Análisis Matemático I
Clase 5: Continuidad y clasificación de discontinuidades. Teorema del valor intermedio. Asíntotas

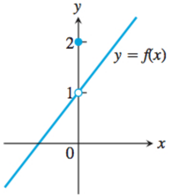
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

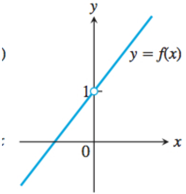
Marzo, 2026

- **Discontinuidad Evitable (se puede salvar la discontinuidad)**
  - $f(c)$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existen pero:

$$f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x).$$



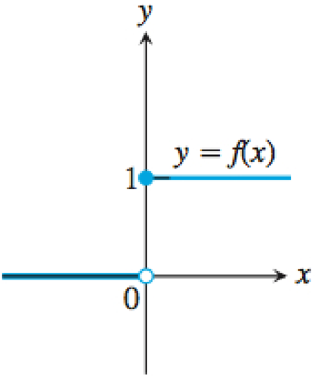
  - $f(c)$ no existe (es decir, c no pertenece al dominio de f), pero $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe:



Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad de Salto (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe pero:

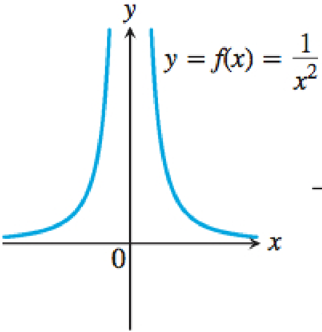
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x) \text{ existen.}$$

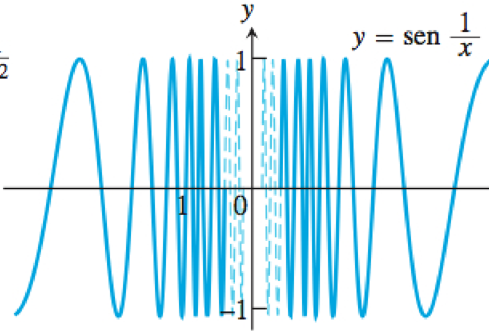


Observación: no interesa si f está o no definida en c.

- **Discontinuidad esencial (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - Al menos uno de los límites laterales no existe. Es decir:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \text{ o } \lim_{x\to c^+} f(x) \text{ no existe.}$$





Observación: no interesa si f está o no definida en c.

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: anteriormente se obtuvo que g es discontinua en $x = 0$ y $x = 2$. Veamos qué tipo de discontinuidad tenemos en cada caso.

-Para $x = 2$: analizamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)}{x} = 2.$$

Por lo tanto

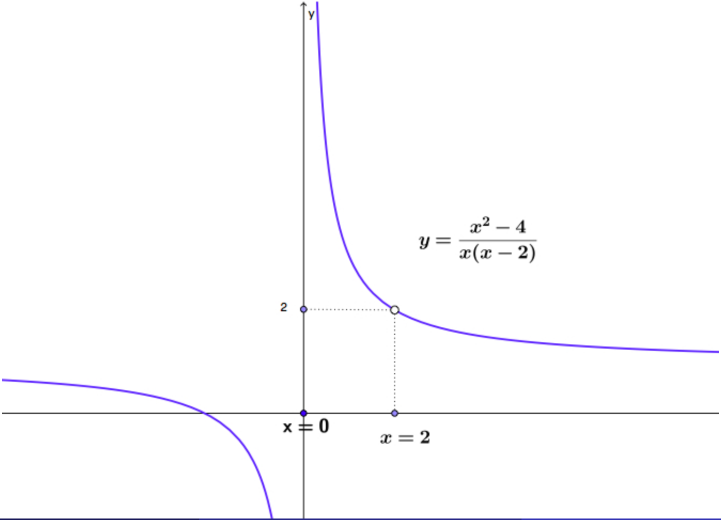
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2$$

y g tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

-Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)}{x} = +\infty$$

por ende la discontinuidad de g en $x = 0$ es esencial.



