UNIDAD 3

Índice

3.1. Transformaciones lineales

Hay funciones que transforman o mapean un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W. A este tipo de funciones las anotamos como

$$T : V \to W$$

El espacio vectorial V se llama *dominio de* T y W se llama *codominio de* T. Si $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in W$ tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, decimos que $\mathbf{w}$ es imagen de $\mathbf{v}$ bajo T. El conjunto de todas las imágenes de los vectores en V se llama *imagen de* T y el conjunto de todos los $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ se llama *preimagen de* $\mathbf{w}$.

Ejemplo 3.1

Al considerar una función del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida como:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Las imágenes de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mediante la función T son

   - $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Ahora, vamos a comparar $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

- $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Longrightarrow T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$

Al comparar,

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

2. Vamos a hacer un análisis similar, con la multiplicación por un escalar. Comparemos $T\left(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ con $3\ T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

   - $T\left(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$
   - $3T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

   Ambos resultados coinciden.

Estas condiciones no se cumplen para todas las funciones, pero las funciones que las cumplen reciben un nombre especial y serán el centro de atención de esta unidad.

Definición 3.1

Sean V y W espacios vectoriales. La función $T : V \to W$ se llama transformación lineal de V en W si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$, se cumple

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

Observaciones

- Si se cumplen estas operaciones, se dice que T *preserva la suma* y *preserva el producto por un escalar* ya que se produce el mismo resultado antes o después de aplicar la transformación.

- En los ejemplos precedentes y en lo que sigue, se usa una notación que no es del todo exacta pero sí cómoda. Cuando se escribe, para un vector de $\mathbb{R}^n$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad \text{correspondería} \quad T\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right),$$

  dado que T es una función de variable $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ y eso, usualmente, se pone entre paréntesis.

  Se ha adoptado una notación más práctica (con sólo un paréntesis) pero no se debe perder de vista que se está designando a la imagen de un elemento de $\mathbb{R}^n$ a través de T.

Ejemplo 3.2

Veamos si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ es una transformación lineal.

Para determinar que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la defición, tememos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ y c cualquier número real. Entonces

$$
\begin{aligned}
1.\ T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) \\
&= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2)) \\
&= ((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2), (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)) \\
&= ((u_1 + u_2) + (v_1 + v_2), (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)) \\
&= ((u_1 + u_2), (u_1 - u_2)) + ((v_1 + v_2), (v_1 - v_2)) \\
&= T(u_1, u_2) + T(v_1, v_2) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

$$
\begin{aligned}
2.\ T(c\mathbf{u}) &= T(c(u_1, u_2)) \\
&= T(cu_1, cu_2) \\
&= ((cu_1 + cu_2), (cu_1 - cu_2)) \\
&= c((u_1 + u_2), (u_1 - u_2)) \\
&= c\ T(u_1, u_2) \\
&= c\ T(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Como la función definida satisface las condiciones 1 y 2, se concluye que T es una transformación lineal.

Ejemplo 3.3

Veamos si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$ es una transformación lineal.

Para determinar que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición, tomemos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y c cualquier número real. Entonces

$$
\begin{aligned}
1.\ T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) \\
&= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= ((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2),\ 2(u_3 + v_3)) \\
&= ((u_1 + u_2) + (v_1 + v_2),\ 2u_3 + 2v_3) \\
&= (u_1 + u_2,\ 2u_3) + (v_1 + v_2,\ 2v_3) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

$$
\begin{aligned}
2.\ T(c\mathbf{u}) &= T(c(u_1, u_2, u_3)) \\
&= T(cu_1, cu_2, cu_3) \\
&= (cu_1 + cu_2,\ 2cu_3) \\
&= c(u_1 + u_2,\ 2u_3) \\
&= cT(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Como la función definida satisface las condiciones 1 y 2, se concluye que T es una transformación lineal.

Ejemplo 3.4

Veamos si $T : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 3}$ definida por

$$
T(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & x+y \\ 0 & x & y \end{bmatrix}
$$

es una transformación lineal.

