UNIDAD 3

Índice

2. Matriz Asociada a una Transformación Lineal

2.1. Vector de coordenadas

Comencemos con dos conceptos necesarios para lo que veremos en esta unidad. Recordemos las definiciones de base de un espacio vectorial y combinación lineal, según *Raichman, Silvia y Totter, Eduardo. "Geometría analítica para ciencias e ingenierías."(2016).*

Definición: Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial V si:

a) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es conjunto *linealmente independiente* (L.I.).

b) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es conjunto *generador* de V.

Definición: Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n$ vectores de un espacio vectorial V. Entonces, cualquier expresión de la forma: $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+...+k_n\boldsymbol{v}_n$, donde k_1, k_2, ..., k_n son escalares, se denomina *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$.

Y además, tomamos del mismo libro la definición de vector de coordenadas:

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sea $B=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ una base de V. Entonces, todo vector $\boldsymbol{v}$ de V puede expresarse de una *única* manera como combinación lineal de los vectores de la base, es decir: $\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+...+k_n\boldsymbol{v}_n$

Los escalares de la combinación lineal, k_1, k_2, ... , k_n, se denominan *coordenadas* de $\boldsymbol{v}$ respecto a la base B. El *vector de coordenadas* de $\boldsymbol{v}$ relativo a la base B se denota $(\boldsymbol{v})_B$:

$(\boldsymbol{v})_B=(k_1, k_2, ..., k_n)$

Observación: Note que las bases, usadas en este contexto tienen un orden en sus vectores necesario para poder dar estas definiciones, aunque no lo sea en el uso de las bases en general.

De ahora en adelante, en este apunte, los elementos de la base canónica son identificados por $e_1, e_2 \ldots, e_n$. Por ejemplo, si hablamos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, sus elementos son los tres vectores: e_1, e_2 y e_3, donde

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ y } e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Y el vector de coordenadas de un vector x respecto a una base B se denota como

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1 El vector de coordenadas de $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ en la base canónica $B_c = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, es $[\mathbf{u}]_{B_c} = \begin{bmatrix}-3\\7\end{bmatrix}$ puesto que

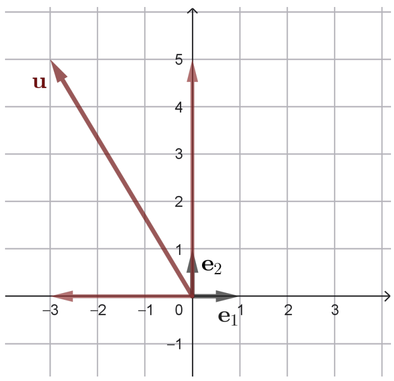
$$(-3, 7) = \mathbf{-3}(1, 0) + \mathbf{7}(0, 1)$$

Con el mismo vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, en la base $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ resulta

$$[\mathbf{u}]_{B_1} = \begin{bmatrix}5/7\\13/7\end{bmatrix}$$

ya que

$$(-3, 7) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}(1, 2) + \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{7}}(-2, 3).$$



2.2. Matriz asociada

Durante el desarrollo de este curso se trabajará con transformaciones lineales definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita.
Transformaciones de estas características, siempre tienen asociada una matriz. Recíprocamente, toda matriz de orden $m \times n$ define una transformación lineal de un espacio de dimensión n a otro de dimensión m.

La clave para representar una transformación lineal $T : V \to W$ por medio de una matriz es determinar cómo actúa T sobre una base ordenada de V. Una vez que se conoce la imagen de todo vector de la base, es posible aplicar las propiedades de las transformaciones lineales para determinar $T(\mathbf{v})$ para cualquier $\mathbf{v} \in V$.

Definición 2.1

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, T(\mathbf{e_n}) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $T(\mathbf{e_i})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se denomina matriz estándar de T o matriz asociada a T.

