

Análisis Matemático I

Clase 8: Derivadas laterales. Aplicaciones de la Derivada a Cinemática. Extremos locales

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2026

Derivadas laterales

Para estudiar la derivabilidad de funciones en puntos extremos del dominio o para comprobar si una función es derivable o no en un punto, se utilizan las derivadas laterales:

Derivadas laterales

Sea c un número real. La derivada por derecha de f en c se define como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. La derivada por izquierda de f en c se define como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación: f es derivable en c si y sólo si f es derivable por izquierda y por derecha en c y los límites coinciden.

Ejemplo 1: sea $f(x) = |x|$. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Así la función valor absoluto es derivable por izquierda y por derecha en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.

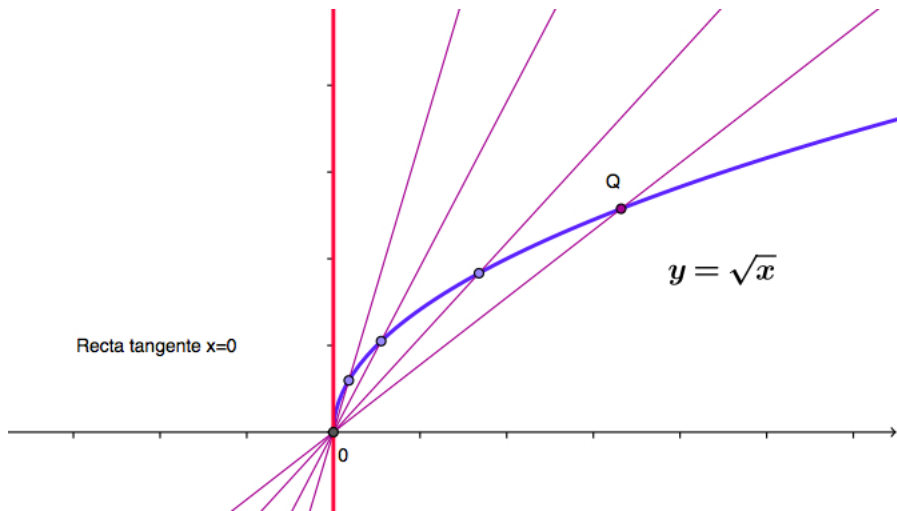
Ejemplo 2: sea $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Luego, g no es derivable por derecha en $x = 0$. Sin embargo, se puede trazar una recta que puede considerarse como recta *tangente*.

Derivadas laterales

Se observa que a medida que Q tiende al origen, las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $x = 0$:



Ejercicio : grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y analice, usando derivadas laterales, si f es derivable en $x = 1$.

Recordar:

Definición de tasa instantánea de cambio

La tasa de cambio instantánea de una función f con respecto a x en x_0 se define por:

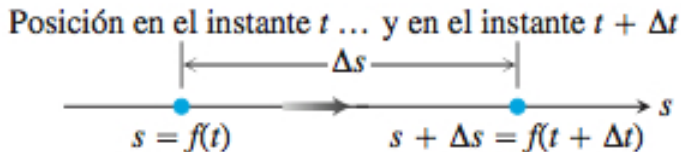
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

siempre que el límite exista.

Así, las tasas de cambio instantáneas son límites de tasas de cambio promedio.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Supongamos que la función $s = f(t)$ describe la posición de un objeto en función del tiempo que se desplaza en línea recta:



Luego, el desplazamiento Δs del objeto en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Así, la velocidad promedio v_{prom} en dicho intervalo viene dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Para determinar la velocidad en el instante t , se debe calcular la velocidad promedio en el intervalo de t a $t + \Delta t$, y hacer tender Δt a cero. Así, la **velocidad instantánea** del objeto en el instante t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

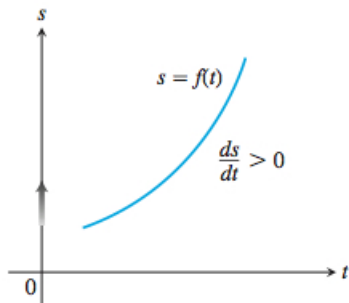
Es decir:

$$v(t) = s'(t).$$

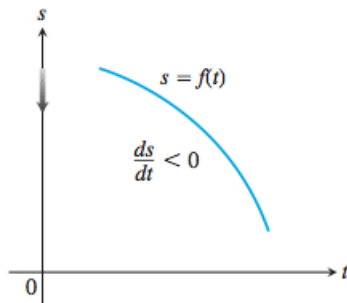
IMPORTANTE: Si el objeto se desplaza hacia la derecha, entonces $s'(t) > 0$, Por otro lado, si se desplaza hacia la izquierda, entonces $s'(t) < 0$.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

En el plano espacio-tiempo:



s aumenta:
pendiente positiva, así que el
movimiento es hacia arriba.



s disminuye:
pendiente negativa, así que el
movimiento es hacia abajo.

