UNIDAD 3

Índice

3. Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Ecuaciones lineales

Definición 3.1

Una ecuación lineal en una variable, x, es una ecuación de la forma:

$$ax = b,$$

donde a y b son números reales.

Ejemplo 3.1

$$3x = 5$$

es una ecuación lineal en una variable y se busca su solución despejando la **variable** x:

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}5 \quad \Rightarrow \quad 1x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

es su única solución y es un número real: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5}{3}\right\}$

Definición 3.2

Una ecuación lineal en dos variables, x e y, es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales.

Ejemplo 3.2

$$x - 2y = -6$$

es una ecuación lineal en dos variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja la variable y:

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x + 3 \right\}$$

Cada una de esas infinitas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del plano (x, y) y serán todos puntos de una misma recta (alineados).

Definición 3.3

Una ecuación lineal en tres variables, x, y y z, es una ecuación de la forma:

$$ax + by + cz = d,$$

donde a, b, c y d son números reales.

Ejemplo 3.3

$$-x - 2y + z = -1$$

es una ecuación lineal en tres variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja una variable, por ejemplo z:

$$z = x + 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x + 2y - 1 \right\}$$

Cada una de esas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del espacio y serán todas de un mismo plano (coplanares).

Definición 3.4

Una ecuación lineal en n variables, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, es una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_i, i = 1, \cdots, n$, son números reales.

Las soluciones que este tipo de ecuaciones pueden tener, se presentan en forma ordenada (por la variable a que pertenezcan), en una n-upla ordenada de números reales: $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que se corresponde con una única matriz columna y con una única matriz fila:

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Se designan, en general, con letras minúsculas: $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Ejemplo 3.4 Son ecuaciones lineales:

- $3x + 2y = 7$
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2 x_4 = 4.$

  Por otro lado, son ecuaciones no lineales, las siguientes:

- $3xy + \cos y = 7$
- $e^x - 2z = 7$

Observación: una ecuación lineal siempre puede reescribirse como una *combinación lineal de números reales* (variables) *con coeficientes reales* igualada a un número real.

Ejemplo 3.5 Una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$ es $s = (1, 2)$ ya que

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Mientras que $S = \left\{ \left(t, \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

3.2. Sistemas de Ecuaciones lineales

Definición 3.5

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables se denomina sistema de ecuaciones lineales (SEL) que escribiremos de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

Observaciones:

- La notación con doble subíndice indica que a_{ij} es el coeficiente de x_j en la $i-$ésima ecuación.
- Si el SEL tiene m ecuaciones y n incógnitas o variables, se dice simplemente que el SEL es $m \times n$.

3.3. Expresión matricial de un SEL

Dado un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, siempre es posible expresarlo como una ecuación matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{m\times n} \quad \cdot \quad \mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{m\times 1}$$

Notación:

- A : matriz de orden $m \times n$, con m filas que representan la cantidad de ecuaciones del SEL y n columnas que representan la cantidad de incógnitas del SEL. Llamada **matriz de coeficientes**.
- $\mathbf{x}$ ó $\mathbf{X}$: vector de $\mathbb{R}^n$ o matriz columna de orden $n \times 1$, con tantas filas como incógnitas tenga el sistema. Llamada **matriz de incógnitas**.
- $\mathbf{b}$ ó $\mathbf{B}$: vector de $\mathbb{R}^m$ o matriz columna de orden $m \times 1$, con tantas filas como ecuaciones tenga el sistema. Llamada **matriz de términos independientes**.
- En virtud de las consideraciones anteriores, un SEL se anotará indistintamente como:

  $$A\,X = B \quad \sim \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  Aunque se use la doble notación, claramente las operaciones son las definidas entre matrices.
- Dado un sistema $A\,X = B$, a la matriz escrita de la forma $[A|B]$ se la denomina **matriz ampliada del sistema**. Está formada por la matriz de coeficientes con el agregado de una columna con el término independiente respectivo a cada ecuación. A veces se la designa con A'.

3.4. Clasificación de SEL según su solución

Definición 3.6

Una solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es una n-upla ordenada de números

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

de modo que , cuando cada $x_i = s_i$, con $i = 1,\ 2\ \dots, n$, se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.
El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se denomina conjunto solución.

