

Análisis Matemático I

Clase 2: Clasificación de funciones (continuación) y operaciones con funciones. Introducción a límites.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2026

Objetivos de la clase 2:

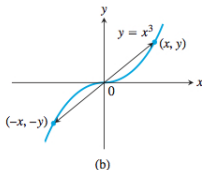
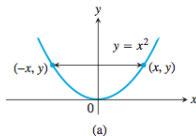
Continuamos con el objetivo anterior:

Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Clasificación de funciones en pares e impares

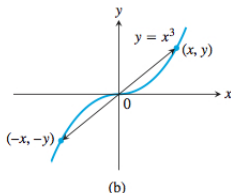
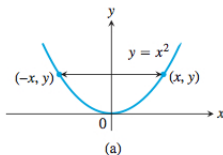
Funciones pares e impares

- Una función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f .
- Una función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f .



Clasificación de funciones en pares e impares

Observación: la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas



Dar otros ejemplos.

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es creciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es decreciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dar interpretación geométrica.

Función valor absoluto

La función $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se denomina función valor absoluto.

Realizar gráfico.

Observación: la función valor absoluto es un ejemplo de una función definida por partes. Veamos otro ejemplo: graficar la siguiente función definida por partes

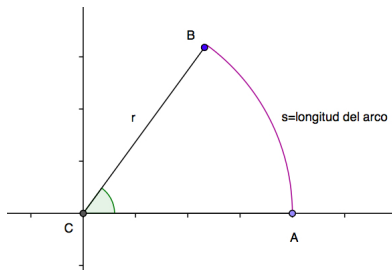
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Medición y orientación de ángulos

Medida en radianes

Sea ACB el ángulo que se desea medir. Sea r el radio de la circunferencia y s la longitud del arco determinado por el ángulo sobre la circunferencia. La medida del ángulo ACB en radianes es el cociente:

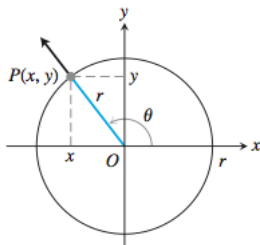
$$\frac{s}{r}.$$



Ejemplos: ángulos de un giro, de medio giro, etc. Recordar signos de ángulos (sentido horario y antihorario).

Funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas: suponemos $x \neq 0$ y $y \neq 0$.



seno: $\sin \theta = \frac{y}{r}$

cosecante: $\csc \theta = \frac{r}{y}$

coseno: $\cos \theta = \frac{x}{r}$

secante: $\sec \theta = \frac{r}{x}$

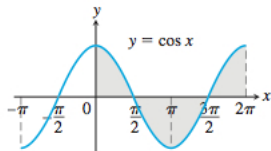
tangente: $\tan \theta = \frac{y}{x}$

cotangente: $\cot \theta = \frac{x}{y}$

Tarea: repasar páginas 25, 26, 27 y 28 del libro de texto (identidades trigonométricas y transformaciones de funciones trigonométricas.)

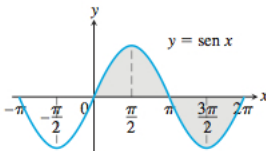
Gráficas de funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas



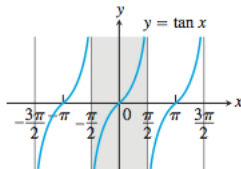
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(a)



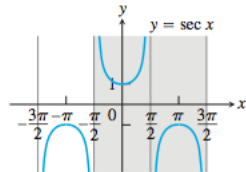
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(b)



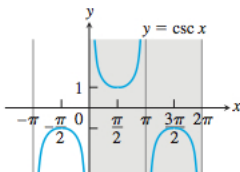
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(c)



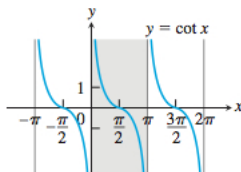
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(d)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(e)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(f)

Composición de funciones

Sean $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Observar que el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f .

Hacer diagramas de Venn para ilustrar la composición de funciones. Importante: no se hará uso explícito del dominio de la composición, aunque sí de su fórmula.

Ejemplo: dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Introducción al concepto de Límite y convergencia

Recordar que una de las descripciones del Cálculo es que es un conjunto de herramientas matemáticas que nos permite comprender cómo varían o cambian las funciones

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio.

Determinar:

- (1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s
- (2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio.