Para determinar que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición, tomemos $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ y c cualquier número real. Entonces

$$
\begin{aligned}
1.\ T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) \\
&= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\
&= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ 0 & u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_1 + u_2 \\ 0 & u_1 & u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_1 + v_2 \\ 0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

$$
\begin{aligned}
2.\ T(c\mathbf{u}) &= T(c(u_1, u_2)) \\
&= T(cu_1, cu_2) \\
&= \begin{bmatrix} cu_1 & cu_2 & cu_1 + cu_2 \\ 0 & cu_1 & cu_2 \end{bmatrix} \\
&= c\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_1 + u_2 \\ 0 & u_1 & u_2 \end{bmatrix} \\
&= cT(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Luego, se cumple que $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Como la función definida satisface las condiciones 1 y 2, se concluye que T es una transformación lineal.

Ejemplo 3.5
La función de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2} \quad \text{tal que} \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal definida en el espacio vectorial de matrices reales de 2×2.

Para determinar que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la defición, tememos $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ y c cualquier número real. Entonces

1.
$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 \\ u_3+v_3 & u_4+v_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+(u_2+v_2) & 0 \\ 0 & (u_3+v_3)+(u_4+v_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2) & 0 \\ 0 & (u_3+u_4)+(v_3+v_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1+u_2 & 0 \\ 0 & u_3+u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+v_2 & 0 \\ 0 & v_3+v_4 \end{bmatrix} \\
&= T\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Luego, se cumple que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

2.
$$\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T\left(c\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} cu_1 & cu_2 \\ cu_3 & cu_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} cu_1+cu_2 & 0 \\ 0 & cu_3+cu_4 \end{bmatrix} \\
&= c\begin{bmatrix} u_1+u_2 & 0 \\ 0 & u_3+u_4 \end{bmatrix} \\
&= c\,T\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) \\
&= c\,T(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Luego, se cumple que $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Como la función definida satisface las condiciones 1 y 2, se concluye que T es una transformación lineal.

Ejemplo 3.6

Veamos si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida $T(x, y) = y + 1$ es una transformación lineal.

Para determinar si se cumplen las condiciones 1 y 2 de la definición, elegimos $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} 1.\ T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= T(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \\ &= y_1 + y_2 + 1 \end{aligned}$$

Acá nos detenemos porque

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) &= (y_1 + 1) + (y_2 + 1) \\ &= y_1 + y_2 + 2 \end{aligned}$$

Así, $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \neq T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$

Dado que no se cumple la primera condición requerida en la definición, T no es una transformación lineal.

Ejemplo 3.7

Se puede definir una transformación, que a cada matriz A de orden $m \times n$ la transforme en su matriz transpuesta:

$$T : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{n\times m} \quad \text{tal que} \quad T(A) = A^T.$$

De acuerdo a las propiedades que se estudiaron en la unidad de matrices, esta transformación es lineal, ya que para cualquier par de matrices A y B de orden $m \times n$ y cualquier $k \in \mathbb{R}$, se verifica que

1. $T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$
2. $T(kA) = (kA)^T = k\ A^T = k\ T(A)$

3.1.1. Clasificación de transformaciones lineales y transformaciones lineales especiales

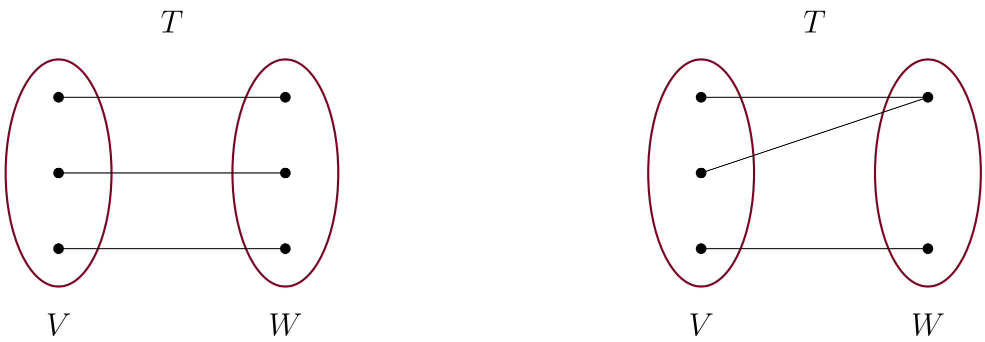
En esta sección se introducen conceptos importantes.

Se comienza por dar una clasificación de las transformaciones lineales de acuerdo a las características que éstas tengan en tanto funciones.