Importante: Esto es, que la matriz columna obtenida al hacer $A\,\mathbf{s}$ es exactamente igual a la matriz columna B, o sea, cada componente de una coincide con la que tiene la misma posición en la otra.

Ejemplo 3.6 la solución del sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 24 \end{bmatrix}}_{B}$$

es única y se anota:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

puesto que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 24 \end{bmatrix}}_{B}$$

Definición 3.7

- Un SEL se denomina **compatible** si tiene por lo menos una solución.
  - Si sólo tiene una solución, se llama **compatible determinado**.
  - Si tiene infinitas soluciones, se llama **compatible indeterminado**.
- Un SEL se denomina **incompatible** si no tiene solución.

Observaciones:

- En la bibliografía también aparece consistente como sinónimo de compatible e inconsistente como sinónimo de incompatible.

3.5. Clasificación de SEL según las matrices que lo componen

- Si $m = n$, el SEL se denomina **cuadrado**.
- Si $B = O$, es decir, B es la matriz nula (todos los términos independientes del sistema son ceros), o bien, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, el SEL se denomina **homogéneo**.

Ejemplo 3.7

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \\ x + 7y = 0 \end{cases}$

Propiedad 3.1

Sea $A\,X = O$ un sistema homogéneo de m ecuaciones y con n incógnitas. Entonces dicho sistema es compatible.

Observación: Recuerde que O designa a la matriz de orden $m \times 1$. Además, por abuso de notación, se suele escribir como vector $\mathbf{0}$.

Demostración:

Sea $s_1 = O_{n\times 1}$ el vector de dimensión $n \times 1$ cuyas entradas son todas ceros. Al sustituir X por s_1 en el sistema, se observa que s_1 satisface el sistema cualquiera sea s_1. Es decir, el vector s_1 siempre es solución del sistema $AX = O$. Entonces dicho sistema siempre es compatible. ■

Propiedad 3.2

Un sistema de ecuaciones lineales sólo hace verdadera una de las siguientes afirmaciones:

1. El SEL es compatible determinado.
2. El SEL es compatible indeterminado.
3. El SEL es incompatible.

Definimos un tipo de sistemas homogéneos que nos serán útiles en la resolución de ejercicios.

Definición 3.8

Dado un sistema no homogéneo, $A\,X = B$, siempre es posible escribir el sistema homogéneo $A\,X = 0$.
Este último se llama sistema homogéneo asociado y tiene la misma matriz de coeficientes que el original y la misma matriz de incógnitas; la matriz de términos independientes cambia por una del mismo orden pero con todas sus entradas nulas.

Ejemplo 3.8 Dado el sistema de 4 ecuaciones y 2 incógnitas con su forma matricial correspondiente:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 2x + y = 5 \\ -2x - y = -5 \\ 3x + 1,5y = 7,5 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \\ 7,5 \end{bmatrix}$$

Su sistema homogéneo asociado, con la expresión matricial correspondiente será:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -2x - y = 0 \\ 3x + 1,5y = 0 \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3

Si x_p es solución de $A\ X = B$ y x_h es solución de su sistema homogéneo asociado, $A\ X = O$, entonces $x_p + x_h$ es solución de $AX = B$.

Demostración: Puesto que

- x_p es solución de $A\ X = B$ se tiene que $A\ x_p = B$,
- x_h es solución de $A\ X = O$, es decir, x_h satisface el sistema verificando $A\ x_h = O$.

Luego:

$$A\ (x_p + x_h) = A\ x_p + A\ x_h = B + O = B.$$

En consecuencia: $x_p + x_h$ es solución de $A\ X = B$. ■

Se enuncia a continuación una propiedad que permite justificar el uso de un método sistemático para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Teorema 3.4

Sean $A\ X = B$ y $C\ X = D$ dos sistemas lineales $m \times n$.
Si las matrices ampliadas $[A|B]$ y $[C|D]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración: Se considera una solución cualquiera del sistema $A\ X = B$, que se llamará $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Se mostrará que ninguna de las operaciones elementales entre filas, aplicada a la matriz ampliada del sistema $[A|B]$, cambia las soluciones del sistema.

- *Intercambio de filas*: la solución $\mathbf{s}$ del sistema, es solución de cada una de las ecuaciones que lo forman. Luego, si esta operación elemental no modifica las ecuaciones, por lo tanto, tampoco modifica sus soluciones.