Teorema 2.1

Si A es la matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo 2.2 Hallemos la matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$$

Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica y los expresamos como vectores columnas.

$$T(\mathbf{e_1}) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T(\mathbf{e_2}) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, T(\mathbf{e_3}) = T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas, así

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) & T(\mathbf{e_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar, notando que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

lo que es equivalente a la fórmula de la función dada.

Ejemplo 2.3 La matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, 0)$$

es

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.4 Sea $T : P_1 \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = xp(x).$$

Aquí, P_k, con $k \in \mathbb{N}$, designa al conjunto de polinomios de grado entre 0 y k. Así, P_2 contiene todos los polinomios de grado 0, 1 y 2.
Hallemos la matriz asociada a la transformación T, con respecto a las bases $B = \{1, x\}$ en el dominio y la base $B' = \{1, x, x^2\}$ en el codominio.

Con base en la definición de T se obtiene

$$T(1) = (x)(1) = x$$

$$T(x) = (x)(x) = x^2$$

Por simple observación, se pueden determinar el vector de coordenadas en la base B':

$$[T(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz para T con respecto a B y B' es

$$A = \begin{bmatrix} [T(1)]_{B'} & [T(x)]_{B'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usemos esta matriz.
Sea $\mathbf{u} = 1 - 2x$ un polinomio de P_1 podemos calcular $T(\mathbf{u})$ usando la matriz A.
Por observación, el vector de coordenadas de $\mathbf{u}$ con respecto a la base B es

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$[T(\mathbf{u})]_{B'} = A[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$T(\mathbf{u}) = 0(1) + 1(x) - 2(x^2) = x - 2x^2$$

Como verificación, hagamos el cálculo directo de $T(\mathbf{u})$ que resulta

$$T(\mathbf{u}) = T(1 - 2x) = x(1 - 2x) = x - 2x^2$$

Lo que verifica que los cálculos están bien realizados.

El próximo paso es hallar una matriz asociada a la transformación lineal, asociada a cualquier base, para ello utilizaremos vectores de coordenadas.

Definición 2.2

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ una base de V y B' una base de W Si

$$[T(\mathbf{v_1})]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v_2})]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, [T(\mathbf{v_n})]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $[T(\mathbf{v_i})]_{B'}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se denomina matriz asociada a T respecto a las bases B en el dominio y B' en el codominio.

Teorema 2.2

Si A es la matriz asociada a $T : V \to W$ respecto a las bases B en el dominio y B' en el codominio, entonces se verifica que

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

Ejemplo 2.5 Busquemos la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

con respecto a las bases

$$B = \{(1, 2), (-1, 1)\} \text{ y } B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

en el dominio y codominio, respectivamente.

Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$T(1, 2) = (3, 0) = 3(1, 0) + 0(0, 1) \Rightarrow [T(1, 2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(-1, 1) = (0, -3) = 0(1, 0) - 3(0, 1) \Rightarrow [T(-1, 1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas, así

$$A = \begin{bmatrix} [T(1, 2)]_{B'} & [T(-1, 1)]_{B'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

En el siguiente ejemplo, haremos uso de esta matriz.

Ejemplo 2.6 Usemos la matriz hallada en el ejemplo anterior para calcular $T(\mathbf{v})$ siendo $\mathbf{v} = (2, 1)$.

Con la base $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ podemos escribir

$$\mathbf{v} = (2, 1) = 1(1, 2) - 1(-1, 1)$$

de donde

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Así,

$$A[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

Como $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$, se obtiene que

$$T(\mathbf{v}) = 3(1, 0) + 3(0, 1) = (3, 3)$$

Podemos verificar este valor obtenido, calculando directamente $T(\mathbf{v})$ utilizando la definición de la función.

$$T(2, 1) = (2 + 1, 2{,}2 - 1) = (3, 3)$$

Observaciones:

- La matriz A asociada a la transformación, depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T, como todo espacio vectorial (excepto el espacio vectorial formado sólo por el cero) tiene más de una base, podemos asociar a una misma transformación lineal, más de una matriz.
- El hecho de que todo espacio vectorial admite infinitas bases, nos permite afirmar que a una misma transformación lineal tiene infinitas matrices asociadas.
- Muchas veces en los textos se habla de la matriz asociada a una transformación lineal y no se especifican las bases consideradas en el dominio y en el codominio, en dichos casos se entiende, por defecto, que las bases consideradas son las canónicas.
- En lo que sigue, si T es un endomorfismo (u operador lineal) y sólo se menciona una base, se asume que es la misma para dominio y codominio.

