# Análisis Matemático I
# Clase 6: Introducción a derivadas

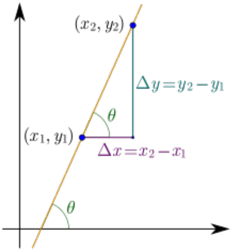
Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Marzo, 2026

# Motivación: pendiente de una recta

Recordar:



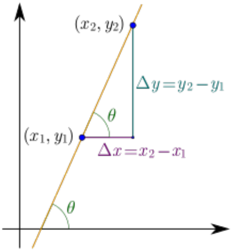

Pendiente de la recta:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

# Motivación: pendiente de una recta

Recordar:




Pendiente de la recta:

$$m = \tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

**Ahora, ¿cómo se determina la pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ de dicha curva?** Antes de responder esta pregunta, veamos algunas aplicaciones.

# Aplicaciones del concepto de pendiente a fenómenos no lineales

En ingeniería de materiales, la pendiente también juega un papel importante en el **análisis de la relación esfuerzo-deformación** de un material bajo carga.

En **ingeniería ambiental**, la pendiente también puede aplicarse a la **distribución de contaminantes** en un terreno o río. Si se estudia la propagación de un contaminante en el aire o en el agua, la pendiente puede representar la tasa de cambio de la concentración de contaminantes a lo largo del tiempo o de la distancia.

En ingeniería mecánica, el concepto de pendiente se utiliza en el **análisis de estructuras**, el **cálculo de fuerzas** y **momentos** que actúan sobre componentes, como vigas, columnas y otros elementos de una estructura.

En la ingeniería hidráulica, la pendiente es un concepto crucial para el **diseño de canales**, **drenajes** y **tuberías**, ya que controla la **velocidad** del flujo de agua y su capacidad para transportar materiales (como sedimentos o residuos) o para el drenaje eficiente.

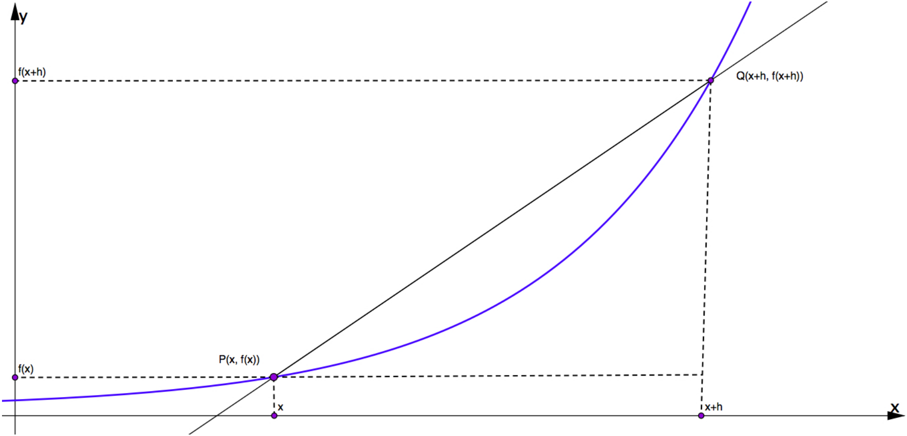
En **aprendizaje automático** (machine learning), la pendiente juega un papel crucial en los **algoritmos de optimización**, especialmente en el proceso de **descenso por gradiente**. El **gradiente** de una función es la **pendiente** de la función en un punto específico, y se utiliza para minimizar o maximizar una función objetivo.

**Ejemplo:**

- En el **entrenamiento de redes neuronales**, el algoritmo de **descenso de gradiente** ajusta los pesos de la red para minimizar la **función de pérdida**. Este proceso se realiza calculando la derivada (pendiente) de la función de pérdida con respecto a los parámetros del modelo (como los pesos de la red neuronal). En cada iteración, la pendiente indica la dirección en la que los parámetros deben ajustarse.

Ahora bien, dada una curva suave $y = f(x)$, queremos definir el concepto de pendiente en cualquier punto $P(x, f(x))$ de dicha curva. Para ello, realizamos el siguiente procedimiento.

**Primer paso:** se escoge un punto $Q(x+h, f(x+h))$ cercano a $P(x, f(x))$ y se traza la recta que une a dichos puntos. Esta recta se llama recta secante.