- *Multiplicación de una fila por un escalar no nulo*: Si la i-ésima ecuación del sistema se multiplica por $c \neq 0$ en ambos miembros, cualquier solución del sistema lo sigue siendo, ya que si se verifica esta igualdad:

  $$a_{i1}\, s_1 + a_{i2}\ s_2 + \ldots + a_{in}\, s_n = b_i$$

  También se verifica:

  $$c(a_{i1}\ s_1 + a_{i2}\, s_2 + \ldots + a_{in}\, s_n) = c\, b_i$$

  O, equivalentemente:

  $$(c\, a_{i1})\, s_1 + (c\, a_{i2})\, s_2 + \ldots + (c\, a_{in})\, s_n = c\, b_i,$$

  que es la ecuación que se obtendría al multiplicar una fila de la matriz ampliada por una constante no nula c. Si las igualdades no se modifican entonces $\mathbf{s}$ es solución de ambas ecuaciones.

- *Sumar a una ecuación un múltiplo de otra:* supongamos que a la j-ésima ecuación le sumamos c veces la i-ésima y, por ser solución del sistema, $\mathbf{s}$ verifica las dos igualdades (teniendo en cuenta el resultado del item anterior). Entonces se cumple que:

  $$a_{j1}\, s_1 + a_{j2}\, s_2 + \ldots + a_{jn}\, s_n = b_j$$

  $$(c\, a_{i1})\, s_1 + (c\, a_{i2})\, s_2 + \ldots + (c\, a_{in})\, s_n = c\, b_i,$$

  Sumando miembro a miembro estas igualdades y reordenando los coeficientes:

  $$(a_{j1} + c\, a_{i1})\, s_1 + (a_{j2} + c\, a_{i2})\, s_2 + \ldots + (a_{jn} + c\, a_{in})\, s_n = b_j + c\, b_i.$$

  Es decir que $\mathbf{s}$ sigue siendo solución de la nueva ecuación del sistema.

Por lo tanto, cualquiera sea la secuencia de operaciones elementales entre filas aplicada a la matriz ampliada del sistema, no se alteran las soluciones de dicho sistema.

Luego, $\mathbf{s}$ es solución del sistema equivalente $C\ X = D$. ■

Ejemplo 3.9 Verificación del enunciado del teorema anterior con:

$$\begin{cases} x \ + y - z \ = \ 5 \\ \quad 3y + \ 6z = \ 6 \\ x + 2y + 8z = \ -12 \end{cases}$$

y su (única) solución $\mathbf{s} = (-3, 6, -2)$.

A la matriz ampliada del sistema le aplicamos operaciones elementales por filas para obtener una matriz equivalente.

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 3 & 6 & | & 6 \\ 1 & 2 & 8 & | & -7 \end{bmatrix} \overset{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 3 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 9 & | & -12 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_2 \leftarrow \frac{1}{3} F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 9 & | & -12 \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada obtenida está asociada a un sistema que es equivalente al dado (según el Teorema 3.4) . Eso se comprueba, reemplazando en el nuevo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 9 & | & -12 \end{bmatrix} \quad \text{es, en forma matricial,} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\text{y en la expresión clásica de sistemas} \begin{cases} x + y - z = 5 \\ y + 2z = 2 \\ y + 9z = -12 \end{cases}$$

Sustituyendo las variables con los valores de la solución del sistema original, se puede corroborar que ella también es solución del sistema obtenido; por lo tanto son equivalentes.

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ y + 2z = 2 \\ y + 9z = -12 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -4 + 6 - (-2) = 5 \\ 6 + 2\,(-2)\ 2 = 2 \\ 6 + 9(-2) = -12 \end{cases}$$

En consecuencia, la solución del sistema dado y la del obtenido mediante operaciones elementales es exactamente la misma:

$$(x, y, z) = (-3,\ 6,\ -2)$$

Teorema 3.5

Sea $A\,X = B$ un sistema de ecuaciones lineales.
Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $A\,X = B$ es compatible determinado (cualquiera sea B).