Ejemplo 2.7 Busquemos la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + z)$$

con respecto a las bases:

1. Canónica correspondiente en dominio y codominio.
2. Canónica en dominio y $B' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ en codominio.
3. $B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\}$ en dominio y canónica en codominio.
4. $B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\}$ en dominio y $B' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ en codominio.

1. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$T(1,0,0) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \Rightarrow [T(1,0,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(0,1,0) = (-2,0) = -2(1,0) + 0(0,1) \Rightarrow [T(0,1,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(0,0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow [T(0,0,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas, así

$$A = \big[[T(1,0,0)]_{B_c} \quad [T(0,1,0)]_{B_c} \quad [T(0,0,1)]_{B_c}\big] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$T(1,0,0) = (1,2) = 1(1,2) + 0(-1,1) \Rightarrow [T(1,0,0)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(0,1,0) = (-2,0) = -\frac{2}{3}(1,2) + \frac{4}{3}(-1,1) \Rightarrow [T(0,1,0)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$T(0,0,1) = (0,1) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(-1,1) \Rightarrow [T(0,0,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz B, colocando estos vectores como columnas, así

$$B = \big[\ [T(1,0,0)]_{B'} \quad [T(0,1,0)]_{B'} \quad [T(0,0,1)]_{B'}\ \big] = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$T(2,0,1) = (2,5) = 2(1,0) + 5(0,1) \Rightarrow [T(2,0,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T(0,2,1) = (-4,1) = -4(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow [T(0,2,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(1,2,1) = (-3,3) = -3(1,0) + 3(0,1) \Rightarrow [T(0,0,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz C, colocando estos vectores como columnas, así

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$T(2,0,1) = (2,5) = \frac{7}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(-1,1) \Rightarrow [T(2,0,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$T(0,2,1) = (-4,1) = -1(1,2) + 3(-1,1) \Rightarrow [T(0,2,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(1,2,1) = (-3,3) = 0(1,2) + 3(-1,1) \Rightarrow [T(0,0,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz D, colocando estos vectores como columnas, así

$$D = \begin{bmatrix} 7/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.8 Busquemos la matriz de la transformación lineal $T : M_{2\times 2} \to P_1$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d) + (b-c)x$$

con respecto a las bases:

1. Canónica correspondiente en dominio y codominio.
2. Canónica en dominio y $B' = \{1+x,\ 1-x\}$ en codominio.
3. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en dominio y canónica en codominio.
4. B en dominio y B' en codominio.

Antes de comenzar, se recuerdan las bases canónicas de cada espacio:

$$\begin{array}{cc} \text{Base canónica de } M_{2\times 2} & \text{Base canónica de } P_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} & \{1,\ x\} \end{array}$$

Ahora se comienza el desarrollo del ejemplo.

1. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica de $M_{2\times 2}$ y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base canónica de P_1.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow [T(\mathbf{e_1})]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \Rightarrow [T(\mathbf{e_2})]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x = 0 \cdot 1 - 1 \cdot x \Rightarrow [T(\mathbf{e_3})]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow [T(\mathbf{e_4})]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica del dominio y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$T(\mathbf{e_1}) = 1 = \tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x) \Rightarrow [T(\mathbf{e_1})]_{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e_2}) = x = \tfrac{1}{2}(1+x) - \tfrac{1}{2}(1-x) \Rightarrow [T(\mathbf{e_2})]_{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e_3}) = -x = -\tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x) \Rightarrow [T(\mathbf{e_3})]_{B'} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e_4}) = 1 = \tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x) \Rightarrow [T(\mathbf{e_4})]_{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base canónica de P_1.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - x = 1 \cdot 1 - 1 \cdot x \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x = 1(1+x) + 0(1-x) \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = 0 = 0(1+x)+0(1-x) \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = 1-x = 0(1+x)+1(1-x) \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 2 = 1(1+x)+1(1-x) \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Formamos la matriz D:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2.3. Matriz de cambio de base o matriz de transición

Vimos en la sección anterior, que la matriz asociada a una transformación lineal depende de las bases que consideremos.