Definición 3.2

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es monomorfismo si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

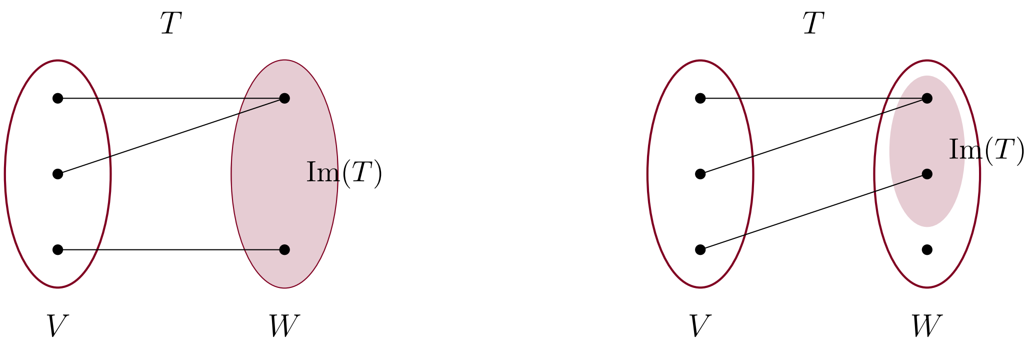
$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \ \text{ implica que } T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{u})$$



(a) T es monomorfismo (b) T no es monomorfismo

Definición 3.3

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es epimorfismo si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.



(a) T es epimosrfismo (b) T no es epimosrfismo

Una última definición, que utiliza las dos anteriores.

Definición 3.4

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es isomorfismo si T es monomorfismo y epimorfismo.

Se dan dos definiciones más, que son útiles para continuar clasificando las transformaciones lineales.

Definición 3.5

Sea T una transformación lineal.

- Decimos que T es endomorfismo, si $T : V \to V$. Es decir, el dominio y el codominio coinciden.
- Decimos que T es automorfismo, si T es endomosrfismo y es isomorfismo.

Algunas transformaciones especiales.

1. La *transformación cero o nula* es la transformación lineal $T : V \to W$ definida como $T(\mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
2. La *transformación identidad* es la transformación lineal $T : V \to V$ definida como $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
3. La *transformación matricial* es la transformación lineal de la forma

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ tal que } \quad T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_{m\times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

   siendo A una matriz fija de orden $m \times n$.

Se puede verificar que la transformación nula y la transformación identidad cumplen las condiciones de la definición de transformación lineal.

Se puede ver que la transformación matricial cumple las condiciones de la definición de transformación lineal.

Propiedad 3.1

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, donde A es una matriz fija. Entonces T es una transformación lineal.

Demostración:
Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.

1. Debemos probar que $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.

   Por la propiedad distributiva del producto de matrices respecto de la suma, se tiene que:

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$$

2. Debemos probar que $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$.

   Por la propiedad del producto de un escalar por una matriz, resulta que:

$$T(c\mathbf{v}) = A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

■

Importante: Observar que toda matriz $m \times n$ determina una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y recíprocamente. Se retoma esta idea en la ultima sección de este capítulo.

3.2. Propiedades

Todas las transformaciones lineales cumplen con las siguientes propiedades.

Propiedad 3.2

Sea T una transformación lineal $T : V \to W$ y sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ vectores de V y $c_1, c_2, \ldots, c_p$ escalares. Entonces se cumple que

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
3. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$
4. Si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ entonces

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \ldots + c_pT(\mathbf{v}_p)$$

Demostración:

1. Para demostrar la primera propiedad, observemos que para todo vector $\mathbf{v}$ de un espacio vectorial, se cumple que $0\mathbf{v} = 0$. Luego, usando la definición de transformación lineal.

$$T(0) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = 0$$

   Por lo tanto, vale la igualdad de la proposición 1.

2. Para demostrar la segunda propiedad, recordemos que para todo vector $\mathbf{v}$ de un espacio vectorial, se cumple que $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$. Luego, usando la definición de transformación lineal.

$$T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

   Por lo tanto, vale la igualdad de la proposición 2.

3. Para la tercera propiedad, recordemos que para todo par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de un espacio vectorial, se cumple que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Luego, usando la definición de transformación lineal.

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + (-1)T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$$

   Por lo tanto, vale la igualdad de la proposición 3.

4. Sabiendo que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ entonces

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p) \\ &= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \ldots + c_pT(\mathbf{v}_p) \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema expresa una relación entre dos conceptos definidos anteriormente.

