Trabajo Práctico N°2.3: Sistemas

Bloque 1: Definiciones y Conceptos Básicos

1. **(Concepto de linealidad)** Identifique cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones lineales.

   - Para las que **sí lo sean**, reescríbalas en la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.
   - Para las que **no lo sean**, explique qué no se cumple la definición de linealidad.

   a) $3x - 5y = 2z - 1$
   b) $x_1 + \sqrt{2}\,x_2 - 4 = \pi$
   c) $2x + 4yz = 8$
   d) $x^{-1} + 3y = 5$
   e) $(\sin^{-1}\pi)x - y = 0$
   f) $a + 2b - 3c + 4d = 5$

2. Para cada uno de los siguientes sistemas, halle la **matriz de coeficientes**, el **vector de incógnitas** y el **vector de términos independientes**, y exprese el SEL en forma matricial. Si lo desea, halle también la **matriz ampliada** del sistema.

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 = 1 \\ -x_5 + x_3 + 3x_2 - 2 = 0 \\ x_3 + 7x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^5 \qquad \begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - z + 2y = 4 \\ 3y = 1 + 3z \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

3. Dado el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -10 \\ -\frac{3}{2}y + z - 5 = x \end{cases}$$

   Determine si las ternas $(-4, 0, 1)$; $(-6, 1, -1)$; $(-3, 0, 2)$ y $(-8, 2, 0)$ son solución del sistema.

4. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en su forma matricial $AX = B$, escriba el sistema de ecuaciones correspondiente (forma escalar).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bloque 2: Propiedades de los Sistemas y sus Soluciones

5. Indique si las siguientes proposiciones son **Verdaderas (V)** o **Falsas (F)**. Justifique.

   a) Si en $AX = \mathbf{O}$, S es solución, entonces kS es solución, donde k es un número real.
   b) Si en $AX = B$ (con $B \neq \mathbf{O}$), S_1 y S_2 son soluciones, entonces $(S_1 + S_2)$ es solución.
   c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución.
   d) Si A es una matriz rectangular y el sistema $AX = \mathbf{O}$ es compatible determinado, el sistema $A^TX = \mathbf{O}$ también es compatible determinado.

6. Determine el conjunto solución del sistema $AX = \mathbf{O}$ y verifique que el conjunto solución obtenido es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

7. Justifique si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Para ello, lleve la matriz ampliada de cada uno a su forma escalonada reducida y compare sus conjuntos solución.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} 4y - z = 6 \\ x - y + 2 = -2z \\ -9 - 4z - y = 0 \end{cases}$$

8. **(Estructura de la solución)** Sea el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Se sabe que $\mathbf{x}_p = (1, 0, 2)$ es una solución particular. Además, el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ es

$$S_h = \{\, t(5, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\,\}.$$

   a) Sin conocer A ni $\mathbf{b}$, encuentre otras dos soluciones distintas para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   b) Escriba la forma del conjunto solución general para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

9. **(Equivalencia vs. misma solución)** Considere los siguientes dos sistemas:

$$\text{Sistema 1: } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad \text{Sistema 2: } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

   a) Resuelva ambos sistemas y verifique que tienen el mismo conjunto solución.
   b) Determine si los sistemas son equivalentes. Para ello, encuentre la forma escalonada reducida por filas (rref) de sus respectivas matrices ampliadas.
   c) A la luz de sus hallazgos, ¿qué puede concluir sobre la relación entre "tener la misma solución" y "ser sistemas equivalentes"? ¿El recíproco del teorema ("si dos sistemas tienen la misma solución, entonces sus matrices ampliadas son equivalentes por filas") es verdadero? Justifique.

Bloque 3: Métodos de Resolución

10. Resuelva los sistemas del ejercicio 2 utilizando el método de eliminación de Gauss o Gauss-Jordan. Verifique los resultados usando algún software computacional.

11. Para las matrices ampliadas del ejercicio 4:

   a) Determine, si existen, las incógnitas principales y libres.
   b) Encuentre, de ser posible, el conjunto solución.

12. Analice y resuelva los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del ejercicio 2.

13. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de coeficientes del sistema $AX = B$. Resuelva el sistema para

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

14. Determine un vector x tal que $Ax = b$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, encuentre x tal que $Ax = \mathbf{O}$.

15. **(Regla de Cramer)** Dado el siguiente sistema, utilice la Regla de Cramer para encontrar **únicamente** el valor de z.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

Bloque 4: Teoremas y Análisis con Parámetros

16. Para los sistemas de los ejercicios 2 y 4, clasifíquelos explícitamente según el Teorema de Rouché-Frobenius, comparando rango(A) y rango$(A|B)$.

