

2.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

INGENIERÍA Y LCC



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD
DE INGENIERÍA

Esta presentación es una guía para la clase. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

De ninguna manera constituye el único material de estudio de la materia.

1 Definición de Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Ecuaciones Lineales
- Sistemas de Ecuaciones lineales
- Expresión matricial de un SEL
- Clasificación de SEL según su solución

2 Propiedades de SEL

3 Resolución de SEL

- Métodos de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan
- Regla de Cramer

4 Teoremas

Definición

Una ecuación lineal en una variable, x , es una ecuación de la forma:

$$ax = b,$$

donde a y b son números reales.

Ejemplo

$$3x = 5$$

es una ecuación lineal en una variable y se busca su solución despejando la **variable** x :

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}5 \quad \Rightarrow \quad 1x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

es su única solución y es un número real: $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{3}\right\}$

(Interpretar geoméricamente y analizar qué pasa si algún coeficiente es 0)

Definición

Una ecuación lineal en dos variables, x e y , es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales.

Ejemplo

$$x - 2y = -6$$

es una ecuación lineal en dos variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja una variable:

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x + 3 \right\}$$

Cada una de esas infinitas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del plano xy y serán todos puntos de una misma recta (alineados). **(Analizar casos con uno o más coeficientes nulos)**

Definición

Una ecuación lineal en tres variables, x, y y z , es una ecuación de la forma:

$$ax + by + cz = d,$$

donde a, b, c y d son números reales.

Ejemplo

$$-x - 2y + z = -1$$

es una ecuación lineal en tres variables y posee infinitas soluciones. Si se despeja una variable:

$$z = x + 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x + 2y - 1 \right\}$$

Cada una de esas soluciones se puede representar gráficamente con un punto del espacio y serán todas de un mismo plano (coplanares).

(Analizar casos con uno o más coeficientes nulos)

Definición

Una ecuación lineal en n variables, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, es una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_i, i = 1, \dots, n$ y b , son números reales.

Las soluciones que este tipo de ecuaciones puedan tener, se presentan en forma ordenada (por la variable a que pertenezcan), en una n -upla ordenada de números reales: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que se corresponde con una única matriz columna y con una única matriz fila:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n].$$

Se designan, en general con letras minúsculas: \mathbf{x} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .

Ejemplo

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ **X**
- $e^x - 2z = 7$ **X**
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

Observación: En base a lo que definimos en las últimas diapositivas de MATRICES, una ecuación lineal siempre puede reescribirse como una *combinación lineal de números reales (variables) con coeficientes reales* igualada a un número real.

Ejemplo

Una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$ es $s = (1, 2)$ ya que

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Mientras que $S = \left\{ \left(t, \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

Expresión matricial de un SEL

Dado un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, siempre es posible expresarlo como una ecuación matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$



$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \end{bmatrix}$$

Expresión matricial de un SEL

Dado un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, siempre es posible expresarlo como una ecuación matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{X}_{n \times 1} = \mathbf{B}_{m \times 1}$$

Expresión matricial de un SEL

Notación:

- A : llamada **matriz de coeficientes**, de orden $m \times n$, con m filas (una por cada ecuación del SEL) y n columnas que corresponden a las incógnitas del SEL.
- \mathbf{x} ó \mathbf{X} : **matriz de incógnitas**, matriz columna $n \times 1$ o vector de \mathbb{R}^n , con tantas filas como incógnitas tenga el sistema.
- \mathbf{b} ó \mathbf{B} : **matriz de términos independientes**, matriz columna $m \times 1$ o vector de \mathbb{R}^m , con tantas filas como ecuaciones tenga el sistema.
- En virtud de las consideraciones anteriores, un SEL se anotará indistintamente como:

$$AX = B \quad \sim \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Dado un sistema $AX = B$, a la matriz escrita de la forma $[A|B]$ se la denomina **matriz ampliada del sistema**. Se forma con la matriz de coeficientes y el agregado de una columna con el término independiente respectivo a cada ecuación.

Importante: Las operaciones son las definidas entre matrices.

Definición

Una solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es una n -upla ordenada de números

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

de modo que , cuando cada $x_i = s_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$, se satisfacen todas las ecuaciones del sistema. El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se denomina conjunto solución.

Ejemplo

En este caso la solución del sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 24 \end{bmatrix}}_B$$

es única y se anota:

$$S = \{(6, -5, 4)\}$$

Definición

- Un SEL se denomina **compatible** si tiene por lo menos una solución.
 - Si sólo tiene una solución, se llama **compatible determinado**.
 - Si tiene infinitas soluciones, se llama **compatible indeterminado**.
- Un SEL se denomina **incompatible** si no tiene solución.