Teorema 3.3

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $dim(V) = dim(W) = n$. Decimos que T es monomorfismo si y sólo si T es epimorfismo.

3.3. Transformaciones lineales y bases

Con la proposición 4 de la Propiedad 3.2 y con la noción de base de un espacio vectorial, es posible construir una transformación lineal con dominio en V conociendo únicamente las imágenes de los elementos de la base de V.El siguiente teorema garantiza este resultado.

Teorema 3.4

Sean V, W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Sea $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ una base de V y sea $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \dots, \mathbf{w_m}\}$ un subconjunto de vectores de W. Entonces existe, y es única, la transformación T tal que para cada $\mathbf{v_i}$ existe un $\mathbf{w_j}$ que cumple

$$T(\mathbf{v_i}) = \mathbf{w_j} \text{ para } i = 1, \dots n \text{ y } j = 1, \dots, m$$

Observación: En el teorema anterior, los vectores w_j se pueden repetir.

El siguiente ejemplo muestra cómo construir la transformación lineal si está definida sólo en una base.

Ejemplo 3.8 Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) = (2,-1,4)$$

$$T(0,1,0) = (1,5,-2)$$

$$T(0,0,1) = (0,3,1)$$

Hallar $T(2,3,-2)$ y $T(x,y,z)$.

Como $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, podemos escribir (de manera única)

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

Aplicando la transformación en ambos miembros y utilizando la definición de transformación lineal, resulta que

$$\begin{aligned}
T(2,3,-2) &= T(2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)) \\
&= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1) \\
&= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,1) \\
&= (7,7,0)
\end{aligned}$$

De igual manera,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\
&= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\
&= x(2,-1,4) + y(1,5,-2) + z(0,3,1) \\
&= (2x+y, -x+5y+3z, 4x-2y+z)
\end{aligned}$$

Así, la transformación lineal está definida como

$$T(x,y,z) = (2x+y, -x+5y+3z, 4x-2y+z)$$

3.4. Condiciones equivalentes para A de orden n

Es posible, luego de todo lo desarrollado, agregar al teorema de síntesis dado en la unidad anterior, otras proposiciones equivalentes.

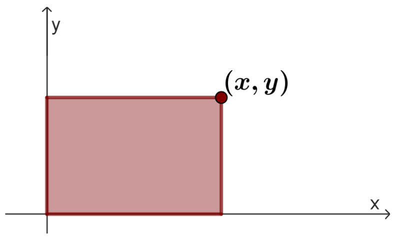
Teorema 3.5

Sea A una matriz de orden n. Son equivalentes:

1. A es inversible (o no singular).
2. La forma escalonada reducida de A es la I_n.
3. $\det(A) \neq 0$.
4. El rango de A es n.
5. $AX = B$ es un SEL compatible determinado para toda matriz B, $n \times 1$, con solución única $X = A^{-1}B$.
6. $AX = O$ es un SEL compatible determinado con solución única $X = O$ (solución trivial).
7. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

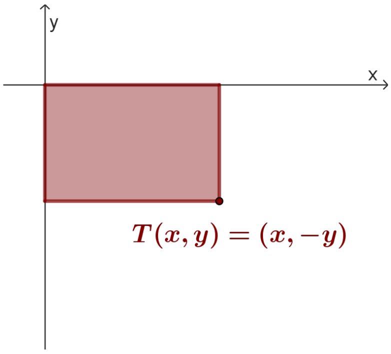
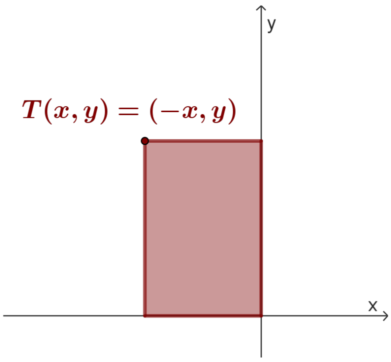
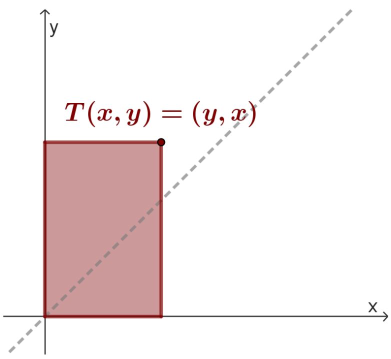
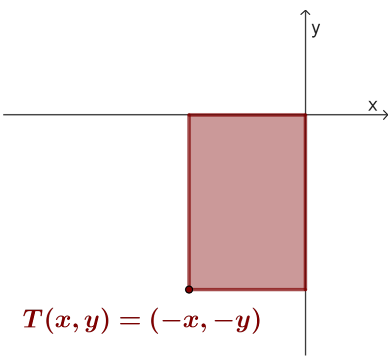
3.5. Transformaciones Geométricas en el Plano