Así, el signo de la derivada indica la dirección del movimiento

La **rapidez** del movimiento se define como sigue:

$$\text{Rapidez en el instante } t = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt}(t) \right|.$$

La tasa instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se denomina **aceleración**. Así:

$$\text{aceleración en el instante } t = a(t) = \frac{dv}{dt}(t).$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ahora, la velocidad del objeto en el instante t es

$$v(t) = s'(t) = 2t - 3.$$

Entonces, si quisiéramos obtener la velocidad en $t = 1$ s, calculamos

$$v(1) = s'(1) = -1 \text{ m/s}.$$

Mientras que la rapidez en ese instante es

$$|v(1)| = 1 \text{ m/s}.$$

Ejemplo: suponga que la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s(t) = t^2 - 3t + 2.$$

El tiempo se mide en segundos. Entonces la velocidad promedio en el intervalo $[1, 3]$ es

$$v_{prom} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = .$$

Ahora, la velocidad del objeto en el instante t es

$$v(t) = s'(t) = 2t - 3.$$

Entonces, si quisiéramos obtener la velocidad en $t = 1$ s, calculamos

$$v(1) = s'(1) = -1 \text{ m/s}.$$

Mientras que la rapidez en ese instante es

$$|v(1)| = 1 \text{ m/s}.$$

Finalmente, la aceleración del objeto es

$$a(t) = v'(t) = 2 \text{ m/s}^2.$$

Objetivo de las próximas clases

En las próximas clases, vamos a aplicar las teorías de límites y de derivación para realizar trazados de curvas $y = f(x)$ con precisión.

Límites: hemos visto que se aplican para detectar:

- puntos de continuidad de la función,
- asíntotas verticales, horizontales y oblicuas,
- discontinuidades de la función.

Derivadas: veremos que se aplican para:

- determinar dónde la función f alcanza sus valores máximos y mínimos.
- detectar intervalos donde la función crece y donde decrece.
- estudiar la curvatura 'hacia arriba' o 'hacia abajo' de la gráfica de f .
- determinar dónde se presenta un cambio de curvatura (punto de inflexión)

Extremos locales o relativos

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un **máximo local o relativo** en el punto $c \in D$ si existe un intervalo abierto $(c - r, c + r)$ tal que:

$$f(x) \leq f(c)$$

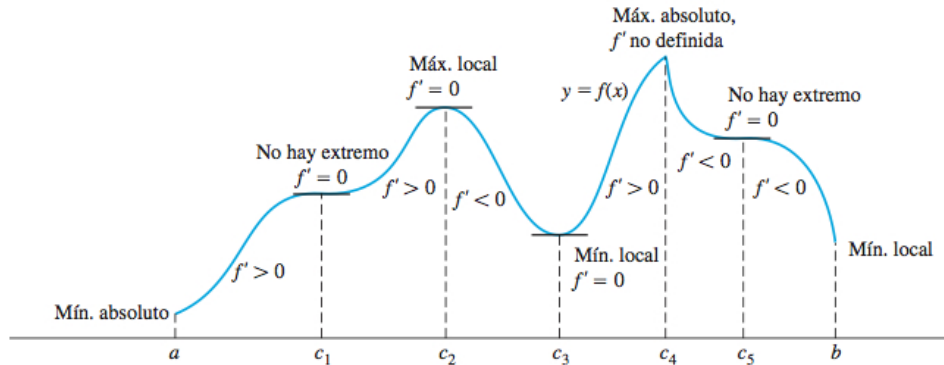
para todo $x \in D \cap (c - r, c + r)$. De forma similar, decimos que f tiene un **mínimo local o relativo** en el punto $c \in D$ si existe un intervalo abierto $(c - r, c + r)$ centrado en c tal que:

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in D \cap (c - r, c + r)$.

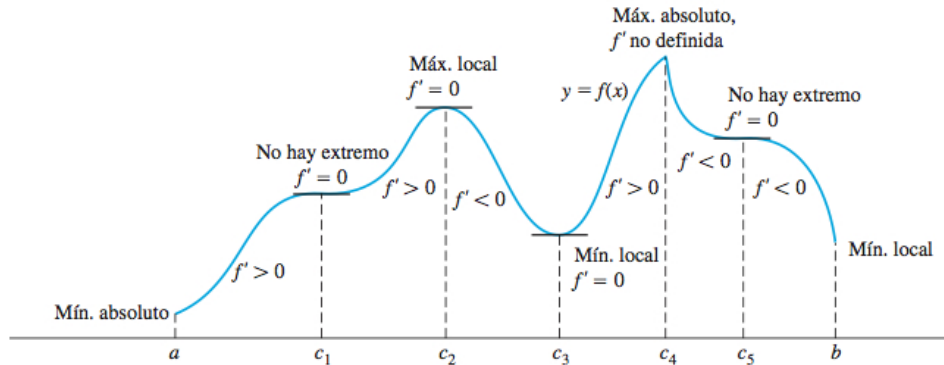
¿Cómo determinar extremos relativos?

Observar el siguiente gráfico:



¿Cómo determinar extremos relativos?

Observar el siguiente gráfico:



Observación: En este curso no consideraremos en detalle extremos absolutos, sólo locales, dar una idea de qué son. Explicar que los extremos absolutos son siempre locales.

¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo relativo:

- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo relativo:

- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

Punto Crítico

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $c \in (a, b)$ es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe.

Así, los candidatos en donde la función tiene extremos son los puntos críticos y los puntos que no son interiores al dominio.

A continuación, discutiremos más sobre extremos locales e iniciaremos el camino para encontrarlos. Esto será terminado la próxima clase.

No en todos los puntos críticos hay extremos

