

## 3.0 INTRODUCCIÓN A ESPACIOS VECTORIALES

LCC



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD  
DE INGENIERÍA

## Definición

Sea  $V$  un conjunto no vacío y  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales. Se definen las operaciones:

- Adición:  $+ : V \times V \rightarrow V$  /  $+(u, v) = w = u + v$
- Multiplicación por escalar:  $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  /  $\cdot(k, v) = w = k \cdot v$

Los “vectores” son los elementos de  $V$  y los escalares son números reales.

## Propiedad

*Si en el conjunto  $V$  se ha definido la operación adición, dicha operación puede cumplir las siguientes propiedades:*

- *Asociativa: Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  son elementos cualesquiera de  $V$  entonces*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

- *Conmutativa: Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son elementos cualesquiera de  $V$  entonces:*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

- *Identidad: Existe  $\mathbf{0} \in V$  tal que para todo  $\mathbf{v} \in V$  se cumple que:*

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

- *Opuestos: Para todo  $\mathbf{v} \in V$  existe  $-\mathbf{v} \in V$  tal que:*

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

## Propiedad

*Si en el conjunto  $V$  se ha definido la operación multiplicación por un escalar  $\mathbb{R}$ , dicha operación puede cumplir las siguientes propiedades:*

- *Distributiva: Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  elementos cualesquiera de  $V$  y  $k$  un escalar, entonces:*

$$k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \mathbf{u} + k \mathbf{v}$$

- *Para todo  $k_1$  y  $k_2$  de  $\mathbb{R}$  y cualquier  $\mathbf{u}$  de  $V$  entonces:*

$$(k_1 + k_2) \cdot \mathbf{u} = k_1 \cdot \mathbf{u} + k_2 \cdot \mathbf{u}$$

- *Asociatividad mixta: Para todo  $k_1$  y  $k_2$  de  $\mathbb{R}$  y cualquier  $\mathbf{u}$  de  $V$  entonces:*

$$(k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbf{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{u}) = k_2 \cdot (k_1 \cdot \mathbf{u})$$

- *Propiedad modular: Existe  $1 \in \mathbb{R}$  que para todo  $\mathbf{u} \in V$  cumple:*

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

## Definición

Sea  $V \neq \emptyset$ , con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar de  $\mathbb{R}$ .  $V$  es un **ESPACIO VECTORIAL REAL** si

1. La adición en  $V$ , verifica las propiedades:
  - Asociativa
  - Conmutativa
  - Existencia de elemento neutro para la suma
  - Existencia de elementos opuestos para la suma
2. La multiplicación por un escalar, verifica las propiedades:
  - Distributiva de multiplicación por un escalar respecto de la adición
  - Distributiva de la adición de escalares respecto de la multiplicación por un elemento de  $V$
  - Asociatividad mixta
  - Propiedad modular.

## Ejemplo

- $V = \mathbb{R}^2$  con la suma de vectores definida componente a componente y la multiplicación por escalar de  $\mathbb{R}$  (el escalar multiplica a cada componente del vector).
- $V$  el conjunto de las funciones reales continuas en su dominio  $[a, b]$ , con la suma usual de funciones y la multiplicación por un escalar
- $V$  es el conjunto de  $\mathcal{M}$ , de matrices  $5 \times 7$ , con la adición usual de matrices y multiplicación por un escalar.

# Subespacios vectoriales

## Definición

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $S \neq \emptyset$ , un subconjunto de  $V$ . Se dice que  $S$  es subespacio (vectorial) de  $V$  si:

- $0 \in S$ , siendo  $0$  el elemento identidad de la adición en  $V$ .
- Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  están en  $S$  entonces  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$ .
- Si  $\mathbf{u} \in S$  y  $k$  es un escalar real cualquiera, entonces  $k\mathbf{u} \in S$ .

## Observaciones:

- La primera condición de la lista anterior está implícita en la última, pero la enunciamos separada por practicidad en el análisis.
- Las tres condiciones pueden sintetizarse en:

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son de  $S$  y  $k_1, k_2$  son de  $\mathbb{R}$ , entonces  $(k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}) \in S$ .