Teorema del valor intermedio: motivación

Ejemplo: La ecuación que describe las frecuencias naturales de una estructura con múltiples grados de libertad (por ejemplo, una estructura de varios pisos o un puente con múltiples vigas) puede convertirse en una ecuación de cuarto orden. En este caso, se puede obtener una ecuación del tipo:

$$m_4\omega^4 + m_3\omega^3 + m_2\omega^2 + m_1\omega + m_0 = 0$$

Donde:

- m_4, m_3, m_2, m_1, m_0 son constantes derivadas de las propiedades físicas de la estructura,
- ω es la frecuencia angular de vibración.

Este tipo de ecuación algebraica cuártica es fundamental para el análisis de la dinámica estructural, ya que permite calcular las frecuencias de resonancia que son críticas para evitar fallos estructurales.

Teorema del valor intermedio: motivación

Ejemplo: La ecuación que describe las frecuencias naturales de una estructura con múltiples grados de libertad (por ejemplo, una estructura de varios pisos o un puente con múltiples vigas) puede convertirse en una ecuación de cuarto orden. En este caso, se puede obtener una ecuación del tipo:

$$m_4\omega^4 + m_3\omega^3 + m_2\omega^2 + m_1\omega + m_0 = 0$$

Donde:

- m_4, m_3, m_2, m_1, m_0 son constantes derivadas de las propiedades físicas de la estructura,
- ω es la frecuencia angular de vibración.

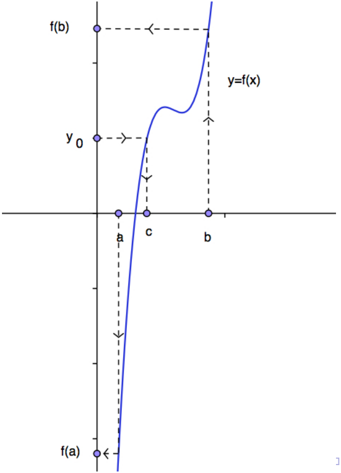
Este tipo de ecuación algebraica cuártica es fundamental para el análisis de la dinámica estructural, ya que permite calcular las frecuencias de resonancia que son críticas para evitar fallos estructurales.

Resolver ecuaciones complejas puede no ser una tarea fácil. Sin embargo, utilizando el teorema del valor intermedio y herramientas numéricas, se puede dar con la solución o una aproximación a ella.

Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea y_0 un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = y_0.$$



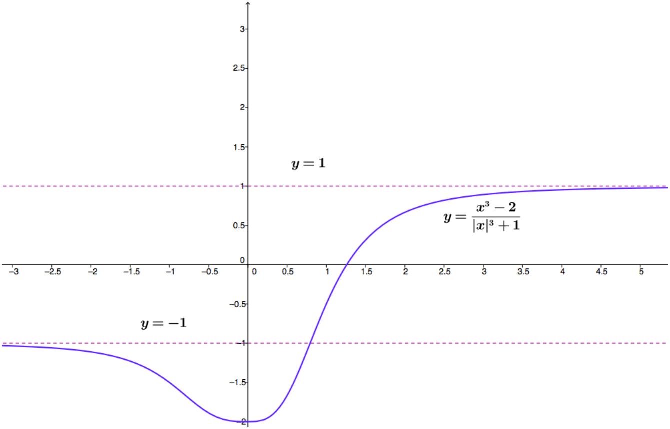
Teorema del valor intermedio

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Intemedio para la resolución de las preguntas de motivación. Más adelante veremos otras aplicaciones del teorema.

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
Introducimos la función:
$$f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x - 1$$
que es continua en $\mathbb{R}$. Observar que:
$$f(0) < 0 \quad \text{y} \quad f(3) > 0.$$
Tomando $y_0 = 0$ en el teorema del valor intermedio, se tiene la existencia de $c \in [0, 3]$ tal que:
$$f(c) = 0.$$
Así, $x = c$ resuelve la ecuación:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Asíntotas horizontales

Considere el siguiente gráfico:



La distancia (vertical) entre las imágenes de $y = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **y de la recta** $y = 1$ **tiende a cero a medida que** x **se hace cada vez mayor.**

Asíntotas horizontales

Definición de Asíntota Horizontal

Decimos que la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Observación: Así, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si la distancia entre b y los valores de la función $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo: determine las asíntotas horizontales de:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución: cuando se desea obtener un límite de la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios, entonces se divide el numerador y el denominador por x elevada al grado del denominador. Este procedimiento permite eliminar potencias y simplificar los términos. Apliquemos lo anterior para calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Asíntotas horizontales