Demostración
Sea el sistema $AX = B$
Por hipótesis, la matriz A es inversible. Premultiplicando a ambos miembros de la igualdad por A^{-1}, se obtiene:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

Por definición de matriz inversible,

$$I_n X = A^{-1}B$$

Puesto que la matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices, se tiene:

$$X = A^{-1}B$$

Como la matriz inversa A^{-1} es única y la matriz B también lo es, se concluye que X es la única solución del sistema lineal. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado. ■

Ejemplo 3.10 La solución de $A\,X = B$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ es

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es posible afirmar que la matriz solución es X ya que al considerar el sistema matricial

$$AX = B$$

la matriz X verifica la igualdad.
Puesto que la matriz A es triangular superior y todos sus elementos de la diagonal principal son distintos de cero, se tiene que A es invertible y el sistema tiene solución única.
Para obtener la matriz X, usando el Teorema previamente demostrado, se debe conocer la inversa de A, ya que:

$$X = A^{-1}B$$

Al reemplazar $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ en la ecuación anterior, se obtiene que la matriz solución es: $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Corolario 3.1

Sea $A\,X = O$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $A\,X = O$ es compatible determinado y la solución es la trivial.

3.5.1. Propiedades de los sistemas homogéneos

Teorema 3.6

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S, que son de orden $n \times 1$, verifican que:

a. $O_{n\times1} \in S$

b. Si X_1 y X_2 están en S, también lo está $X_1 + X_2$.

c. Si X_1 está en S, también $c\,X_1 \in S$, cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$.

Observación: Una forma equivalente de enunciar el teorema anterior es:

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S, que son de orden $n \times 1$, forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (o, equivalentemente, $\mathcal{M}_{n\times1}$).

Demostración: El conjunto S de todas las soluciones del sistema $A\,X = O$ puede ser escrito como

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = O\}$$

Demostrar las condiciones a, b y c del teorema 3.6 es lo mismo que demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

a.
Como para $AX = O$, la solución $X = O$ satisface la ecuación, se tiene que O está en S.

b.
Sean $X_1, X_2 \in S$. Por definición de solución del sistema

$$AX_1 = O \quad \text{y} \quad AX_2 = O$$

$$\begin{aligned}
A(X_1 + X_2) &= AX_1 + AX_2 && \text{por prop. distributiva del producto matricial} \\
& && \text{respecto de la suma} \\
&= O + O && \text{por hipótesis} \\
&= O && \text{resolviendo la suma indicada.}
\end{aligned}$$

Por lo que se puede asegurar que el vector suma $(X_1 + X_2) \in S$.

c.
Sea $X_1 \in S$ y $c \in \mathbb{R}$.
Se debe probar que $c\,X_1$ está en S, a partir de saber que $X_1 \in S$.

$$\begin{aligned}
A(c\,X_1) &= c(AX_1) && \\
&= c\,O && \text{por hipótesis, ya que } AX_1 = O \\
&= O && \text{resolviendo el producto indicado.}
\end{aligned}$$

es decir, que $A(c\,X_1) = O$, o sea $c\,X_1 \in S$.

Como S contiene al vector cero (a.) y es cerrado bajo suma (b.) y el producto por escalares (c.), se concluye que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. ■

3.6. Resolución de SEL

3.6.1. Métodos de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan

Los dos métodos presentados en esta sección, apoyan su validez para resolver un sistema dado en el Teorema 3.4. Veamos:

1. **Método de eliminación de Gauss:**
   La idea básica para resolver sistemas de ecuaciones lineales es eliminar incógnitas de manera que se obtenga un sistema equivalente (con las mismas soluciones) pero en forma escalonada y luego usar sustitución hacia atrás. Esto se logra realizando combinaciones apropiadas de operaciones elementales con ecuaciones.
   Además, dado un sistema $A\ X = B$, es claro que trabajar sobre la matriz ampliada del sistema ($[A|B]$) permite modificar toda la ecuación y se evita tener que aplicar las operaciones adecuadas a dos matrices distintas del sistema (A y B).