Si tomamos una misma transformación lineal y consideramos dos bases en el dominio y dos en el codominio y hallamos las matrices asociadas respecto a diferentes bases en el dominio y diferentes bases en el codominio, es claro que esas matrices serán diferentes entre sí, aunque todas están asociadas a la misma transformación lineal.

La pregunta que nos queda es ¿existe alguna relación entre esas matrices asociadas a la misma transformación lineal?

Estudiaremos este asunto en lo que resta de la unidad.

Definición 2.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean B y B' dos bases diferentes de V.
Sea $Id : V \to V$ la transformación lineal identidad.
La matriz P asociada a Id con respecto a B en el dominio y B' en el codominio, es la matriz de cambio de base de B a B' (o matriz de transición de B a B').
Es decir,

$$[Id(\mathbf{x})]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

o, equivalentemente,

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

Ejemplo 2.9 Hallemos la matriz de cambio de base de B a B' con

$$B = \{(1,2),(-1,1)\} \text{ y } B' = \{(1,0),(0,1)\}$$

Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$Id(1,2) = (1,2) = 1(1,0)+2(0,1) \Rightarrow [(1,2)]_{B'} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$Id(-1,1) = (-1,1) = -1(1,0)+1(0,1) \Rightarrow [(-1,1)]_{B'} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Formamos la matriz P, colocando estos vectores como columnas

$$P = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$$

Teorema 2.3

Si P es la matriz de transición de una base B a una base B', entonces P es inversible y la matriz de transición de B' a B está dada por P^{-1}.

Demostración: Dado V un espacio vectorial de dimensión n y dos bases de V:

$$B = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}, \qquad B' = \{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\},$$

por definición, la matriz de transición P de la base B a la base B' cumple que para todo $\mathbf{v} \in V$:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P\,[\mathbf{v}]_B.$$

De manera análoga, existe una matriz Q de transición de B' a B tal que:

$$[\mathbf{v}]_B = Q\,[\mathbf{v}]_{B'}.$$

Sustituyendo la primera expresión en la segunda, obtenemos:

$$[\mathbf{v}]_B = Q\,(P\,[\mathbf{v}]_B) = (QP)\,[\mathbf{v}]_B.$$

Esto vale para todo $\mathbf{v} \in V$, es decir, para todo vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_B \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto:

$$QP = I_n.$$

De manera análoga, sustituyendo en el otro sentido:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P\,(Q\,[\mathbf{v}]_{B'}) = (PQ)\,[\mathbf{v}]_{B'},$$

y nuevamente, como esto vale para todo vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_B \in \mathbb{R}^n$, obtenemos:

$$PQ = I_n.$$

Hemos probado que existe una matriz Q tal que:

$$QP = PQ = I_n,$$

por lo tanto P es invertible y su inversa es precisamente Q.
En consecuencia, la matriz de transición de B' a B es P^{-1}. ■

Así, si la matriz de transición P de una base B a una base B' es la matriz P tal que

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

El teorema establece que la matriz P^{-1} es la matriz de transición de B' a B tal que

$$[\mathbf{x}]_B = P^{-1}[\mathbf{x}]_{B'}$$

Ejemplo 2.10 Según los resultados obtenidos en el Ejemplo 2.9, la matriz de cambio de base B a B' es $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Si queremos buscar ahora la matriz Q de cambio de base de B' a B, debemos buscar la imagen,

a través de la transformación $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de los vectores de la base B' (canónica de $\mathbb{R}^2$) y expresarlos como combinación lineal de los vectores de la base B.

$$Id(\mathbf{e_1}) = Id(1,0) = (1,0) \;=\; \frac{1}{3}(1,2) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1,1) \;\Rightarrow\; [Id(\mathbf{e_1})]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$Id(\mathbf{e_2}) = Id(0,1) = (0,1) \;=\; \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(-1,1) \;\Rightarrow\; [Id(\mathbf{e_2})]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Con esto, la matriz buscada $Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Ahora bien, si se hace el producto entre ambas matrices de cambio de base

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

también $QP = I_2$.

