anidados

Definición

Una proposición es un enunciado afirmativo que puede ser calificado como verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Notación: para nombrar las proposiciones se usa letras minúsculas del alfabeto latino como: p , q , r . Además, su valor de verdad suele indicarse como $v(p) = V$ ó $v(p) = F$.

Ejemplo

- ① $5 + 8 < 6 : p$
- ② Las clases del ingreso se dictaban los días sábado: q
- ③ Definición de transformación lineal. **X**
- ④ ¿Primer año de Arquitectura cursa los martes? **X**

Las proposiciones p y q son **proposiciones simples** (o **primitivas**), ya que no pueden descomponerse

- **NEGACIÓN:** La negación de una proposición p se denota como $\neg p$, $\bar{p}$ o $\sim p$. Coloquialmente se lee de muchas maneras, como por ejemplo: "**no es cierto que p** ", pero en realidad depende mucho de lo que enuncie la proposición. El valor de verdad de la nueva proposición obtenida al negar p es exactamente su contrario, es decir:

p	$\neg p$
V	F
F	V

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee " p y q ". El valor de verdad de la proposición compuesta obtenida de esta manera es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

- **CONJUNCIÓN:** La conjunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \wedge q$ y se lee " p y q ". El valor de verdad de la proposición compuesta obtenida de esta manera es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **DISYUNCIÓN:** La disyunción de dos proposiciones p y q se denota como $p \vee q$ y se lee " p o q ". El valor de verdad de la nueva proposición que se obtiene de esta manera es falsa en el único caso en que las dos proposiciones sean falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **IMPLICACIÓN:** La implicación o condicional de dos proposiciones p y q se denota como $p \rightarrow q$. En esta nueva proposición:

$$\underbrace{p}_{\text{antecedente (o hipótesis)}} \rightarrow \underbrace{q}_{\text{consecuente (o conclusión o tesis)}}$$

Usualmente se lee como: "**Si p entonces q** ". El valor de verdad de una implicación es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- p implica q
- Si p , q
- q si p
- p sólo si q

• IMPLICACIÓN:

Cada implicación tiene otras implicaciones asociadas, en el sentido de que se pueden escribir a partir de ella. Dichas implicaciones, cuya relevancia se analizará luego, son:

IMPLICACIÓN	IMPLICACIONES ASOCIADAS	
$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	recíproca
	$\neg p \rightarrow \neg q$	contraria
	$\neg q \rightarrow \neg p$	contrarrecíproca

- **DOBLE IMPLICACIÓN:** La doble implicación, o bicondicional, entre proposiciones p y q se denota como $p \leftrightarrow q$. Coloquialmente se lee: " p **si y sólo si** q ". El valor de verdad de la proposición compuesta resultante es verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones involucradas son iguales, es decir, ambas verdaderas o ambas falsas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Jerarquía de conectivos

$$-3 + 5 \cdot 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (3 + 1)$$

$$[(-3 + 5 \cdot 4) \cdot (-4 + 2)] \cdot 3 + 1$$

Si no queremos usar tanto paréntesis, hay que establecer una jerarquía:

- 1 negación ($\neg$)
- 2 conjunción ($\wedge$)
- 3 disyunción ($\vee$)
- 4 implicación ($\rightarrow$)
- 5 doble implicación ($\leftrightarrow$)

$$q \rightarrow s \wedge \neg u \quad \rightsquigarrow \quad q \rightarrow (s \wedge (\neg u))$$

Si no estuviera establecida una jerarquía, se resuelve como se lee, de izquierda a derecha:

$$(q \rightarrow s) \wedge \neg u$$

hacer tabla

Definición

Sea P una proposición compuesta, se dice que:

- P es **tautología** si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es **contradicción** si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- P es una **contingencia** si su valor de verdad cambia según cuáles sean los de las proposiciones simples que la forman.

Ejemplo

$p \vee \neg p$ es tautología

Ejemplo

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ es tautología.

Se expresa como:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad \circ \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Se dice que: **Las proposiciones son lógicamente equivalentes**, o que **la proposición es una equivalencia lógica**.

- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ es tautología.

Se expresa como:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

Se dice que: **La proposición es una implicación lógica**, o que **el antecedente implica lógicamente al consecuente**.