Tomando como referencia el rectángulo que se muestra en la siguiente imagen

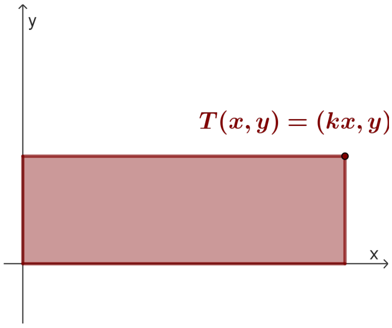
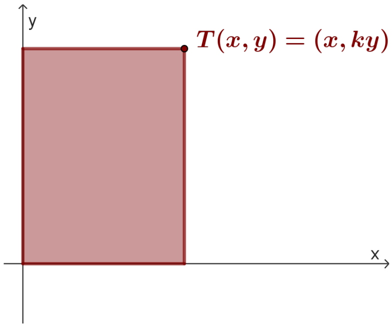
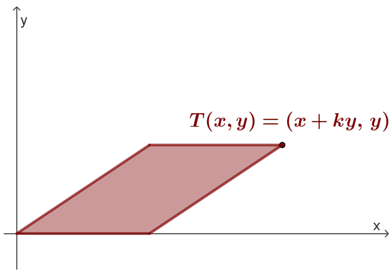
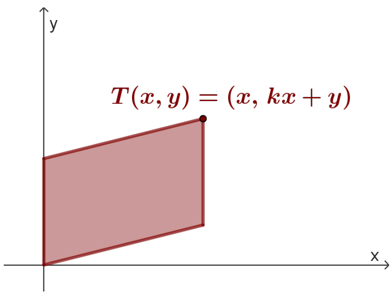


se describe la acción de diferentes transformaciones en el plano.

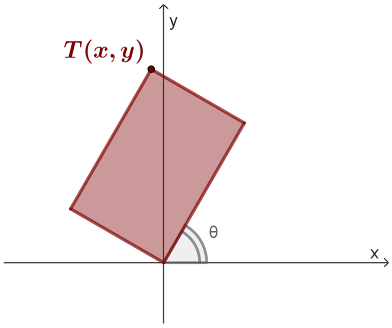
Cuadro 1: Acción de la transformaciones Lineales

Transformación	Imagen del rectángulo de referencia	Matriz estándar
Reflexión a través del eje x		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexión a través del eje y		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexión sobre la recta $y = x$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexión sobre la recta $y = -x$		$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Cuadro 1 – continuación

Transformación	**Imagen del rectángulo de referencia**	**Matriz estándar**
Dilatación o contracción en la dirección del eje x		$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Dilatación o contracción en la dirección del eje y		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Corte o cizalladura horizontal		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Corte o cizalladura vertical		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Cuadro 1 – continuación

Transformación	Imagen del rectángulo de referencia	Matriz estándar
Rotación de ángulo θ en sentido positivo		$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3.6. Conjuntos asociados a una transformación lineal

3.6.1. Núcleo de una transformación lineal

El siguiente ejemplo muestra cuáles son los vectores del dominio que la transformación mapea al vector nulo de la imagen.

Ejemplo 3.9 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aquí $T(0,0,0) = (0,0)$, $T(1,-1,1) = (0,0)$, $T(-2,2,-2) = (0,0)$.

Aún más,

- $T(t,-t,t) = (0,0)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Los vectores del dominio, a los que la transformación lineal les hace corresponder el vector nulo de la imagen, juegan un rol importante.