Por lo tanto, $Q = P^{-1}$, como se podía prever a partir del Teorema 2.3, se verifica que la matriz de transición de B' a B es la inversa de la matriz de transición de B a B'.

Ejemplo 2.11 Tomemos dos bases de P_2 (el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2).

$$B = \{1 + x,\ x + x^2,\ 1 + x^2\}, \qquad B' = \{1 - x,\ x,\ 1 + x + x^2\}.$$

Queremos hallar la matriz de transición P de B a B' y verificar el teorema calculando también P^{-1} como matriz de transición inversa.

1. Expresamos los vectores de B como combinación lineal de los de B'.

   - $$1 + x = a(1 - x) + b(x) + c(1 + x + x^2)$$
     $$= (a + c) + (-a + b + c)x + (c)x^2$$
     Igualando los coeficientes de ambos polinomios
     $$\begin{cases} a + c = 1 \\ -a + b + c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (a,b,c) = (1,2,0)$$
     Así, $[1 + x]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   - $$x + x^2 = a(1 - x) + b(x) + c(1 + x + x^2)$$
     $$= (a + c) + (-a + b + c)x + (c)x^2$$
     Igualando los coeficientes de ambos polinomios
     $$\begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b + c = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow (a,b,c) = (-1,-1,1)$$
     Así, $[x + x^2]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $$\begin{aligned} 1+x^2 &= a(1-x)+b(x)+c(1+x+x^2) \\ &= (a+c)+(-a+b+c)x+(c)x^2 \end{aligned}$$
  Igualando los coeficientes de ambos polinomios
  $$\begin{cases} a+c=1 \\ -a+b+c=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(0,-1,1)$$
  Así, $[1+x^2]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Formamos la matriz de transición P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ahora expresamos los vectores de B' en términos de B para hallar la matriz de transición inversa.

- $$\begin{aligned} 1-x &= a(1+x)+b(x+x^2)+c(1+x^2) \\ &= (a+c)+(a+b)x+(b+c)x^2 \end{aligned}$$
  Comparando coeficientes,
  $$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b=-1 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(0,-1,1)$$
  Así, $[1-x]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $$\begin{aligned} x &= a(1+x)+b(x+x^2)+c(1+x^2) \\ &= (a+c)+(a+b)x+(b+c)x^2 \end{aligned}$$
  Comparando coeficientes,
  $$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=1 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$
  Así, $[x]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$
-

$$\begin{aligned} 1+x+x^2 &= a(1+x)+b(x+x^2)+c(1+x^2) \\ &= (a+c)+(a+b)x+(b+c)x^2 \end{aligned}$$ Comparando coeficientes,

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b=1 \\ b+c=1 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Así, $[1+x+x^2]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Formamos la matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. Verificación del teorema.

   Calculamos:

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = I_3$$

   y también:

$$QP = I_3.$$

   Por lo tanto, $Q = P^{-1}$, verificando que la matriz de transición de B' a B es la inversa de la matriz de transición de B a B'.

2.4. Semejanza

Vimos que la matriz asociada de la transformación lineal $T : V \to V$ depende de la base de V. La matriz de T con respecto a una base B es diferente la matriz de T con respecto a otra base B'.

Uno de los problemas clásicos del álgebra lineal es saber si es posible hallar una base B tal que la matriz asociada a T con respecto a B sea diagonal. La solución de este problema se analiza más adelante. Se presentan ahora los fundamentos para resolver el problema.