Primero observe que como $x \to +\infty$, se tiene que $|x| = x$ y entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-2}{x^3}}{\frac{x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $+\infty$, los cocientes:

$$\frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x^3}$$

tienden a cero. Así:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = 1.$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales

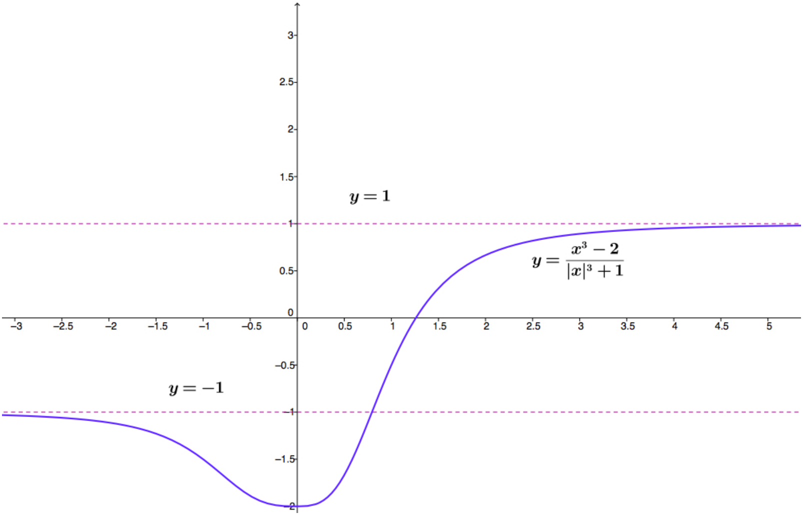
En forma similar y observando que cuando $x \to -\infty$ el valor absoluto de x es $-x$, se obtiene:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2}{-x^3 + 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{x^3}}{-1 + \dfrac{1}{x^3}} = \frac{1 - 0}{-1 + 0} = -1.$$

Así, $y = -1$ es otra asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales



Observar que la gráfica de una función puede cortar a la asíntota.

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

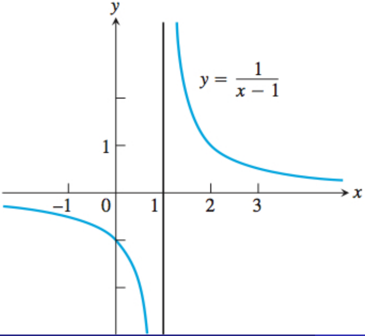
- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



Asíntotas verticales

Definición de Asíntota Vertical

Decimos que $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty)$$

o:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty).$$

Así, la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.

Ejemplo. Encontrar las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solución. Primero buscamos los puntos de discontinuidad de la función. Como f es una función racional, los puntos de discontinuidad se dan donde el denominador en la expresión de f se anula. En este caso:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Ahora vamos a estudiar que pasa con los límites laterales en $x = 1$ y $x = 2$. Comenzamos con $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Cuando $x \to 1^-$, el producto $(x-1)(x-2)$ es positivo y tiende a cero. Luego, si dividimos 2 por $(x-1)(x-2)$, el resultado es positivo pero cada vez más grande.

Asíntota vertical

Así:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical. No es necesario ver que el otro límite lateral cuando $x \to 1^+$ tambien es infinito, ya que en la definición de asíntota vertical tenemos disyunciones.

Para $x = 2$ tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Razonando como en el caso anterior, se concluye que:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-3x+2} = -\infty.$$

Así, $x = 2$ es asíntota vertical de f.

Asíntota vertical

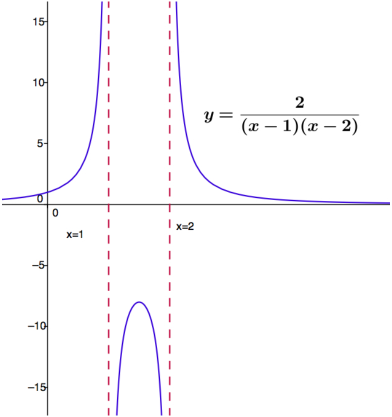


Figura: Asíntotas verticales y gráfico de $y = 2/(x-1)(x-2)$.

Con este tema, el estudiante puede resolver todo el TP 1.