- Algunos textos definen al subespacio como un subconjunto no vacío de un EV que es espacio vectorial por sí mismo. Es equivalente a la definición dada.

# Combinación lineal (CL)

## Definición

Si  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  son vectores de un espacio vectorial  $V$  y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son escalares reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

es **una combinación lineal** de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

## Ejemplo

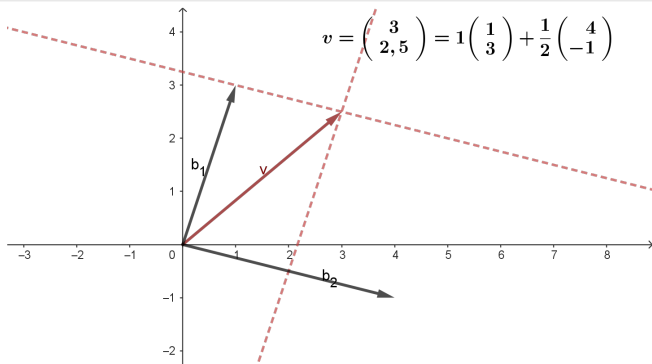
Sean  $\mathbf{v}_1 = (2, 3, -5)$  y  $\mathbf{v}_2 = (-4, 0, 2)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ :

- $2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2$  es una CL de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  que da el vector  $(8, 6, -12)$ .
- $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$  es una CL de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  que da el vector  $(0, 0, 0)$ .

# Combinación lineal (CL)

## Ejemplo

El vector  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$  es CL de los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  porque existen los escalares reales 1 y  $\frac{1}{2}$  tales que:  $1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ .



# Conjunto Generador y Conjunto Linealmente Independiente

## Definición

Un conjunto de vectores  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  en un espacio vectorial  $V$  se llama **conjunto generador** de  $V$  si cada vector de  $V$  se puede escribir como CL de los vectores de  $V$ .

**Observación:** Que cada vector de  $V$  se pueda escribir como CL de vectores de  $B$  quiere decir que para cada vector  $\mathbf{w} \in V$  existen coeficientes que hagan que se cumpla la igualdad:  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$ .

## Ejemplo

El conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $B = \{(1, 3), (4, -1)\}$  genera a  $\mathbb{R}^2$ . ¿Cómo lo comprobaría?

## Ejemplo

El conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , genera a  $\mathbb{R}^2$ .

## Definición

Un conjunto de vectores  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  en un espacio vectorial  $V$  se llama **conjunto linealmente independiente** de  $V$  si la única CL que es igual al vector nulo de  $V$  es la que tiene todos los coeficientes 0.

## Ejemplo

El conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $B = \{(1, 3), (4, -1)\}$  es LI. ¿Cómo lo comprobaría?

## Ejemplo

El conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , es LI.

## Definición

Un conjunto de vectores  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  en un espacio vectorial  $V$  se llama **base de  $V$**  si cumple

1.  $B$  genera a  $V$ .
2.  $B$  es LI.

**Observación:** Trabajaremos con espacios vectoriales que tienen una cantidad finita de vectores en la base. Estos espacios se llaman *Espacios vectoriales de dimensión finita*.

## Ejemplo

1. El conjunto  $B = \{(1, 2), (3, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. El conjunto  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ .
3. El conjunto  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Las bases de los ejemplos 2 y 3 se denominan **base canónica** o **base estándar** de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente.
- Este resultado puede generalizarse a los espacios vectoriales  $n$ -dimensionales.

## Definición

Los vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

forman una base denominada *base canónica* o *base estándar* de  $\mathbb{R}^n$ .

## Ejemplo

1. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

es la base canónica para las matrices de orden 2,  $M_{2,2}$ .