Notación: Se sabe, por teorema 2.2.2, que si A es la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases B y B', entonces

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B$$

para toda $\mathbf{v} \in V$. Este hecho, lo representamos así

$$[\mathbf{v}]_B \xrightarrow{\quad A \quad} [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

Supongamos ahora que tenemos dos matrices asociadas a la transformación lineal respecto a bases diferentes:

- A: Matriz de T con respecto a B
- A': Matriz de T con respecto a B'

$$[\mathbf{v}]_B \xrightarrow{\quad A \quad} [T(\mathbf{v})]_B$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} \xrightarrow{\quad A' \quad} [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

y si además de ellas tenemos las matrices de transición entre esas bases:

- P: Matriz de transición de B' a B
- P': Matriz de transición de B a B'
  (Por teorema anterior, $P' = P^{-1}$)

Veamos cómo se relacionan todas estas matrices

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{v}]_B} \arrow[r, "A"] & {[T(\mathbf{v})]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[\mathbf{v}]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'"'] & {[T(\mathbf{v})]_{B'}}
\end{tikzcd}$$

Observe que en el diagrama anterior hay dos formas de llegar del vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ al vector de coordenadas $[T(\mathbf{v})]_{B'}$.

Una forma es *directa*, por medio de la matriz A' para obtener

$$A'[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

La otra forma es *indirecta*, por medio de las matrices P, A y P^{-1} para obtener

$$P^{-1}AP[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

Esto implica que

$$A' = P^{-1}AP$$

Este resultado vale en general y por eso se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.4

Sea $T : V \to V$ un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita. Si M es la matriz de T con respecto a la base B, N es la matriz de T con respecto a la base B' y P la matriz de transición de B' a B, entonces

$$N = P^{-1}MP$$

Ejemplo 2.12 Hallar la matriz A' de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (2x - 2y, -x + 3y)$$

con respecto a la base $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Con los procedimientos que se han detallado en ejemplos anteriores, el lector podrá determinar que:

La matriz estándar asociada a T es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de B' a la base canónica es

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es la matriz de transición de la base canónica a B'

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces con estas matrices, siguiendo el siguiente esquema, se puede obtener la matriz asociada a T respecto a B'

$$\begin{tikzcd}
[\mathbf{v}]_{B_c} \arrow[rr, "A"] & & {[T(\mathbf{v})]_{B'}} \arrow[d, "Q^{-1}"] \\
[\mathbf{v}]_{B'} \arrow[u, "Q"] \arrow[rr, "A'"'] & & {[T(\mathbf{v})]_{B_c}}
\end{tikzcd}$$

y es $$A' = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.13 Sean las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(-3, 2), (4, -2)\} \text{ y } B' = \{(-1, 2), (2, -2)\}.$$

Y sea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a la base B.

Se desea hallar A', la matriz de la transformación lineal respecto a la base B'.

La matriz de transición de B' a la base B es

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de la base B a B' es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de T respecto a B' es

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.14 Para la transformación lineal del ejemplo anterior, encontrar $[\mathbf{v}]_B$, $[T(\mathbf{v})]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ para el vector $\mathbf{v}$ cuyo vector de coordenadas es

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para hallar $[\mathbf{v}]_B$ se utiliza la matriz de transición P de B' a B.

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Para hallar $[T(\mathbf{v})]_B$ se premultiplica $[\mathbf{v}]_B$ por la matriz A

$$[T(\mathbf{v})]_B = A[\mathbf{v}]_B \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Para hallar $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ se premultiplica $[T(\mathbf{v})]_B$ por la matriz P^{-1}

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O, podemos premultiplicar $[\mathbf{v}]_{B'}$ por la matriz A'

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'[\mathbf{v}]_{B'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definición 2.4

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, se dice que B es semejante a A si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Teorema 2.5

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Entonces,

1. A es semejante a A.
2. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Demostración:

1. Para probar que A es semejante a sí misma, debemos encontrar una matriz inversible M tal que $A = M^{-1}AM$. Sea I_n la matriz identidad de orden n. Sabemos que I_n es inversible y que $I_n^{-1} = I_n$.