Determinar:

- (1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s
- (2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Solución:

- (1) Caída libre: la distancia recorrida por el objeto viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \text{ donde } g \approx 32ft/s^2.$$

Entonces la rapidez promedio durante los primeros 2 segundos es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = 32ft/s.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 \text{ ft/s}.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 \text{ ft/s}.$$

Problema 2: ¿Qué pasa si queremos calcular la rapidez promedio en un intervalo $[1, 1 + h]$?

Solución: longitud del intervalo: h . Entonces la rapidez promedio en el intervalo $[1, 1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1 + h) - y(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h}.$$

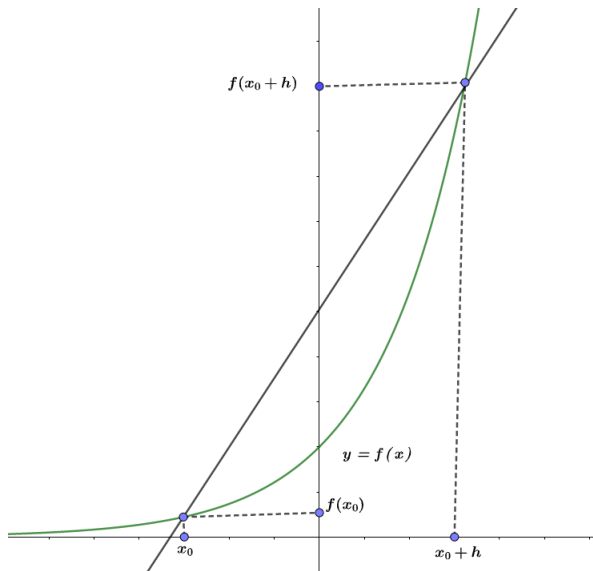
Tasa de cambio promedio

La tasa de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

.

Tasa de cambio promedio



Conclusión del gráfico: la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ es la pendiente de la recta secante al gráfico de f que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

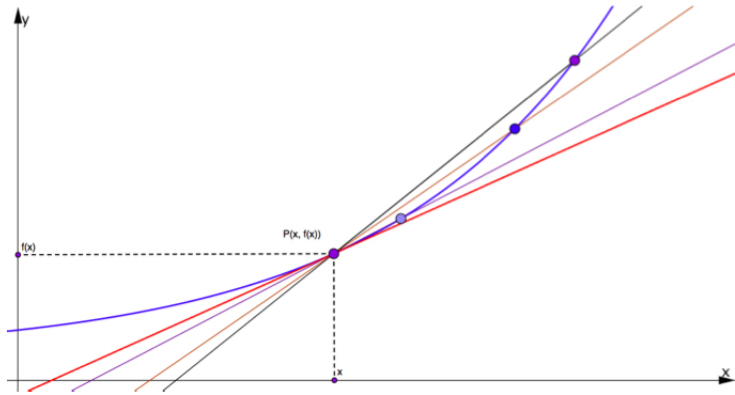
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

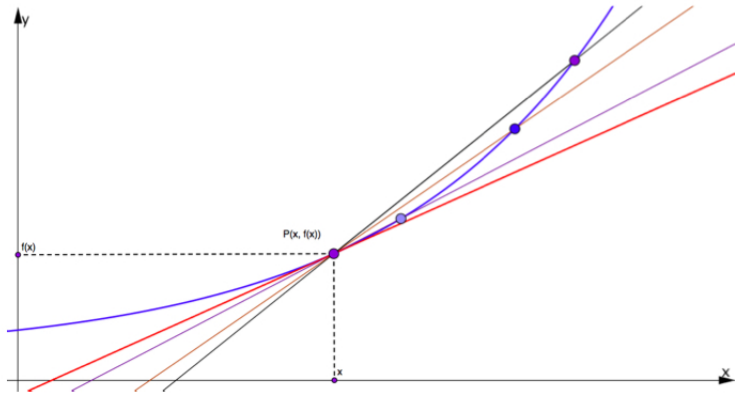
valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Así, podemos decir que para $t_0 = 1$, la tasa de cambio promedio de y con respecto a t tiende al valor 32 a medida que la longitud del intervalo $[1, 1 + h]$ tiende a cero (es decir, a medida que h tiende a 0.) **Decimos que 32 (ft/s) es la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t en $t_0 = 1$. Luego aprenderemos a calcular la rapidez instantánea en forma precisa.**

Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Conclusión

Tasa instantánea de f en $t_0 =$ pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(t_0, f(t_0))$.

Ejercicios:

1) Encuentre el dominio de

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

y luego de

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2) Dadas

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = x + 1,$$

determine la expresión de cálculo de:

1 $f \circ f$

2 $f \circ g$