2. La base canónica para las matrices de tamaño  $m \times n$ ,  $M_{m,n}$ , es el conjunto de las distintas matrices de tamaño  $m \times n$  que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos igual a 0.
3. El conjunto  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$  es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado 3,  $P_3$ .
4. El conjunto  $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$  es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado  $n$ ,  $P_n$ .

## Teorema

*Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de un EV  $V$ , entonces todo vector en  $V$  puede escribirse de una y sólo de una forma como CL de vectores de  $B$ .*

## Teorema

- *Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de un espacio vectorial  $V$ , entonces todo conjunto que contiene más de  $n$  vectores en  $V$  es LD.*
- *Si un espacio vectorial tiene una base con  $n$  vectores, entonces toda base de  $V$  tiene  $n$  vectores.*

# DIMENSIÓN

## Definición

Sea  $V$  un EV que tiene una base con  $n$  vectores, el número  $n$  se denomina dimensión de  $V$  y se denota como  $\dim(V) = n$ .

Si  $V = \{0\}$ , entonces  $\dim(V) = 0$ .

## Ejemplo

1. La dimensión de  $\mathbb{R}^n$  con las operaciones estándar es  $n$ .
2. La dimensión de  $P_n$  con las operaciones estándar es  $n + 1$ .
3. La dimensión de  $M_{m,n}$  con las operaciones estándar es  $m \cdot n$ .

## Teorema

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $B \in V$ .

- Si  $B$  tiene  $n$  vectores linealmente independientes, entonces  $B$  es una base de  $V$ .
- Si  $B$  tiene  $n$  vectores que generan a  $V$ , entonces  $B$  es una base de  $V$ .

## Definición

Sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de un EV  $V$  y sea  $x$  un vector de  $V$  tal que

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

Los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  se denominan coordenadas de  $x$  con respecto a la base  $V$ . El vector de coordenadas con respecto a  $V$  es la matriz columna en  $\mathbb{R}^n$  cuyas componentes son las coordenadas de  $x$ . Es decir,

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Determinemos el vector de coordenadas de  $x = (-2, 1, 3)$  en  $\mathbb{R}^3$  con respecto a la base canónica. Como

$$x = (-2, 1, 3) = -2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

el vector de coordenadas de  $x$  respecto a la base canónica es simplemente

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Con respecto a la base  $B = \{(1, 0), (1, 2)\}$  sabemos que

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hallemos las coordenadas de  $x$  con respecto a la base canónica. Sabemos que