   Ejemplo 3.11 Sea el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = & 3 \\ y + 2z = & 4 \\ 2y + 5z = & 0 \end{cases}$$

   cuya única solución es $\mathbf{s} = (-25, 20, -8)$.
   Aplicando las operaciones elementales adecuadas a la matriz ampliada del SEL para obtener una matriz equivalente por filas, se tiene:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 2 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \overset{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_1 \leftarrow F_1 + F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

   Dado que la matriz ampliada original y la matriz ampliada escalonadaa son equivalentes por filas, por el Teorema 3.4 ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones. Con sustitución hacia atrás se puede ver que

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + 2z = 4 \\ z = -8 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + y - z = 3 \\ y = 4 - 2(-8) = 20 \\ z = -8 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = 3 - (20) + (-8) = -25 \\ y = 20 \\ z = -8 \end{cases}$$

   Por lo tanto, la solución del sistema dado y la del obtenido mediante una operación elemental es exactamente la misma:

$$(x, y, z) = (-25,\ 20,\ -8).$$

2. **Método de eliminación de Gauss-Jordan:**
La mejora del sistema de Gauss, llega con el aporte de Jordan. Este aporte consiste en continuar con el escalonamiento hasta obtener la matriz escalonada reducida de la matriz ampliada del SEL. Así, al recuperar el sistema, se reducen notablemente las sustituciones hacia atrás o se eliminan si la matriz del sistema es inversible y la solución del sistema aparece más rápidamente.

Ejemplo 3.12 Se retoma el sistema del ejemplo 11 y se continúa reduciendo la matriz escalonada

$$[A|B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix} \overset{F_1 \leftarrow F_1 + F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_1 \leftarrow F_1 - F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -25 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, la matriz ampliada original y la matriz ampliada escalonada reducida son equivalentes por filas, por el Teorema 3.4 ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones. El sistema que corresponde a la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -25 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 \\ 0 & 0 & 1 & | & -8 \end{bmatrix} \quad \text{es, en forma matricial,} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 20 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{y en la expresión clásica de sistemas} \begin{cases} x = -25 \\ y = 20 \\ z = -8 \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del sistema dado es:

$$(x, y, z) = (-25,\ 20,\ -8)$$

Ejemplo 3.13

I. Si $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ es la matriz aumentada de un SEL entonces el SEL es incompatible. Esto es porque el sistema del que proviene es:

$$\begin{cases} 0x + 1y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Claramente la segunda ecuación del sistema conduce a un absurdo dado que es imposible de cumplir por cualquier terna (x, y, z) que se proponga en $\mathbf{R}^3$.

II. Si $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ es la matriz aumentada de un SEL entonces dicho SEL es compatible indeterminado.
Recuperando el sistema $AX = B$ se puede ver que

$$\begin{cases} 0x + 1y + 0z = 2 \\ 0x + 2y + 0z = 4 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \;\; y = 2 \\ 2y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.14 Por ejemplo, se podría esquematizar el comportamiento óptimo que puede tener un sistema 3×4 es decir de menos ecuaciones que variables de la siguiente manera

$$\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right]}_{Gauss} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right]}_{Gauss-Jordan}$$

En este caso, el sistema sería compatible indeterminado, ya que en la cuarta columna no hay ningún primer elemento no nulo de una fila, o sea no hay pivote, y la correspondiente a una variable es libre, o sea, puede tomar cualquier valor real. Según cuál sea el valor de los elementos de esa columna, las otras variables pueden quedar en función de ella.
Queda propuesto al lector realizar esquemas similares para otras relaciones entre m y n y en condiciones que no sean óptimas (con la mayor cantidad de pivotes posibles).

3.6.2. Regla de Cramer

La regla que presentamos a continuación permite hallar los valores de las variables que verifican todas las ecuaciones, formando su solución, sólo cuando el sistema es cuadrado (tiene el mismo número de ecuaciones que variables). La aplicación de este método requiere el cálculo de determinantes.

Sea $A\,X = B$ un SEL de orden n tal que $\det(A) \neq 0$ entonces X tiene como entradas:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{\det(A)}, \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{det(A_n)}{\det(A)},$$

donde A_j para cada $j = 1, \ldots, n$, está definida como la matriz que se obtiene de sustituir en A, la j-ésima columna por B:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $\det(A) = 0$ y/o $\det(A_j) = 0$, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

3.7. Teorema de Rouché - Frobenius

Teorema 3.7: Teorema de Rouché - Frobenius

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$ y sea $(A|B)$ la matriz ampliada del sistema de orden $m \times (n+1)$. Entonces