17. Para la siguiente matriz ampliada, determine los posibles valores de α, si existen, tales que el sistema $AX = B$ no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha^2 & 5\alpha + 4 & . & -16 \\ 1 & \alpha & \alpha & . & \alpha \\ -\alpha & 4\alpha & 4\alpha & . & 4\alpha \end{pmatrix}$$

18. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \\ ax_4 + x_5 = -b \\ (b^2 - b)x_4 = b \end{cases}$$

Encuentre, si existen, los valores de a y b para que el sistema no tenga solución, tenga solución única o tenga infinitas soluciones.

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere los planos:

$$4x - ay + z + 4 = 0, \quad 2x - y + z - 1 = 0, \quad 2x - y + 2bz + 4 = 0.$$

Determine a y b para que la intersección de los tres planos sea: a) vacía, b) un punto, c) una recta.

20. Encuentre los valores de λ para que el siguiente sistema homogéneo tenga infinitas soluciones:

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{O}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bloque 5: Aplicaciones y Ejercicios Integradores

21. Plantee, resuelva e interprete:

a) Un empresario tiene tres máquinas para fabricar cuatro productos. Las horas de uso de cada máquina por unidad de producto se detallan en la tabla. Si cada máquina debe operar 8 horas diarias, encuentre cuántas unidades se deben producir de cada producto.

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

b) Un viajero gastó un total de \$340 en alojamiento, \$320 en comida y \$140 en gastos varios recorriendo Inglaterra, Francia y España. Los costos diarios por país fueron:

- Alojamiento: \$30 (Inglaterra), \$20 (Francia), \$20 (España).
- Comida: \$20 (Inglaterra), \$30 (Francia), \$20 (España).
- Varios: \$10 en cada país.

Calcule el número de días que permaneció en cada país o muestre que el registro es incorrecto.

22. **(Construcción de sistemas)** Construya un ejemplo de una matriz ampliada en forma escalonada (no necesariamente reducida) que corresponda a un sistema de ecuaciones lineales y que cumpla con lo solicitado. Si no es posible, explique por qué.

    a) Un sistema 3×3 incompatible cuyo rango de la matriz de coeficientes sea 2.

    b) Un sistema 3×4 compatible indeterminado con dos variables libres.

    c) Un sistema 4×3 compatible determinado.

23. Retome el sistema del ejercicio 3.

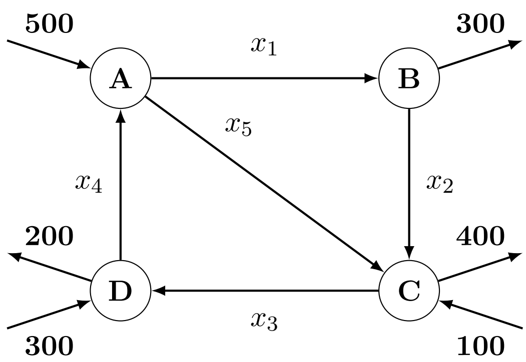
    a) Muestre que toda terna de la forma $(t - 5, 0, t)$, donde t es un número real, es solución del sistema.

    b) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es $S = \{(t - 5, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Justifique.

    c) Utilice GeoGebra para interpretar geométricamente el sistema y su conjunto solución.

Bloque 6: Aplicaciones por carrera

24. **(Ingeniería Civil e Hidráulica — Red de flujo)** Considere una red de tuberías de agua (o calles de una ciudad de sentido único) con los flujos medidos en litros por minuto (o vehículos por hora) como se muestra en la figura.



    Suponga que el flujo que entra a un nodo debe ser igual al flujo que sale del mismo (Ley de Conservación).

    a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales que describe el flujo de la red.

    b) Resuelva el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan. ¿Es el sistema compatible determinado o indeterminado?

    c) Si el flujo a través de la conexión x_5 se restringe a 50 unidades debido a una reparación, ¿cuáles son los valores de los otros flujos?

25. **(Ingeniería Química e Industrial — Balanceo de ecuaciones)** En un proceso de combustión industrial, se quema propano (C_3H_8) con oxígeno (O_2) para producir dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). La ecuación no balanceada es:

$$x_1(C_3H_8) + x_2(O_2) \longrightarrow x_3(CO_2) + x_4(H_2O).$$

    a) Escriba las ecuaciones correspondientes para el balance de Carbono, Hidrógeno y Oxígeno.

    b) Demuestre que esto resulta en un **sistema homogéneo** $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$.

    c) Encuentre la solución general del sistema. ¿Por qué nos interesan las soluciones no triviales en este contexto?

    d) Determine la solución con los números enteros positivos más pequeños posibles.