$$\mathbf{x} = 3(1, 0) + 2(1, 2) = (5, 4)$$

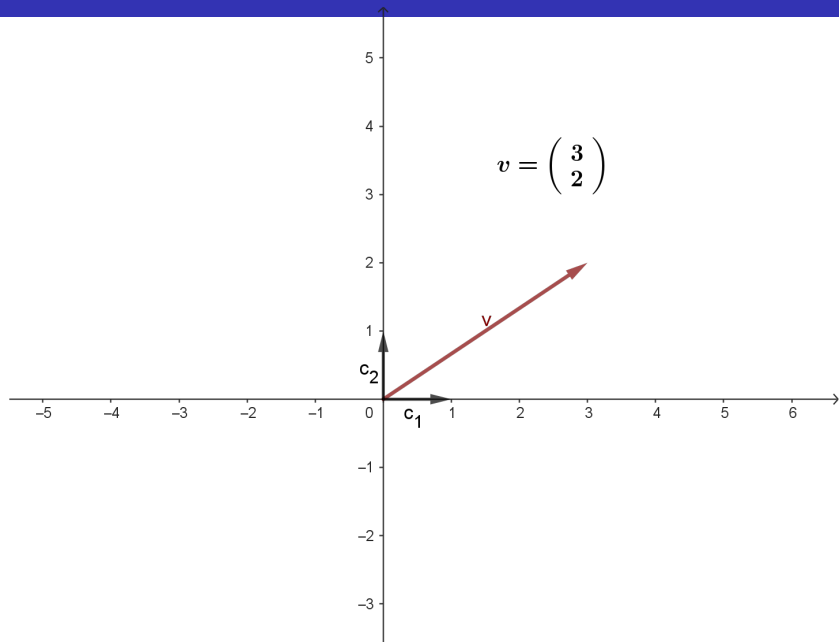
Es fácil notar que,

$$(5, 4) = 5(1, 0) + 4(0, 1)$$

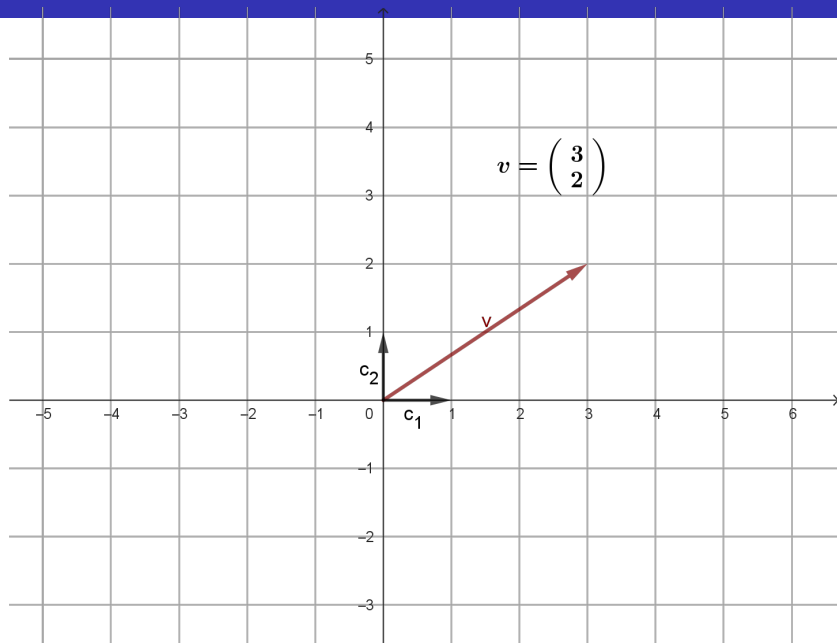
Así, el vector de coordenadas de  $x$  respecto a la base canónica es