Definición 3.6

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El conjunto de todos los vectores en V que cumplen $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ se denomina núcleo de T o kernel de T y se denota por $N(T)$ o $\mathrm{Ker}(T)$.
En otras palabras

$$N(T) = \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

En nuestro ejemplo anterior,

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(t,-t,t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 3.10 Sea $T : M_{3,2} \to M_{2,3}$ la transformación lineal que transforma una matriz A de tamaño 3×2 en su transpuesta. Es decir,

$$T(A) = A^T$$

Para esta transformación lineal, es evidente que la matriz nula de tamaño 3×2 es la única matriz en $M_{3,2}$ cuya transpuesta es la matriz cero en $M_{2,3}$. Por consiguiente, el kernel de T consta de un solo elemento: la matriz cero en $M_{3,2}$. En otras palabras

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 3.11 El núcleo de la transformación nula $T : V \to W$ consta de todo V porque $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{v}$ en V. Es decir, $\text{Ker}(T) = V$.

Ejemplo 3.12 El kernel de la transformación identidad $T : V \to W$ consta sólo del elemento cero. Es decir, $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\} \subset V$.

Ejemplo 3.13 Se busca el núcleo de la proyección $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Esta transformación lineal proyecta el vector (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ en el vector $(x, y, 0)$ del plano xy.

Por consiguiente, el núcleo consta de todos los vectores que se encuentran sobre el eje z. Es decir, $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 3.14 Sea T una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, x_1)$$

Para encontrar $\text{Ker}(T)$ es necesario determinar todos los $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, x_1) = (0, 0, 0)$. Lo anterior conduce al siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & = 0 \\ 0 & & = 0 \\ x_1 & & = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es la trivial $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Por tanto, se tiene $N(T) = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.15 Se desea hallar el kernel de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El kernel de T es el conjunto de todos los $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$. A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Al escribir la matriz aumentada de este sistema en forma escalonada reducida se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 & = x_3 \\ x_2 & = -x_3 \end{cases}$$

Con el parámetro $t = x_3$ se obtiene la familia de soluciones

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el kernel de T es

$$\text{Ker}(T) = \{t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \text{gen}\{(1, -1, 1)\}.$$

El siguiente teorema nos da una característica del núcleo de una transformación lineal.

Teorema 3.6

El núcleo de la transformación lineal $T : V \to W$ es un subespacio del dominio V.

Demostración: Debemos probar que

1. $N(T) \subset V$.
2. $\mathbf{0}_V \in N(T)$ y por lo tanto, $N(T) \neq \emptyset$.
3. $N(T)$ es cerrado para la suma.
4. $N(T)$ es cerrado para la multiplicación por un escalar.

Veamos,

1. Por definición de núcleo, $N(T) \subset V$.
2. Como T es transformación lineal, para $\mathbf{0}_V \in V$ se cumple que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Luego, $\mathbf{0}_V \in N(T)$. Lo que implica que $N(T) \neq \emptyset$.
3. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores de $N(T)$, entonces

$$\begin{aligned} 1.\ T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W \\ &= \mathbf{0}_W \end{aligned}$$

   lo que implica que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector de $N(T)$.

4. Sea $\mathbf{u}$ un vector de $N(T)$ y c un escalar, entonces

$$\begin{aligned} 2.\ T(c\mathbf{u}) &= cT(\mathbf{u}) \\ &= c \cdot \mathbf{0}_W \\ &= \mathbf{0}_W \end{aligned}$$

   lo que implica que $c\mathbf{u}$ es un vector de $N(T)$. ■

A continuación, un teorema que asocia dos conceptos vistos.

Teorema 3.7

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es monomorfismo si y sólo si $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

El ejemplo 3.15 conduce a la siguiente propiedad

Propiedad 3.8

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces el núcleo de T es igual al espacio solución de $AX = 0$.

3.6.2. Imagen de una transformación lineal

Definición 3.7

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El conjunto de todos los vectores $\mathbf{w}$ en W tales que existe $\mathbf{v}$ en V para los cuales $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ se denomina imagen de T y se denota por $\mathrm{Im}(T)$.
En otras palabras,

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \wedge T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}.$$

Ejemplo 3.16 Sea $T : M_{3,2} \to M_{2,3}$ la transformación lineal que transforma una matriz A de tamaño 3×2 en su transpuesta. Es decir,

$$T(A) = A^T$$

Para determinar la imagen de T, consideremos una matriz cualquiera $A \in M_{3,2}$. Entonces, al aplicar la transformación se obtiene $T(A) = A^T$, que es una matriz de tamaño 2×3.