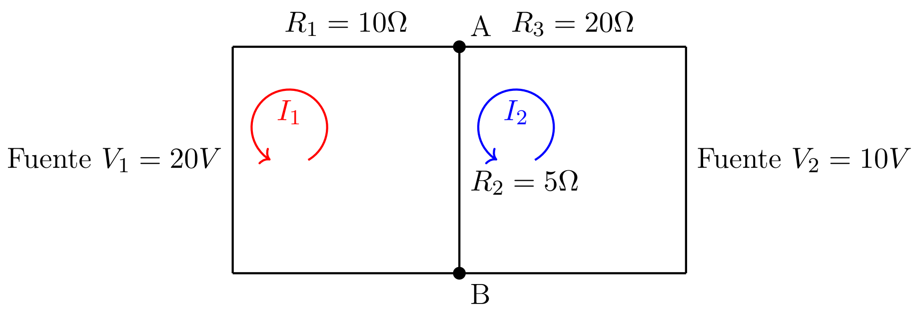
26. **(LCC y Ciencia de Datos — Ajuste de curvas)** Se desea encontrar un polinomio de grado 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica pase por los puntos $P_1(1, 4)$, $P_2(2, 0)$ y $P_3(3, 12)$.

a) Escriba el sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = B$, donde las incógnitas son a, b, c.

b) Resuelva el sistema para encontrar el polinomio interpolador.

c) (Opcional) Utilice un software para graficar los puntos y el polinomio obtenido.

27. **(Ingeniería Mecatrónica — Leyes de Kirchhoff)** Considere el siguiente circuito eléctrico con dos mallas. Se desea determinar las corrientes de malla I_1 e I_2 (en amperes).



Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff se obtienen:

- Malla 1: $10I_1 + 5(I_1 - I_2) = 20$
- Malla 2: $20I_2 + 10 + 5(I_2 - I_1) = 0$ (la corriente I_2 entra por el positivo de V_2)

a) Reordene las ecuaciones para obtener un sistema de la forma $A\mathbf{x} = B$, donde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$.

b) Resuelva el sistema y determine las corrientes.

c) Si I_2 resulta negativo, interprete físicamente ese resultado.

28. **(Ingeniería Industrial — Modelo de Leontief)** Una economía simplificada consta de tres sectores: **Agricultura (A)**, **Manufactura (M)** y **Servicios (S)**. La tabla indica insumos requeridos por unidad producida:

	Insumos requeridos por:		
Ventas de:	Sector A	Sector M	Sector S
Sector A	0.2	0.3	0.1
Sector M	0.4	0.1	0.2
Sector S	0.1	0.3	0.2

Con demanda externa de 100 (A), 150 (M) y 80 (S), los niveles de producción x_A, x_M, x_S deben satisfacer:

$$\text{Producción total} = \text{Demanda interna} + \text{Demanda externa}.$$

a) Plantee el sistema $x = Cx + d$ (matriz C y vector d).

b) Reescriba como $(I - C)x = d$.

c) Resuelva el sistema.

29. **(LCC y Telecomunicaciones — Recuperación de señales)** Se transmiten tres señales x, y, z. En el receptor se mide:

$$\begin{cases} R_1 : \text{suma de las tres señales,} \\ R_2 : \text{primera menos dos veces la segunda más la tercera,} \\ R_3 : \text{dos veces la primera más la segunda.} \end{cases}$$

Si $R_1 = 10$, $R_2 = -2$ y $R_3 = 11$:

a) Modele la situación como un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Estudie si A es inversible (determinante o rango).

c) Recupere x, y, z.

30. **(Ingeniería en Petróleo — Mezcla de crudos)** Una refinería dispone de:

- **Crudo ligero:** 0.5 % azufre, 40 API.
- **Crudo medio:** 1.5 % azufre, 30 API.
- **Crudo pesado:** 3.0 % azufre, 20 API.

Se solicita una mezcla de **10 000 barriles** con 1.65 % de azufre y 29 API promedio. Si x_1, x_2, x_3 son los barriles de cada tipo:

a) Plantee las ecuaciones de balance (volumen, azufre y densidad).

b) Resuelva el sistema lineal.

c) Determine si el pedido es posible (sin cantidades negativas).