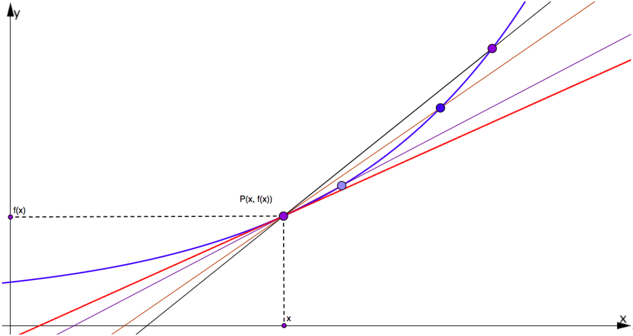
**Segundo paso:** calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente $m$ es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**Segundo paso:** calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente $m$ es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

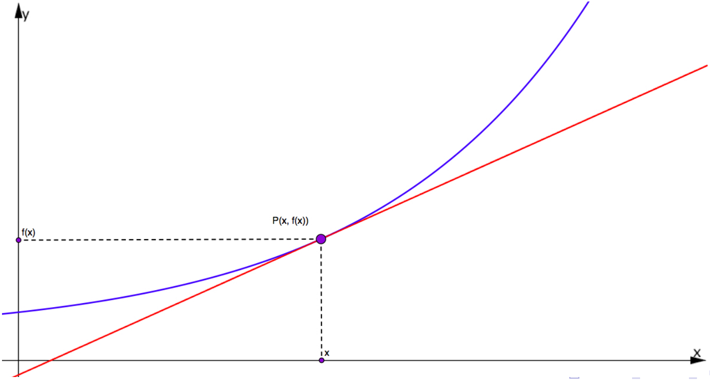
**Tercer paso:** como lo indica la siguiente figura, a medida que el punto $Q$ se acerca al punto $P$, es decir, cuando $h \to 0$, las rectas secantes parecen tender a la recta roja (recta tangente).



La pendiente $m$ de la recta roja será el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $h \to 0$, siempre y cuando dicho límite exista. Es decir:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En el siguiente gráfico se ilustra sólo la recta roja:



# Pendiente de una curva en un punto

## Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

## Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

**Observar que el cociente:**

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**es la pendiente de la recta secante que une los puntos** $(x_0, f(x_0))$ **y** $(x_0 + h, f(x_0 + h))$**.**

# Pendiente de la recta tangente

## Definición de recta tangente

**La recta tangente a la curva** $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

**y pasa por el punto** $(x_0, f(x_0))$.

# Pendiente de la recta tangente

## Definición de recta tangente

**La recta tangente a la curva** $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

**y pasa por el punto** $(x_0, f(x_0))$.

**Dado que el límite:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**aparece con mucha frecuencia, recibe un nombre especial.**

# Derivada de una función

## Derivada de una función

La derivada de una función $f$ en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

# Derivada de una función

## Derivada de una función

La derivada de una función $f$ en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

## En resumen

**[Derivada de $f$ en $x_0$]= [Pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$]= [Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$] = [Tasa de cambio instantánea de $f$ en $x_0$]**

# Pendiente de una curva, ejemplo.

**Ejemplo:** Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$

# Pendiente de una curva, ejemplo.

**Ejemplo:** Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$
**Solución:** observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es $-1$.

# Pendiente de una curva, ejemplo.

**Ejemplo:** Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$

**Solución:** observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es $-1$. También podemos decir que la derivada de $f$ en $x = -1$ es

$$f'(-1) = -1.$$

# Pendiente de una curva, ejemplo.

**Ejemplo:** Determine la pendiente de la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$. Además dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$
**Solución:** observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

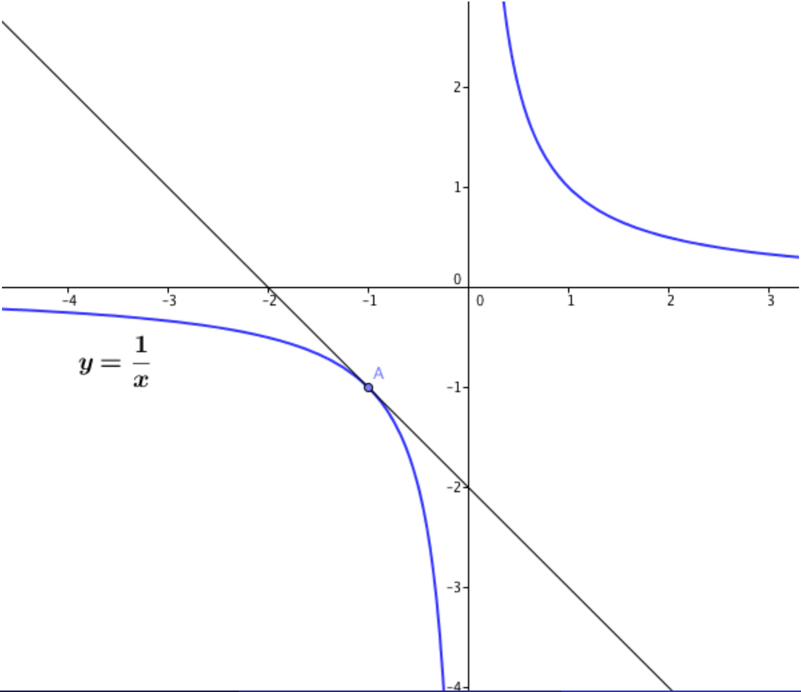
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es $-1$.También podemos decir que la derivada de $f$ en $x = -1$ es

