

3.2 MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

INGENIERÍA Y LCC



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

Esta presentación es sólo una guía para la clase de Álgebra que utilizamos los docentes. No incluye desarrollo completo de los temas abordados.

Puede resultar de apoyo para estudiar, pero de ninguna forma es la bibliografía principal de la materia ni abarca todos los contenidos a estudiar.

- 1 Repaso
- 2 Matriz estándar
- 3 Matriz asociada a una TL
- 4 Matriz de cambio de base
- 5 Semejanza

1 Repaso

2 Matriz estándar

3 Matriz asociada a una TL

4 Matriz de cambio de base

5 Semejanza

- Base de un espacio vectorial. Notación de vectores de la base canónica de un espacio vectorial V : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$

Transformaciones lineales

- Base de un espacio vectorial. Notación de vectores de la base canónica de un espacio vectorial V : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$
- Combinación lineal de vectores.

- Base de un espacio vectorial. Notación de vectores de la base canónica de un espacio vectorial V : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$
- Combinación lineal de vectores.
- Vector de coordenadas.
- Notación de vector de coordenadas: el vector de coordenadas de un vector x respecto a una base B se denota como

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Con respecto a la base canónica, el vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ tiene coordenadas:

$$[\mathbf{v}]_{B_C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dado que $\mathbf{v} = 3(1, 0) + 2(0, 1)$.

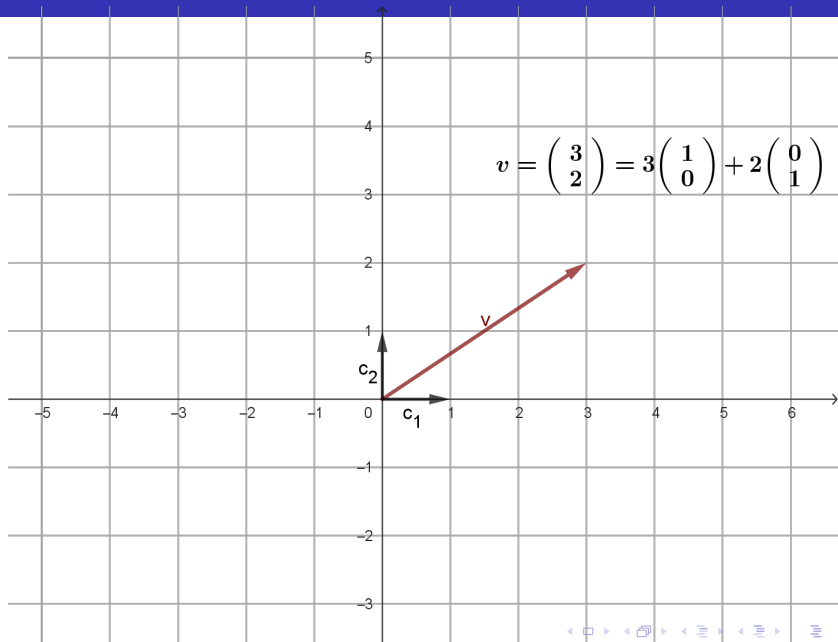
Mientras que

$$\mathbf{v} = \frac{3}{8}(-2, 2) + \frac{5}{4}(3, 1),$$

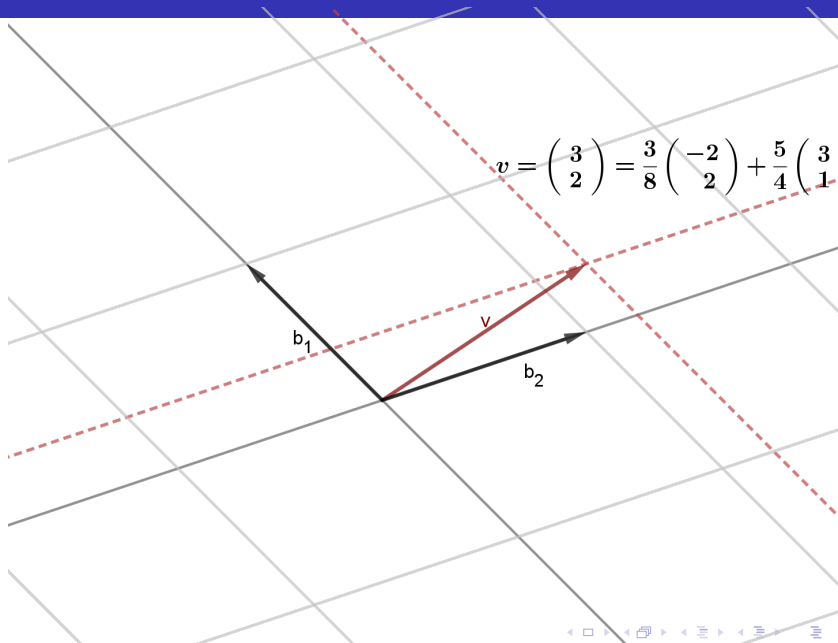
con lo que las coordenadas de \mathbf{v} con respecto a la base B :

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

EJEMPLAZO



EJEMPLAZO



- 1 Repaso
- 2 Matriz estándar**
- 3 Matriz asociada a una TL
- 4 Matriz de cambio de base
- 5 Semejanza

Definición

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $T(\mathbf{e}_i)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se denomina matriz estándar de T o matriz asociada a T .