   Luego,

   $$\begin{aligned} I_n^{-1}AI_n &= I_nAI_n \\ &= A \end{aligned}$$

   Como existe la matriz identidad que satisface la definición, se concluye que A es semejante a A.

2. Por hipótesis, A es semejante a B, por lo tanto existe una matriz inversible P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Multiplicamos por P a la izquierda y por P^{-1} a la derecha en ambos miembros:

$$\begin{aligned} PBP^{-1} &= P(P^{-1}AP)P^{-1} \\ &= (PP^{-1})A(PP^{-1}) \\ &= I_nAI_n \\ &= A \end{aligned}$$

Sea $Q = P^{-1}$. Dado que P es inversible, Q también lo es, y su inversa es $Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$. Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos

$$A = Q^{-1}BQ$$

Como hemos encontrado una matriz invertible Q que relaciona B con A, entonces B es semejante a A.

3. Por hipótesis tenemos que

   a) A es semejante a B, es decir, existe P inversible tal que $B = P^{-1}AP$.

   b) B es semejante a C, es decir, existe Q inversible tal que $C = Q^{-1}BQ$.

   Sustituimos la expresión de B en la segunda igualdad:

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de la inversa de un producto, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, obtenemos:

$$C = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Como el producto de dos matrices inversibles PQ es también una matriz inversible, se cumple la definición de semejanza entre A y C. Por lo tanto, A es semejante a C. ■

Observaciones importantes:

- Como demuestra en la propiedad 2 del teorema anterior, si B es semejante a A, entonces A es semejante a B. Por lo tanto, tiene sentido decir simplemente que A y B son semejantes.

- Con la definición de matrices semajantes, el teorema 2.2.4 puede reescribirse como:

  Todas las matrices asociadas a un mismo operador lineal respecto a la misma base en dominio y codominio son matrices semejantes.

Ejemplo 2.15

- Se puede ver, del Ejemplo 2.12, que las matrices A y A' son semejantes dado que $A' = Q^{-1}AQ$ con

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mientras que, del Ejemplo 2.14, se puede concluir que las matrices A y A' son semejantes porque $A' = P^{-1}AP$ con

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.6

Sean A y B matrices semejantes de orden n. Entonces,

1. $\det(A) = \det(B)$.
2. $tr(A) = tr(B)$.
3. A^n es semejante a B^n, con $n \in \mathbb{N}$.
4. A^T es semejante a B^T.
5. Si A y B son inversibles, entonces A^{-1} es semejante a B^{-1}.

Demostración:

La hipótesis general dice que A y B son semejantes, es decir, existe una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}AP$.

1. Aplicando la propiedad del determinante de un producto resulta que

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

2. Usando la propiedad de la traza de un producto resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) \\ &= \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(A(PP^{-1})) \\ &= \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

3. Reescribiendo B^2 resulta que

$$\begin{aligned} B^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}A(I)AP \\ &= P^{-1}A^2P \end{aligned}$$

Como existe una matriz P (la misma que da la hipótesis), entonces A^2 es semejante a B^2.

4. Aplicando la propiedad de la traspuesta de un producto resulta que

$$\begin{aligned} B^T &= (P^{-1}AP)^T \\ &= P^T A^T (P^{-1})^T \\ &= P^T A^T (P^T)^{-1} \end{aligned}$$

Si definimos $M = (P^T)^{-1}$, entonces $M^{-1} = P^T$. Sustituyendo, queda $B^T = M^{-1}A^T M$, por lo que A^T es semejante a B^T.

5. Si A es inversible, B también lo es (pues $\det(A) = \det(B)$). Calculamos inversa en ambos lados de la relación original:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (P^{-1}AP)^{-1} \\ &= P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} \\ &= P^{-1}A^{-1}P \end{aligned}$$

Por lo tanto, A^{-1}es semajante a B^{-1} usando la misma matriz inversible P. ■