

# Análisis Matemático I

## Clase 4: Cálculo de límites (continuación) y límites laterales. Continuidad y Discontinuidad.

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**  
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Marzo, 2026

## Teorema

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

## Teorema

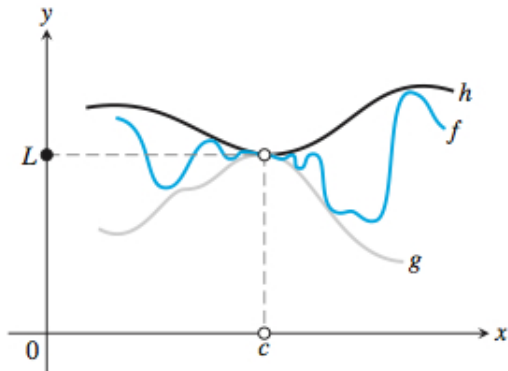
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo: calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = .$$

# Teorema de la Compresión

Comencemos con la siguiente situación:



# Teorema de la Compresión

## Teorema de la compresión.

Sea  $I$  un intervalo abierto que contiene a un punto  $c$ . Supongamos que  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x \neq c$  en  $I$ . Si:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

# Teorema de la compresión

**Ejemplo:** Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

# Teorema de la compresión

**Ejemplo:** Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

**Solución:** Observar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

# Teorema de la compresión

**Ejemplo:** Utilizando la siguiente información:

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|,$$

compruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

**Solución:** Observar que:

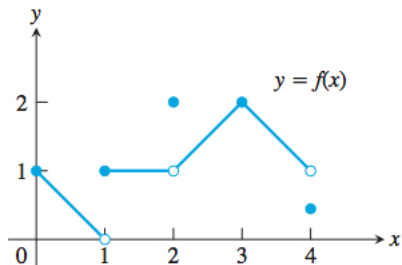
$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

luego el teorema de la compresión implica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

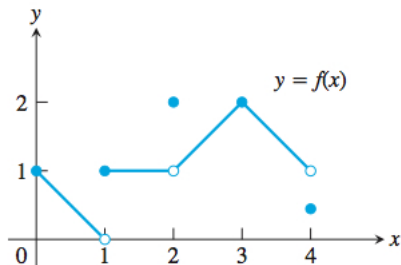
# Límites laterales

**Límites laterales:** considere la siguiente figura



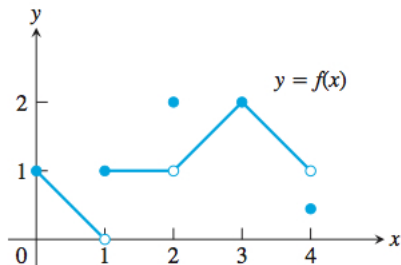
y observar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe.

**Límites laterales:** considere la siguiente figura



y observar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda?

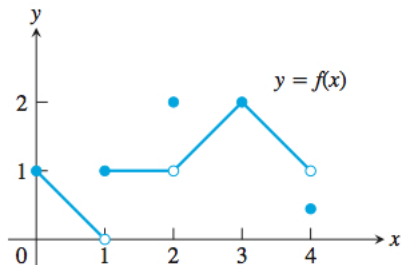
**Límites laterales:** considere la siguiente figura



y observar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda?

**Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda**

**Límites laterales:** considere la siguiente figura



y observar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda?

**Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 cuando  $x$  tiende a 1 por la izquierda**

¿Qué pasa con los valores de  $f$  cuando  $x$  tiende a 1 por la derecha?

Los límites anteriores, donde se estudia el comportamiento de  $f$  para  $x$  a un lado del punto de análisis  $x_0$ , se denominan límites laterales y se simbolizan:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

para el límite lateral de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  por derecha, y

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

para el límite lateral de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  por izquierda.

Para calcular límites laterales podemos aplicar las mismas técnicas que para los límites *usuales* vistos en la clase 3.

Para calcular límites laterales podemos aplicar las mismas técnicas que para los límites *usuales* vistos en la clase 3.

**Ejemplos (hacer el 2 y si sobra tiempo al final, el 1):**

1

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x - 5}{x^2 - 25} =$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4} =$$

La siguiente es una propiedad que vincula los conceptos de límite lateral y límite:

## Teorema

El límite:

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existe si y solo si los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

existen y son iguales a  $L$ .