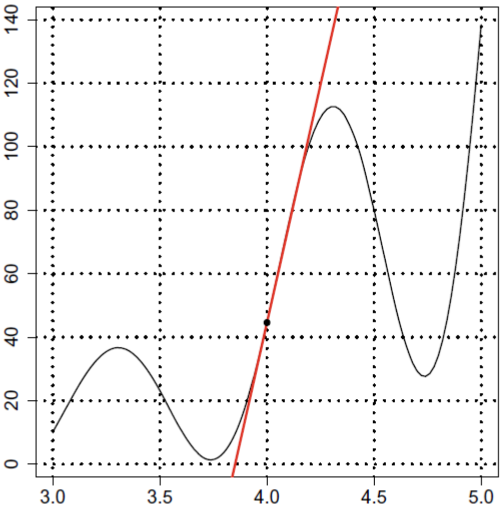
$$f'(-1) = -1.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, f(-1))$ es:

$$y - (-1) = (-1)(x - (-1)) \ \Rightarrow \ y = -x - 2.$$


$y = \dfrac{1}{x}$
A
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4

# Otro ejemplo: Estime $f'(4)$



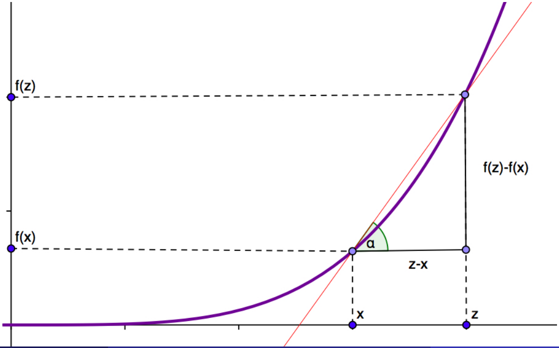
# Derivada de una función: forma alternativa.

## Derivada de una función

La derivada de una función $f$ en un punto $x$ se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

siempre que el límite exista.



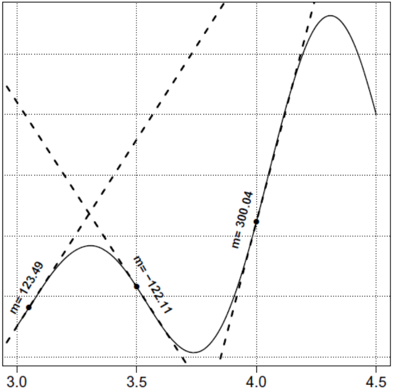
# Notación para las derivadas

Si $y = f(x)$, entonces la derivada de $f$ con respecto a $x$ en un punto $x_0$ se puede simbolizar como:

- $f'(x_0)$
- $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (notación de Leibniz)
- $y'(x_0)$

# La derivada como una función

Dada una función $f$, se puede calcular la derivada en distintos valores de $x$:




De esta forma, se puede construir una nueva función $f'$ tal que a cada $x$ donde $f$ sea derivable, le asigne $f'(x)$.

# Función derivada: ejemplo

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f$ es derivable en $(0, \infty)$ y su derivada en cualquier $x \in (0, \infty)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \text{(Luego analizaremos qué pasa en } x = 0\text{).}$$

**Demostración.** Sea $x > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[ \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} . \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

# La derivada como una función

## La derivada como función

Sea $f$ una función y sea $D(f')$ el conjunto de los $x$ en el dominio de $f$ donde $f$ es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$

que a cada $x \in D(f')$ le asigna $f'(x)$, se denomina función derivada.

# La derivada como una función

## La derivada como función

Sea $f$ una función y sea $D(f')$ el conjunto de los $x$ en el dominio de $f$ donde $f$ es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$

que a cada $x \in D(f')$ le asigna $f'(x)$, se denomina función derivada.

En el ejemplo anterior, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$