

# Análisis Matemático I

## Clase 7: derivadas y reglas de cálculo

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2026

# Derivada de una función

Recordar:

## Derivada de una función

La derivada de una función  $f$  en un punto  $x = x_0$  se simboliza como  $f'(x_0)$  y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

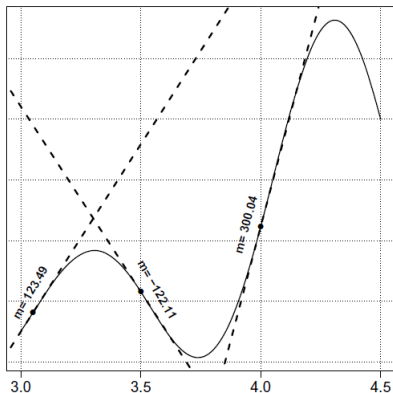
## En resumen

**[Derivada de  $f$  en  $x_0$ ] = [Pendiente de la curva  $y = f(x)$  en  $(x_0, f(x_0))]$  = [Pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x_0, f(x_0))]$  = [Tasa de cambio instantánea de  $f$  en  $x_0$ ]**

# La derivada como una función

Recordar:

Dada una función  $f$ , se puede calcular la derivada en distintos valores de  $x$ :



De esta forma, se puede construir una nueva función  $f'$  tal que a cada  $x$  donde  $f$  sea derivable, le asigne  $f'(x)$ .

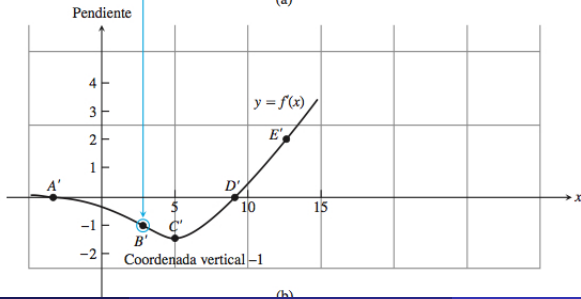
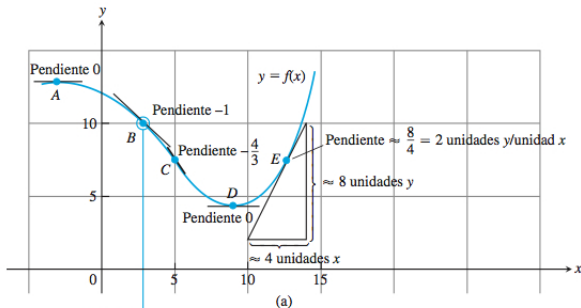
## La derivada como función

Sea  $f$  una función y sea  $D(f')$  el conjunto de los  $x$  en el dominio de  $f$  donde  $f$  es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$$

que a cada  $x \in D(f')$  le asigna  $f'(x)$ , se denomina función derivada.

# Gráfica de la función derivada para una función $y = f(x)$



## Teorema (algunas propiedades de la derivada)

- 1 Si  $f$  es derivable en  $x = c$ , entonces  $f$  es continua en  $c$ .
- 2 Si  $f(x) = c$  para todo  $x$ , entonces  $f'(x) = 0$  para todo  $x$ .
- 3 Si  $n \in \mathbb{R}$  y  $f(x) = x^n$ , entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$  para todo  $x$  donde  $x^n$  y  $x^{n-1}$  estén definidas.
- 4 Si  $f$  es derivable en  $c$  y si  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $(kf)'(c) = kf'(c)$ .
- 5 Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $c$ , entonces  $f + g$  y  $f \cdot g$  son derivables en  $c$  y además:
  - $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ .
  - $(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$ .
- 6 Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $c$  y  $g(c) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es derivable en  $c$  y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Ejemplos: derivar  $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$  y  $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$ .

- Para derivar  $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ , utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
  - La derivada de  $3x^4$  es  $3 \cdot 4 \cdot x^3$  por las reglas 3 y 4.
  - la derivada de  $-2x$  es  $-2$  por las reglas 3 y 4
  - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

Luego,

$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar  $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ , utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
  - La derivada de  $3x^4$  es  $3 \cdot 4 \cdot x^3$  por las reglas 3 y 4.
  - la derivada de  $-2x$  es  $-2$  por las reglas 3 y 4
  - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

Luego,

$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar  $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$ , vamos a utilizar en primer lugar la regla 6 de la derivada de un cociente. La regla del cociente dice derive el numerador (obtenemos  $2x$ ) multiplique por el denominador sin derivar, reste el numerador sin derivar multiplicado por la derivada del denominador (en este caso dicha derivada da 1), finalmente divida todo por el denominador al cuadrado. Así:

$$g'(x) = \frac{2x(x + 3) - (x^2 - 1) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x + 3)^2}.$$

## Teorema: regla de la cadena

Si  $g$  es derivable en  $c$  y  $f$  es derivable en  $g(c)$ , entonces  $f \circ g$  es derivable en  $c$  y además:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c).$$

**Ejemplo:** emplee la regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones:

$$h(x) = (2x^2 + x - 10)^{10},$$

en cada  $x$ , y (para resolver por los alumnos en la sala)

$$g(x) = \left( \frac{x+5}{x-3} \right)^4, \quad x \neq 3.$$

**Demostración de Propiedad 1:** si  $f$  es derivable en  $c$ , entonces es **continua en**  $c$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $x = c$ . Vamos a probar que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

**Demostración de Propiedad 1:** si  $f$  es derivable en  $c$ , entonces es continua en  $c$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $x = c$ . Vamos a probar que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c) + f(c)) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ (f(x) - f(c)) \cdot \frac{(x - c)}{(x - c)} + f(c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) + f(c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) + \lim_{x \rightarrow c} f(c) = f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que  $f'$  existe en  $c$  y las propiedades del producto y suma de límites. Además, observe que se puede dividir por  $x - c$  porque en el límite,  $x$  tiende a  $c$  y entonces  $x$  no es  $c$ .

Así, hemos llegado a que  $f$  es continua en  $x = c$ .

# Derivadas de funciones trigonométricas

- Si  $g(x) = \text{sen}(x)$ , entonces  $g$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y su derivada es:

$$g'(x) = \text{cos}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\text{cos}(h) + \text{cos}(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h} + \text{cos}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\ &= \text{cos}(x), \end{aligned}$$

donde se usó que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(h) - 1}{h} = 0$  que se demostrará más adelante.

En forma similar al caso anterior, se puede probar que: si  $h(x) = \cos(x)$ , entonces  $h$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y

$$h'(x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando la regla del cociente para derivadas, se puede determinar que las funciones  $\tan$ ,  $\cotan$ ,  $\sec$  y  $\csc$  son derivables en todo su dominio. Por ejemplo (hacer uno):

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec(x) \cdot \tan(x).$$