# Continuidad

Analicemos la siguiente figura:

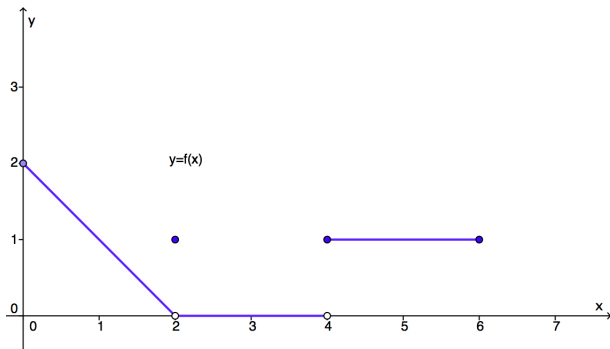


Figura: Introducción a Continuidad.

# Continuidad

Analicemos la siguiente figura:

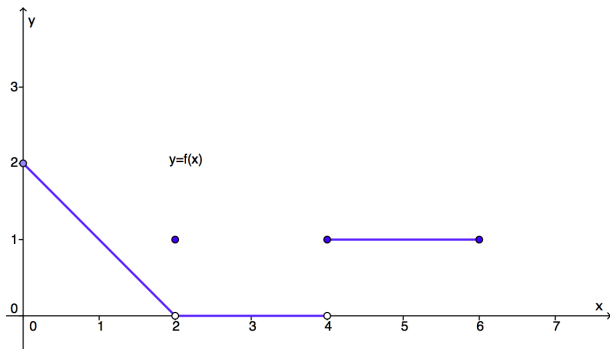


Figura: Introducción a Continuidad.

Más allá de que no hayamos definido el concepto de continuidad, diríamos que la función  $y = f(x)$  no es continua en el punto  $x = 2$  ni en  $x = 4$ .

Estudiemos cada caso:

- en  $x = 2$  tenemos que  $f(2) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ . Así, el comportamiento de  $f$  en  $x = 2$  no coincide con el comportamiento de  $f$  alrededor de  $x = 2$ .
- en  $x = 4$ , se observa que  $f(4) = 1$ , pero el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow 4$  no existe. La situación es peor que en el caso anterior.

De las situaciones anteriores, deducimos que la continuidad de una función en un punto  $x_0$  de su dominio se va a dar cuando el valor de  $f$  en  $x_0$  coincida con el comportamiento de  $f$  alrededor de  $x_0$ .

## Definición de continuidad

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$ . Decimos que  $f$  es continua en  $x = c$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Decimos que  $f$  es continua en  $(a, b)$  si y solo si  $f$  es continua en cada punto del intervalo  $(a, b)$ .

## Definición de continuidad

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$ . Decimos que  $f$  es continua en  $x = c$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Decimos que  $f$  es continua en  $(a, b)$  si y solo si  $f$  es continua en cada punto del intervalo  $(a, b)$ .

**Como se vio en la parte de límites, si  $P$  es una función polinómica, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Así, las funciones polinómicas son continuas en  $\mathbb{R}$ . La continuidad de las funciones racionales también se da en todo punto donde el denominador no sea cero. Gráficamente, también puede verse que las funciones seno y cos son continuas en  $\mathbb{R}$ .**

Ahora bien, ¿Qué pasa si el punto  $c$  donde analizamos la continuidad no es interior al dominio?

## Definición de continuidad por izquierda y por derecha

Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $[a, b]$ . Decimos que  $f$  es continua por derecha en  $x = a$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

De forma análoga, decimos que  $f$  es continua por izquierda en  $x = b$  si y solo si

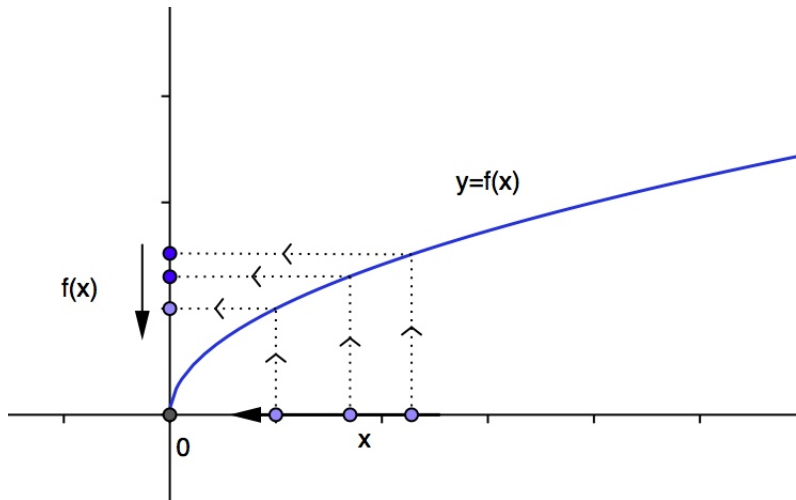
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

## Continuidad en intervalos cerrados

Decimos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  si y solo si  $f$  es continua en  $(a, b)$ , es continua por derecha en  $x = a$  y es continua por izquierda en  $x = b$ .