I. Si $\rho(A) = \rho(A|B) = n$, el SEL es compatible determinado.

II. Si $\rho(A) = \rho(A|B) < n$, el SEL es compatible indeterminado.

III. Si $\rho(A) < \rho(A|B)$, el SEL es incompatible o inconsistente.

Para un SEL $m \times n$ compatible indeterminado resulta útil determinar los grados de indeterminación (o grados de libertad), también llamadas las variables libres del sistema. Se calculan como $g = n - \rho(A)$

Ejemplo 3.15 Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{F_2 \leftarrow \frac{-1}{5} F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{F_3 \leftarrow F_3 + 6F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_3 \leftarrow -\frac{1}{4} F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{F_1 \leftarrow F_1 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Así, la matriz aumentada del SEL en su forma escalonada reducida resulta: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
y se observa que:

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 3$$

Como el rango de las matrices coincide con el número de incógnitas, por el teorema de Rouché−Frobenius, el sistema es **compatible determinado**.

Resolviendo el SEL se obtiene:

$$z = 3, \quad y = -1, \quad x = 2.$$

Es decir que su conjunto solución es $S = \{(2, -1, 3)\}$

Ejemplo 3.16

Dado el sistema: $\begin{cases} x+2y+3z = 9 \\ 2x-y+z = 8 \\ 3x+3z=3 \end{cases}$. La matriz aumentada del SEL es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$.

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{F_2 \leftarrow F_2-2F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{F_3 \leftarrow F_3-3F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -6 & -24 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_2 \leftarrow -\frac{1}{5}F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -6 & -24 \end{array}\right] \underset{F_3 \leftarrow F_3+6F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$$

Frente a la última matriz obtenida, no tiene sentido continuar hasta hallar la escalonada reducida de la matriz ampliada. Las matrices escalonadas de A y de su aumentada son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right],$$

Por lo tanto,

$$\rho(A) = 2 \qquad \text{y} \qquad \rho(A|B) = 3$$

Como los rangos son distintos, por el teorema de Rouché−Frobenius, el sistema es **incompatible**. Es decir, el sistema no tiene solución o :

$$S = \varnothing$$

Esto es absolutamente coherente con los sistemas que estas matrices representan, respectivamente:

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+\quad 3z=3 \end{cases} \qquad \sim \qquad \begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 0x+y+z=2 \\ 0x+0y+0z=-12 \end{cases}$$

que claramente es inconsistente ya que ninguna terna de reales verifica la última ecuación.

Ejemplo 3.17

Sea el sistema $\begin{cases} x+\ 2y+\ 3z=\ 9 \\ 2x-\ y+z=8 \\ x-3y-2z=-1 \end{cases}$, cuya matriz ampliada es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{F_2 \leftarrow F_2-2F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{F_3 \leftarrow F_3-F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_2 \leftarrow -\frac{1}{5}F_2 \ \wedge\ F_3 \leftarrow -\frac{1}{5}F_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{F_3 \leftarrow F_3-F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz de coeficientes y la ampliada, son equivalentes a:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [A|B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 2$$

Como el rango es menor que el número de incógnitas, por el teorema de Rouché−Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado**.

El sistema equivalente al dado resulta:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

La cantidad de variables principales o variables dependientes es dos. Por lo tanto, la cantidad de variables libres o variables independientes es una.
Se considera como variables principales a x e y (que corresponden a las columnas que tienen pivotes (1 en la matriz escalonada); así la variable libre será z, que corresponde a la columna que no tiene pivote en la matriz escalonada.
Es posible renombrar a z como el parámetro t. Luego, tomando $z = t \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$y = 2 - t, \qquad x = 5 - t$$

Por lo tanto, el conjunto de infinitas soluciones del sistema resulta:

$$S = \{(5 - t,\ 2 - t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

3.8. Condiciones equivalentes para A de orden n

Es posible, luego de todo lo desarrollado, agregar al teorema de síntesis dado en la unidad anterior, otras proposiciones equivalentes.

Teorema 3.8

Sea A una matriz de orden n. Son equivalentes:

1. A es inversible (o no singular).
2. La forma escalonada reducida de A es la I_n.
3. $\det(A) \neq 0$.
4. El rango de A es n.
5. $AX = B$ es un SEL compatible determinado para toda matriz B, $n \times 1$, con solución única $X = A^{-1}B$.
6. $AX = O$ es un SEL compatible determinado con solución única $X = O$ (solución trivial).