La utilidad de la definición es el siguiente teorema.

Teorema

Si A es la matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

La utilidad de la definición es el siguiente teorema.

Teorema

Si A es la matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo

Hallemos la matriz estándar de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$$

- 1 Repaso
- 2 Matriz estándar
- 3 Matriz asociada a una TL**
- 4 Matriz de cambio de base
- 5 Semejanza

Matriz asociada a una TL

Definición

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal con $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V y B' una base de W . Si

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, [T(\mathbf{v}_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $[T(\mathbf{v}_i)]_{B'}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se denomina matriz asociada a T respecto a las bases B en el dominio y B' en el codominio.

Teorema

Si A es la matriz asociada a $T : V \rightarrow W$ respecto a las bases B en el dominio y B' en el codominio, entonces se verifica para todo $\mathbf{v} \in V$ que

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B.$$

Matriz asociada a una TL

Teorema

Si A es la matriz asociada a $T : V \rightarrow W$ respecto a las bases B en el dominio y B' en el codominio, entonces se verifica para todo $\mathbf{v} \in V$ que

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B.$$

Observación: En lo que sigue, si T es un endomorfismo y sólo se menciona una base, se asume que es la misma para dominio y codominio.

Ejemplo

Busquemos la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$ con respecto a las bases

$$B = \{(1, 2), (-1, 1)\} \text{ y } B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

en el dominio y codominio, respectivamente.

Usar la matriz hallada para calcular $T(2, 1)$.

Observaciones:

- La matriz A asociada a la transformación, depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T , como todo espacio vectorial (excepto el espacio vectorial formado sólo por el cero) tiene más de una base, podemos asociar a una misma transformación lineal, más de una matriz.

Observaciones:

- La matriz A asociada a la transformación, depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T , como todo espacio vectorial (excepto el espacio vectorial formado sólo por el cero) tiene más de una base, podemos asociar a una misma transformación lineal, más de una matriz.
- Muchas veces en los textos se habla de la matriz asociada a una transformación lineal y no se especifican las bases consideradas en el dominio y en el codominio, en dichos casos se entiende, por defecto, que las bases consideradas son las canónicas.

Observaciones:

- La matriz A asociada a la transformación, depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T , como todo espacio vectorial (excepto el espacio vectorial formado sólo por el cero) tiene más de una base, podemos asociar a una misma transformación lineal, más de una matriz.
- Muchas veces en los textos se habla de la matriz asociada a una transformación lineal y no se especifican las bases consideradas en el dominio y en el codominio, en dichos casos se entiende, por defecto, que las bases consideradas son las canónicas.
- Si A es la matriz asociada a la transformación lineal respecto de las bases B y B' , el hecho de que $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B$ para toda $\mathbf{v} \in V$ lo representamos así

$$[\mathbf{v}]_B \xrightarrow{A} [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

Ejemplo

Buscar la matriz de la transformación lineal $T : M_{2 \times 2} \rightarrow P_1$ definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d) + (b - c)x$$

con respecto a las bases:

- 1 Canónica correspondiente en dominio y codominio.
- 2 Canónica en dominio y $B' = \{1 + x, 1 - x\}$ en codominio.
- 3 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en dominio y canónica en codominio.
- 4 B en dominio y B' en codominio.

- 1 Repaso
- 2 Matriz estándar
- 3 Matriz asociada a una TL
- 4 Matriz de cambio de base**
- 5 Semejanza

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean B y B' dos bases diferentes de V .

Sea $Id : V \rightarrow V$ la transformación lineal identidad.

La matriz P asociada a Id con respecto a B en el dominio y B' en el codominio, es la matriz de cambio de base de B a B' (o matriz de transición de B a B'). Es decir,

$$[Id(\mathbf{x})]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

o

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean B y B' dos bases diferentes de V .

Sea $Id : V \rightarrow V$ la transformación lineal identidad.

La matriz P asociada a Id con respecto a B en el dominio y B' en el codominio, es la matriz de cambio de base de B a B' (o matriz de transición de B a B'). Es decir,

$$[Id(\mathbf{x})]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

o

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

Teorema

Si P es la matriz de transición de una base B a una base B' , entonces P es inversible y la matriz de transición de B' a B está dada por P^{-1} .

Demostrar.

Teorema

Si P es la matriz de transición de una base B a una base B' , entonces P es inversible y la matriz de transición de B' a B está dada por P^{-1} .

Demostrar.