Equivalencias Lógicas

EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	leyes conmutativas
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	leyes distributivas
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$	tautología
$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{0}$	contradicción
$p \vee \mathbf{0} \equiv p$ $p \wedge \mathbf{1} \equiv p$	leyes de identidad
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	implicación
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	contrarrecíproca
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	bicondicional
$p \rightarrow q \equiv p \wedge \neg q \rightarrow \mathbf{0}$	reducción al absurdo

EQUIVALENCIAS LÓGICAS	
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	leyes de De Morgan
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$	negación de implicación
$\neg(\neg p) \equiv p$	doble negación

IMPLICACIONES LÓGICAS	
$p \Rightarrow p \vee q$	adición
$p \wedge q \Rightarrow p$	simplificación
$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$	modus ponens
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	modus tollens
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	silogismo hipotético
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$	silogismo disyuntivo
$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitiva del bicondicional

Ejemplo

Dadas la proposición compuesta $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$. ¿Es posible simplificarla?

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ \iff & (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) && \text{ley de De Morgan} \\ \iff & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) && \text{doble negación} \\ \iff & p \vee (q \wedge \neg q) && \text{distributiva de } \vee \text{ sobre } \wedge \\ \iff & p \vee \mathbf{0} && \text{contradicción} \\ \iff & p && \text{ley de identidad} \end{aligned}$$

Conclusión:

$$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \iff p$$

Definición

Un enunciado es una función proposicional si

- 1) contiene una o más variables, y
- 2) no es una proposición, pero
- 3) se convierte en una proposición cuando las variables que contiene se reemplazan por alguna opción permitida.

Ejemplo

$p(x)$: x es un número primo.

$p(11)$: 11 es un número primo.

$p(305)$: 305 es un número primo.

- Para algún x , $p(x)$.
- Existe algún x tal que $p(x)$.
- Existe al menos un x tal que $p(x)$.

Una forma de cuantificar la variable es el **cuantificador existencial**.
La proposición que se forma se simboliza con:

$$\exists x : p(x). \quad \text{o} \quad \exists x \in X : p(x).^a$$

^a Notación más rigurosa.

El modo de indicar que un enunciado comprende a todos los sujetos posibles del universo de discurso es el **cuantificador universal** y la proposición así formada se simboliza con:

$$\forall x : q(x) \quad \text{o} \quad \forall x \in X : q(x).^a,$$

^aNotación más rigurosa.

Algunas formas de leer una proposición cuantificada de este modo son:

- Para todo x , $q(x)$.
- Cualquier x cumple $q(x)$.
- Todo x verifica $q(x)$.

Valor de verdad de proposiciones cuantificadas

Proposición	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x : p(x)$	Para algún a (al menos uno) en el universo, $p(a)$ es verdadera.	Para todo a en el universo, $p(a)$ es falsa.
$\forall x : q(x)$	Para cada a del universo, $q(a)$ es verdadera.	Existe al menos un a en el universo tal que $q(a)$ es falsa.

Teorema

Dada una función proposicional $p(x)$ con universo U , se verifica que:

$$[\forall x : p(x)] \Rightarrow [\exists x : p(x)]$$

Negación de proposiciones cuantificadas

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

Ejemplo

Las dos variables son números enteros: $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \exists y : x + y = 3x$$

$x = 4 \rightsquigarrow y = 8$ que verifican que $4 + 8 = 3 \cdot 4$

$x = -3 \rightsquigarrow y = -6$ que verifican que $-3 + (-6) = 3 \cdot (-3)$

Para probar que cada vez que se fije un valor de x **siempre** se podrá encontrar algún valor de y que haga verdadera la igualdad, se requiere hacer una **demostración**. Aquí sólo hemos hecho una **verificación** de un par de ejemplos.

Ejemplo

Las dos variables son números reales: $x \in [0, 1)$ y $y \in [0, 1)$ y la función proposicional $p(x, y)$: x es la parte entera de y .

$$\exists x \forall y : p(x, y)$$

Existe $x = 0$:

- $\rightsquigarrow y = 0,34$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0,34$
- $\rightsquigarrow y = 0,9086$ y se verifica que $x = 0$ es la parte entera de $y = 0,9086$

Para probar que cada vez que existe al menos un individuo (x) que verifica la proposición con todos los posibles individuos y , se requiere hacer una **demostración**. Aquí sólo hemos hecho una **verificación** de un par de ejemplos.