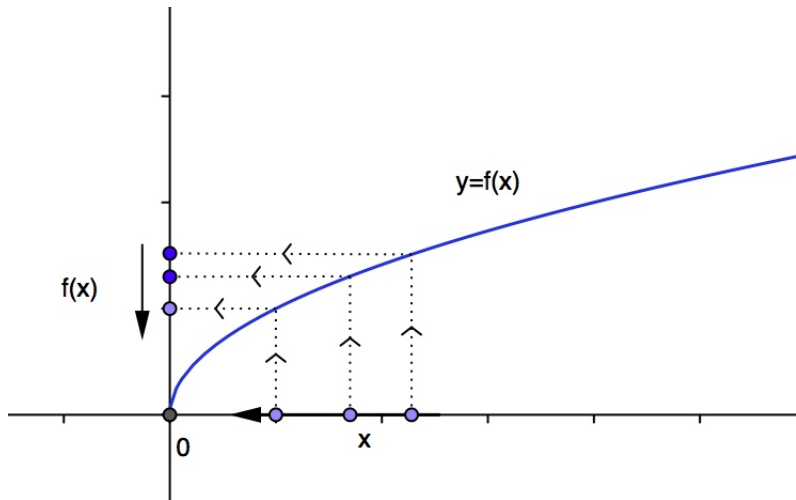
# Continuidad

La siguiente función es continua por derecha en  $x = 0$ :



# Continuidad

La siguiente función es continua por derecha en  $x = 0$ :



De hecho, la función  $f$  es continua en  $[0, \infty)$ .

## Teorema

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x = c$ . Entonces las siguientes funciones son continuas en  $x = c$ :

- las funciones suma  $f + g$  y diferencia  $f - g$ ;
- las funciones multiplicación por constante  $k.f$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) y producto  $f.g$ ;
- la función cociente  $f/g$ , siempre que  $g(c) \neq 0$ ;
- la función potencia  $f^n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ ,
- la función raíz  $\sqrt[n]{f}$ , siempre que esté definida en un intervalo que contiene a  $c$ .

Ejemplificaremos esto en las próximas diapositivas.

## Concepto de discontinuidad

Si una función  $f$  no es continua en un punto  $c$ , entonces decimos que  $f$  es discontinua en  $c$  y que  $c$  es un punto de discontinuidad de  $f$ .

Así, los puntos  $c$  donde  $f$  no es continua pueden ser:

- puntos donde  $f(c)$  no existe,
- puntos donde  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no existe,
- puntos donde  $f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

## Concepto de discontinuidad

Si una función  $f$  no es continua en un punto  $c$ , entonces decimos que  $f$  es discontinua en  $c$  y que  $c$  es un punto de discontinuidad de  $f$ .

Así, los puntos  $c$  donde  $f$  no es continua pueden ser:

- puntos donde  $f(c)$  no existe,
- puntos donde  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no existe,
- puntos donde  $f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

En este curso, analizaremos la discontinuidad de funciones en puntos de su dominio y en puntos que se encuentran en el *borde o frontera* del dominio. Ejemplificamos esto en la próxima diapositiva.

## Concepto de discontinuidad

Si una función  $f$  no es continua en un punto  $c$ , entonces decimos que  $f$  es discontinua en  $c$  y que  $c$  es un punto de discontinuidad de  $f$ .

Así, los puntos  $c$  donde  $f$  no es continua pueden ser:

- puntos donde  $f(c)$  no existe,
- puntos donde  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no existe,
- puntos donde  $f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

En este curso, analizaremos la discontinuidad de funciones en puntos de su dominio y en puntos que se encuentran en el *borde o frontera* del dominio. Ejemplificamos esto en la próxima diapositiva.

**Observación:** la discontinuidad también puede darse en un extremo del dominio. En ese caso, en la clasificación anterior, se toma el límite lateral correspondiente.

**Ejemplo:** diga dónde es continua y dónde discontinua la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x - 2)}.$$

# Continuidad y discontinuidad

**Ejemplo:** diga dónde es continua y dónde discontinua la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x - 2)}.$$

**Solución:** observar que el dominio de  $g$  es

$$D = \mathbb{R} - \{0, 2\}.$$

Los puntos  $x = 0$  y  $x = 2$  son puntos donde  $g$  no está definida y que están en la frontera del dominio. Luego,  $g$  no es continua en dichos puntos.

Además, dado que  $g$  es un cociente de funciones continuas (ambas son polinomios), la propiedad 3 del teorema de la diapositiva 16 nos dice que  $g$  es continua en todo punto que no anule el denominador.

En conclusión,  $g$  es continua en:

$$\mathbb{R} - \{0, 2\}$$

y discontinua en  $x = 0$  y  $x = 2$ .