Ejemplo

Hallar la matriz de cambio de base de B' a B con

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\} \text{ y } B' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$$

y verificar el teorema.

- 1 Repaso
- 2 Matriz estándar
- 3 Matriz asociada a una TL
- 4 Matriz de cambio de base
- 5 Semejanza**

Relación entre matrices asociadas

Teorema

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal sobre el e.v. V de dimensión finita.

- Si M es la matriz de T con respecto a la base B .
- N es la matriz de T con respecto a la base B' .
- P la matriz de transición de B' a B .

Entonces,

$$N = P^{-1}MP$$

$$[\mathbf{v}]_B \xrightarrow{M} [T(\mathbf{v})]_B$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} \xrightarrow{N} [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

Teorema

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal sobre el e.v. V de dimensión finita.

- Si M es la matriz de T con respecto a la base B .
- N es la matriz de T con respecto a la base B' .
- P la matriz de transición de B' a B .

Entonces,

$$N = P^{-1}MP$$

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{v}]_B & \xrightarrow{M} & [T(\mathbf{v})]_B \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ [\mathbf{v}]_{B'} & \xrightarrow{N} & [T(\mathbf{v})]_{B'} \end{array}$$

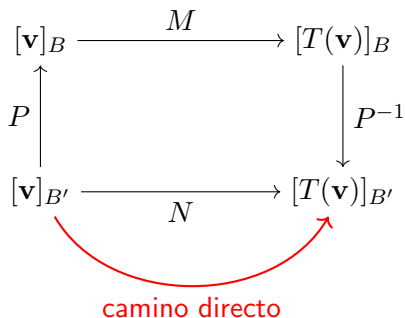
Diagrama

Del teorema se deduce el siguiente diagrama y los dos *caminos* posibles: el directo y el indirecto.

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{v}]_B & \xrightarrow{M} & [T(\mathbf{v})]_B \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ [\mathbf{v}]_{B'} & \xrightarrow{N} & [T(\mathbf{v})]_{B'} \end{array}$$

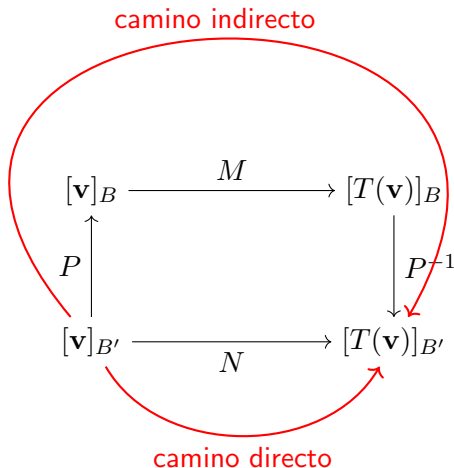
Diagrama

Del teorema se deduce el siguiente diagrama y los dos *caminos* posibles: el directo y el indirecto.



Diagrama

Del teorema se deduce el siguiente diagrama y los dos *caminos* posibles: el directo y el indirecto.



$$\begin{array}{ccc}
 [\mathbf{v}]_B & \xrightarrow{M} & [T(\mathbf{v})]_B \\
 \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\
 [\mathbf{v}]_{B'} & \xrightarrow{N} & [T(\mathbf{v})]_{B'}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (P^{-1}MP)[\mathbf{v}]_{B'} &= P^{-1}M(P[\mathbf{v}]_{B'}) \\
 &= P^{-1}M[\mathbf{v}]_B \\
 &= P^{-1}(M[\mathbf{v}]_B) \\
 &= P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B \\
 &= [T(\mathbf{v})]_{B'} = N[\mathbf{v}]_{B'}
 \end{aligned}$$

Definición

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n , se dice que B es semejante a A si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Definición

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n , se dice que B es semejante a A si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Teorema

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n . Entonces,

- 1 A es semejante a A .
- 2 Si A es semejante a B , entonces B es semejante a A .
- 3 Si A es semejante a B y B es semejante a C , entonces A es semejante a C .

Demostrar.

- Como demuestra en la propiedad 2 del teorema anterior, si B es semejante a A , entonces A es semejante a B . Por lo tanto, tiene sentido decir simplemente que A y B son semejantes.

- Como demuestra en la propiedad 2 del teorema anterior, si B es semejante a A , entonces A es semejante a B . Por lo tanto, tiene sentido decir simplemente que A y B son semejantes.
- Con la definición de matrices semejantes, el teorema que muestra la relación entre matrices asociadas puede reescribirse como:

Todas las matrices asociadas a un mismo operador lineal respecto a la misma base en dominio y codominio son matrices semejantes.

Teorema

Sean A y B matrices semejantes de orden n . Entonces,

- 1 $\det(A) = \det(B)$.
- 2 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
- 3 A^2 es semejante a B^2 .
- 4 A^T es semejante a B^T .
- 5 Si A y B son matrices inversible entonces A^{-1} es semejante a B^{-1} .

Demostrar.