

## 3.1 TRANSFORMACIONES LINEALES

INGENIERÍA Y LCC



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD  
DE INGENIERÍA

Esta presentación es sólo una guía para la clase de Álgebra que utilizamos los docentes. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

Puede resultar de apoyo para estudiar, pero de ninguna forma es la bibliografía principal de la materia ni abarca todos los contenidos a estudiar.

- 1 Transformaciones lineales
- 2 Propiedades
- 3 Transformaciones lineales y bases
- 4 Condiciones equivalentes para  $A$  de orden  $n$
- 5 Transformaciones Geométricas en el plano
- 6 Núcleo y sus propiedades
- 7 Imagen
- 8 Rango y nulidad

## Definición

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales. La función  $T : V \rightarrow W$  se llama transformación lineal de  $V$  en  $W$  si para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  y  $c \in \mathbb{R}$  se cumple

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

- Si se cumplen estas operaciones, se dice que  $T$  *preserva la suma* y *preserva el producto por un escalar*.

- Para un vector de  $\mathbb{R}^n$  correspondería escribir  $T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$  pero

utilizaremos una notación más cómoda:  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

## Ejemplo

Determinar si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$  es una transformación lineal.

## Ejemplo

Determinar si  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$  es una transformación lineal.

## Ejemplo

Determinar si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = y + 1$  es una transformación lineal.

## Definición

Una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$  se denomina operador lineal o endomorfismo.

## Ejemplo

Las siguientes transformaciones lineales, son operadores lineales:

- $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / T(x) = 5x.$
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 3y - x \end{pmatrix}.$

## Definición

- Una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  es monomorfismo si para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \text{ implica que } T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$$

.

- Una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  es epimorfismo si para todo  $\mathbf{w} \in W$  existe  $\mathbf{v} \in V$  tal que  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ .
- Una transformación lineal es isomorfismo si es monomorfismo y epimorfismo.
- Una transformación lineal es automorfismo si es endomorfismo y es isomorfismo.

## Ejemplo

- 1 La *transformación cero o nula* es la transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  definida como  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ .
- 2 La *transformación identidad* es la transformación lineal  $T : V \rightarrow V$  definida como  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ .
- 3 La *transformación matricial* es la transformación lineal de la forma

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_{m \times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

siendo  $A$  una matriz fija de orden  $m \times n$ .

**Notación:** Se suele escribir esta transformación como  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

Vamos a demostrar que la transformación matricial es TL

## Propiedad

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ , donde  $A$  es una matriz fija. Entonces  $T$  es una transformación lineal.

**Demostrar**

## Propiedad

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces:

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
- $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$
- $T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{v}_p)$

**Demostrar**

## Teorema

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Sea  $\dim(V) = \dim(W) = n$ . Decimos que  $T$  es monomorfismo si y sólo si  $T$  es epimorfismo.

## Teorema

Sean  $V, W$  espacios vectoriales y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base de  $V$  y sea  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  un subconjunto de vectores de  $W$ . Entonces existe, y es única, la transformación  $T$  tal que para cada  $\mathbf{v}_i$  existe un  $\mathbf{w}_j$  que cumple

$$T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_j \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, m$$

**Observación:** En este teorema, los vectores  $\mathbf{w}_j$  se pueden repetir.

## Ejemplo

Dada  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$T(1, 0, 0) = (2, -1, 4), \quad T(0, 1, 0) = (1, 5, -2), \quad T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$$

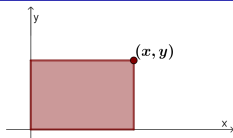
Hallar  $T(2, 3, -2)$  y  $T(x, y, z)$ .

## Teorema

Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Son equivalentes:

- 1  $A$  es inversible (o no singular).
- 2 La forma escalonada reducida de  $A$  es la  $I_n$ .
- 3  $\det(A) \neq 0$ .
- 4 El rango de  $A$  es  $n$ .
- 5  $AX = B$  es un SEL compatible determinado para toda matriz  $B$ ,  $n \times 1$ , con solución única  $X = A^{-1}B$ .
- 6  $AX = O$  es un SEL compatible determinado con solución única  $X = O$  (solución trivial).
- 7 La transformación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  es un isomorfismo.

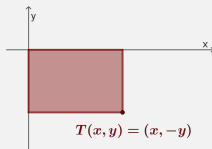
# Transformaciones Geométricas en el plano



Imagen

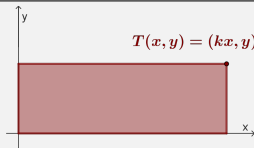
Matriz asociada

Reflexión a través del eje  $x$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dilatación o contracción  
en la dirección del eje  $x$



$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformaciones Geométricas en el plano

Otras transformaciones Geométricas en el plano son

- 1 Reflexión a través del eje  $y \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 2 Reflexión sobre la recta  $y = x \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 3 Reflexión sobre la recta  $y = -x \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- 4 Reflexión sobre la recta  $y = x \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- 5 Dilatación o contracción en la dirección del eje  $x \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 6 Dilatación o contracción en la dirección del eje  $y \rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

- 8 Corte o cizalladura horizontal  $\rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 9 Corte o cizalladura vertical  $\rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$
- 10 Rotación de ángulo en sentido positivo  $\rightsquigarrow$  Con matriz asociada  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

## Definición

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. El conjunto de todos los vectores en  $V$  que cumplen  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$  se denomina núcleo de  $T$  o kernel de  $T$  y se denota por  $N(T)$  o  $\text{Ker}(T)$ . Es decir,

$$N(T) = \text{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

## Ejemplo

Determinar el núcleo de la proyección  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

## Ejemplo

Determinar el kernel de la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

## Teorema

*El núcleo de una transformación lineal es un subespacio del dominio.*

## Demostrar

## Teorema

*Sea  $T$  una transformación lineal, entonces  $T$  es monomorfismo si y sólo si  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .*

## Propiedad

*Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la transformación lineal definida por  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Entonces el núcleo de  $T$  es igual al espacio solución de  $A\mathbf{X} = 0$ .*

## Definición

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. El conjunto de todos los vectores  $\mathbf{w}$  en  $W$  tales que existe  $\mathbf{v}$  en  $V$  para los cuales  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$  se denomina imagen de  $T$  y se denota por  $\text{Im}(T)$ . Es decir,

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \wedge T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}.$$

## Ejemplo

Determinar la imagen de la proyección  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

## Ejemplo

Determinar la imagen de la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x) = Ax$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

## Teorema

*La imagen de una transformación lineal es un subespacio del codominio.*

## Teorema

*Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces  $T$  es epimorfismo si y sólo si  $Im(T) = W$ .*

## Definición

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal.

- La dimensión del núcleo de  $T$  se llama nulidad de  $T$  y se denota  $\text{null}(T)$ .
- La dimensión de la imagen de  $T$  se denomina rango de  $T$  y se denota  $\text{rg}(T)$ .

## Ejemplo

Calcular la nulidad y rango de los ejemplos visto en núcleo e imagen.

## Teorema

Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal de un espacio vectorial  $V$   $n$ -dimensional a un espacio vectorial  $W$ . Entonces,

$$\text{rg}(T) + \text{null}(T) = \dim(V).$$

Es decir,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{N}(T)) = \dim(V).$$

## Ejemplo

Verificar el teorema de la dimensión para los ejemplos realizados en núcleo e imagen.