Observaciones:

- En la bibliografía también aparece consistente como sinónimo de compatible e inconsistente como sinónimo de incompatible.

Clasificación de SEL según las matrices que lo componen

- Si $m = n$, el SEL se denomina **cuadrado**.
- Si $B = O$, es decir, B es la matriz nula (todos los términos independientes del sistema son ceros), o bien, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, el SEL se denomina **homogéneo**.

Ejemplo

$$1. \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + 7y = 0 \end{cases}$$

Propiedad

Sea $AX = O$ un sistema homogéneo de m ecuaciones y con n incógnitas. Entonces dicho sistema es compatible.

Demostrar

Observación: O designa a la matriz de orden $m \times 1$.

Propiedad

Un sistema de ecuaciones lineales sólo hace verdadera una de las siguientes afirmaciones:

- 1 El SEL es compatible determinado.
- 2 El SEL es compatible indeterminado.
- 3 El SEL es incompatible.

Definición

Dado un sistema no homogéneo, $AX = B$, siempre es posible escribir el sistema homogéneo $AX = O$.

Este último se llama sistema homogéneo asociado y tiene la misma matriz de coeficientes que el original y la misma matriz de incógnitas; la matriz de términos independientes cambia por una del mismo orden pero con todas sus entradas nulas.

Teorema

Si x_p es solución de $AX = B$ y x_h es solución de su sistema homogéneo asociado, $AX = O$, entonces $x_p + x_h$ es solución de $AX = B$.

Demostrar

Teorema

Sean $A X = B$ y $C X = D$ dos sistemas lineales $m \times n$.

Si las matrices ampliadas $[A|B]$ y $[C|D]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostrar

Ejemplo

Verificar el enunciado del teorema anterior con:
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + 2z = 4, \text{ cuya} \\ 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

única solución es $\bar{x} = (-25, 20, -8)$, usando la matriz ampliada del SEL:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

Propiedades de SEL

Teorema

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales.

Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado (cualquiera sea B).

Demostrar.

Es válido el enunciado recíproco?

Ejemplo

Dar la solución de $AX = B$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Corollary

Sea $AX = O$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Si A es una matriz inversible (o no singular) entonces el sistema $AX = O$ es compatible determinado.

Propiedades de los sistemas homogéneo

Teorema

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S , que son de orden $n \times 1$, verifican que:

- a) $O_{n \times 1} \in S$
- b) Si X_1 y X_2 están en S , también lo está $X_1 + X_2$.
- c) Si X_1 está en S , también $cX_1 \in S$, cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$.

Observación: Una forma equivalente de enunciar el teorema anterior es:

Sea S el conjunto solución de un sistema homogéneo $m \times n$. Entonces las matrices columna de S , que son de orden $n \times 1$, verifican que:

- 1 $O_{n \times 1} \in S$
- 2 Si X_1 y X_2 están en S , también lo está $c_1X_1 + c_2X_2$, cualesquiera sean c_1, c_2 en \mathbb{R} .

Demostrar

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

- 1 Método de eliminación de Gauss
- 2 Método de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo

$$\begin{cases} x - 2y + z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]}_{\text{Gauss}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]}_{\text{Gauss-Jordan}}$$

Este sistema tiene una única solución: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Regla de Cramer

Sea $AX = B$ un SEL de orden n tal que $\det(A) \neq 0$ entonces X tiene como entradas:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

donde A_j para cada $j = 1, \dots, n$, está definida como la matriz que se obtiene de sustituir en A , la j -ésima columna por B :

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$ y sea $A|B$ la matriz ampliada del sistema de orden $m \times (n + 1)$. Entonces

- Si $\rho(A) = \rho(A|B) = n$, el SEL es compatible determinado.
- Si $\rho(A) = \rho(A|B) < n$, el SEL es compatible indeterminado.
- Si $\rho(A) < \rho(A|B)$, el SEL es incompatible o inconsistente.

Observación:

Para un SEL $m \times n$ compatible indeterminado resulta útil determinar los grados de indeterminación (o grados de libertad), también llamadas las variables libres del sistema. Se calculan como $g = n - \rho(A)$

Ejemplo

Consideramos los sistemas

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 0y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

Teorema

Sea A una matriz de orden n . Son equivalentes:

- 1 A es inversible (o no singular).
- 2 La forma escalonada reducida de A es la I_n .
- 3 $\det(A) \neq 0$.
- 4 El rango de A es n .
- 5 $AX = B$ es un SEL compatible determinado para toda matriz B , $n \times 1$, con solución única $X = A^{-1}B$.
- 6 $AX = O$ es un SEL compatible determinado con solución única $X = O$ (solución trivial).