Dado que toda matriz en $M_{2,3}$ puede obtenerse como la transpuesta de alguna matriz en $M_{3,2}$, se concluye que la imagen de T es todo el espacio de llegada. Es decir,

$$\mathrm{Im}(T) = M_{2,3}.$$

Ejemplo 3.17 Sea $T : V \to W$ la transformación nula, es decir, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$ para todo $\mathbf{u} \in V$.

En este caso, todos los vectores del dominio son enviados al vector cero de W. Por lo tanto, la imagen de T consta únicamente de dicho vector. Es decir,

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{0}_W\}.$$

Ejemplo 3.18 Sea $T : V \to V$ la transformación identidad definida por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in V$.

Dado que cada vector se transforma en sí mismo, todos los elementos de V son imágenes de algún vector del dominio. En consecuencia,

$$\mathrm{Im}(T) = V.$$

Ejemplo 3.19 Se considera la proyección $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Para $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la transformación elimina la componente en la dirección del eje z, proyectando el vector sobre el plano xy.

Por lo tanto, la imagen está formada por todos los vectores del plano xy. Es decir,

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 3.20 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, x_1).$$

Un vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ está en la imagen de T, si existe (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x_1, x_2) = (a, b, c).$$

A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & = a \\ & 0 & = b \\ x_1 & & = c \end{cases}$$

Buscamos los valores de a, b, c para los cuales el SEL tiene solución.

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & c \end{array}\right].$$

Que resulta equivalente por filas a la matriz escalonada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

Por lo tanto, la única condición para que el sistema tenga solución es que

$$b = 0$$

En consecuencia, la imagen de T es

$$\text{Im}(T) = \{(a, b, c) : b = 0\} = \{(a, 0, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(1, 0, 0) + c(0, 0, 1) : a, c \in \mathbb{R}\} = \text{gen}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

De esta última ecuación podemos determinar que una base para la imagen de T es

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

y que

$$\dim(\text{Im}(T)) = 2.$$

Ejemplo 3.21

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Un vector (a, b) de $\mathbb{R}^2$ está en la imagen de T, si existe (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x_1, x_2, x_3) = (a, b).$$

A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = a \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = b \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \end{array}\right].$$

Que resulta equivalente por filas a la matriz escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \end{array}\right].$$

No aparece ninguna restricción sobre a y b, por lo que el sistema siempre tiene solución.

Por tanto, la imagen de T es

$$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2.$$

Teorema 3.9

La imagen de una transformación lineal $T : V \to W$ es un subespacio de W.

A continuación, un teorema que asocia dos conceptos vistos.

Teorema 3.10

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es epimorfismo si y sólo si $Im(T) = W$.

3.6.3. Rango y nulidad

Asociados con los conceptos de núcleo e imagen, tenemos la nulidad y el rango de una transformación lineal.

Definición 3.8

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

- La dimensión del núcleo de T se llama nulidad de T y se denota $\mathrm{null}(T)$.
- La dimensión de la imagen de T se denomina rango de T y se denota $\mathrm{rg}(T)$.

Importante: La dimensión del espacio formado sólo por el vector nulo es cero.

Ejemplo 3.22 Con lo visto entre los ejemplos 3.10 y 3.21 se tiene que

Transformación lineal		**N(T)**	**null**(T)	**Im**(T)	**rg**(T)	**dim. conj. partida**
$T : \mathcal{M}_{3\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$	$T(A) = A^T$	$\{O_{3\times 2}\}$	0	$\mathcal{M}_{2\times 3}$	6	6
$T : V \to W$	$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	V	$\dim(V)$	$\{\mathbf{0}\}$	0	$\dim(V)$
$T : V \to V$	$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$	$\{\mathbf{0}\}$	0	V	$\dim(V)$	$\dim(V)$
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\}$	1	$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$	2	3
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$T\begin{pmatrix} x_1 \\ , x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$	$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$	0	$\left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}\right\}$	2	2
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$	1	$\mathbb{R}^2$	2	3

Estos conceptos se relacionan en el siguiente teorema.

Teorema 3.11: Teorema de la dimensión

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V n-dimensional a un espacio vectorial W. Entonces,

$$\mathrm{rg}(T) + \mathrm{null}(T) = \dim(V).$$

Es decir,

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(V).$$

En el ejemplo anterior se puede verificar el teorema de la dimensión.