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

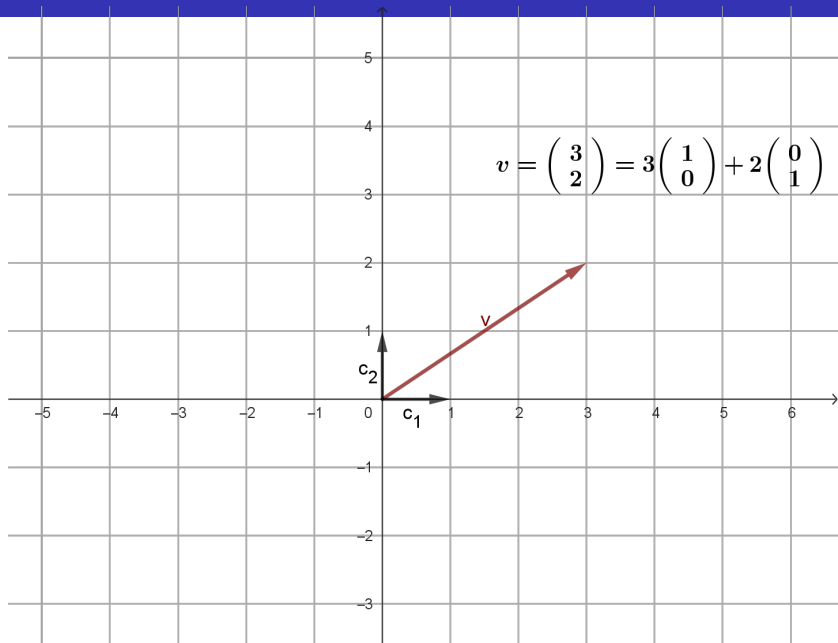
# EJEMPLAZO

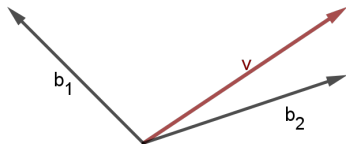


# EJEMPLAZO

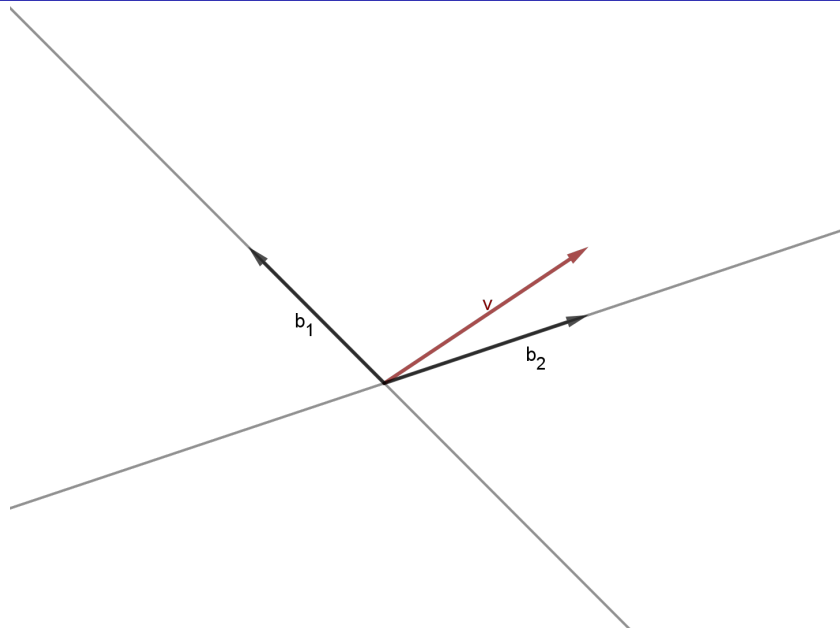


# EJEMPLAZO

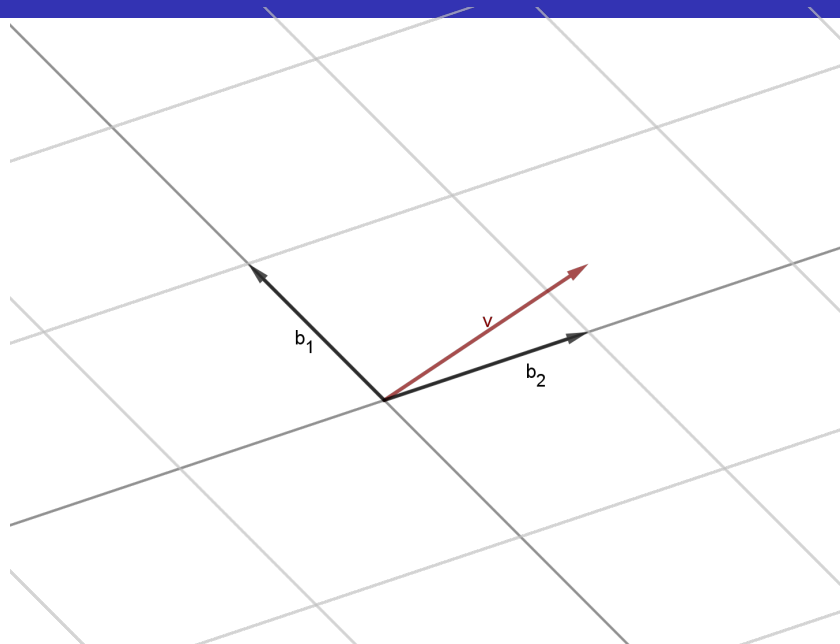




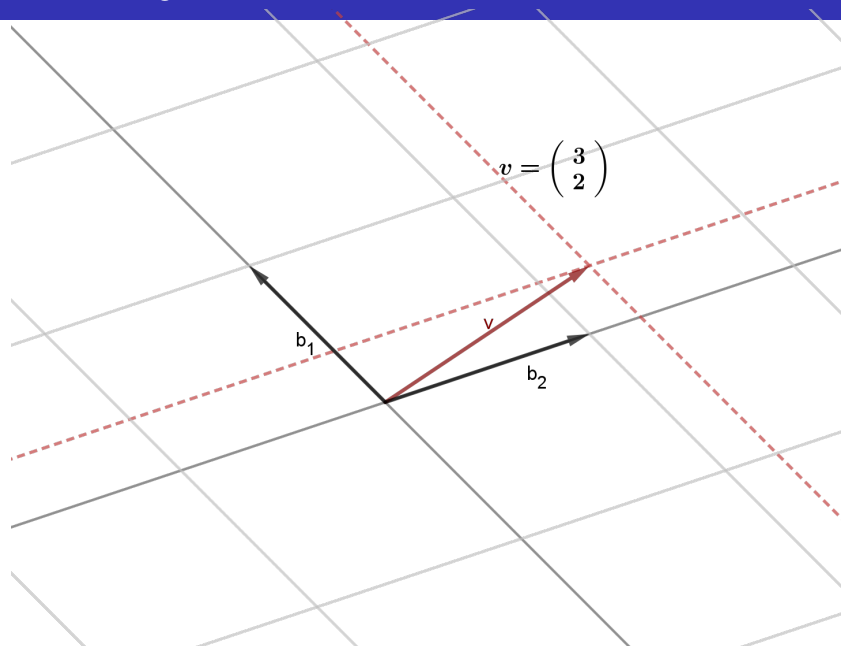
# EJEMPLAZO



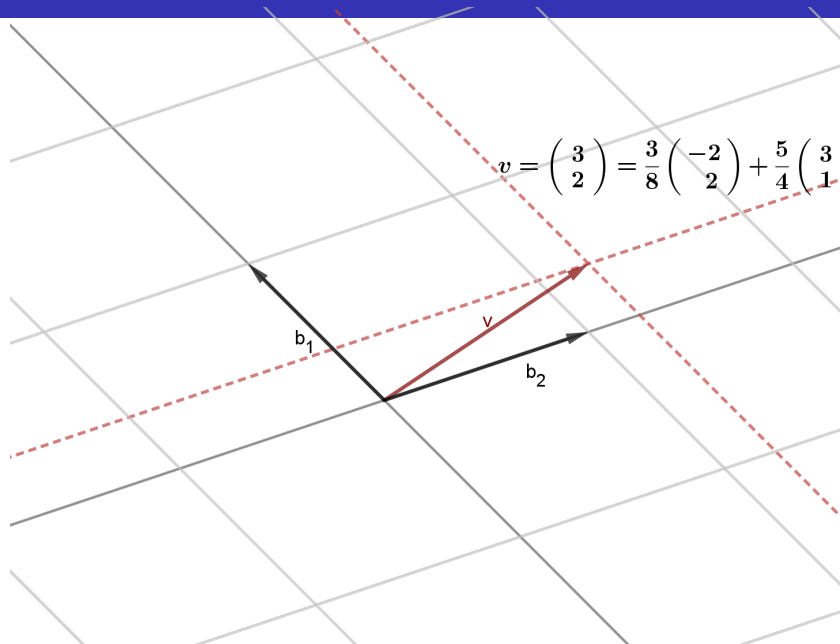
# EJEMPLAZO



# EJEMPLAZO



# EJEMPLAZO



## Ejemplo

De acuerdo a lo analizado en otros ejemplos (ver CL), las coordenadas del vector  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$  con respecto a la base  $B = \{(1, 3), (4, -1)\}$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{porque} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5/2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y si buscamos sus coordenadas con respecto a la base canónica, es fácil notar que,

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el vector de coordenadas de  $\mathbf{v}$  respecto a la base canónica es

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Si se tiene el vector  $[\mathbf{w}]_{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ . ¿Cuáles son sus coordenadas respecto a la base  $B = \{(1, 0), (1, 2)\}$ ?