

# Análisis Matemático I

Clase 9: Teorema del valor medio y consecuencias.  
Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la  
derivada primera para extremos locales.

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**  
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Abril, 2026

# Teorema del Valor Medio

El siguiente teorema es fundamental para el análisis de funciones a través del uso de la derivada. Lo encontraremos en distintos temas en el curso.

## Teorema del Valor Medio

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

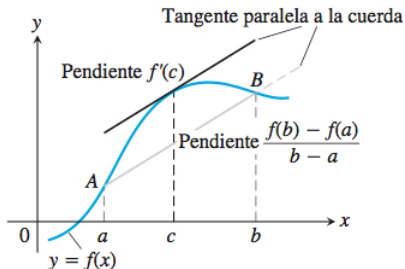
# Teorema del Valor Medio

El siguiente teorema es fundamental para el análisis de funciones a través del uso de la derivada. Lo encontraremos en distintos temas en el curso.

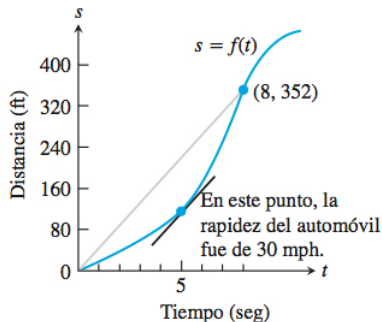
## Teorema del Valor Medio

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



# Teorema del Valor Medio



Así, el Teorema del Valor Medio dice que, bajo hipótesis adecuadas, la tasa de cambio promedio de una función en un intervalo es igual a la tasa de cambio instantánea de la función en algún punto interior del intervalo

# Consecuencias del Teorema del Valor Medio

## Teorema

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(x) = 0$$

para todo  $x$  en  $(a, b)$ . Entonces  $f$  es una función constante en  $[a, b]$ .

# Consecuencias del Teorema del Valor Medio

## Teorema

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(x) = 0$$

para todo  $x$  en  $(a, b)$ . Entonces  $f$  es una función constante en  $[a, b]$ .

**Demostración:** sean  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \neq y$ . Vamos a probar que  $f(x) = f(y)$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x < y$ . Observar que  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[x, y]$  (es decir,  $f$  es continua en  $[x, y]$  porque dicho intervalo está contenido en  $[a, b]$  y  $f$  es continua allí por hipótesis, y  $f$  es derivable en  $(x, y)$  porque dicho intervalo está contenido en  $(a, b)$  y  $f$  es derivable allí por hipótesis). Entonces, existe  $c \in (x, y)$  tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como  $f' = 0$  en  $(a, b)$  y  $c \in (a, b)$ , se tiene  $f'(c) = 0$ .

## Teorema

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$  tales que:

$$f'(x) = g'(x)$$

para toda  $x$  de  $(a, b)$ , entonces existe una constante  $C$  tal que:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

## Teorema

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$  tales que:

$$f'(x) = g'(x)$$

para toda  $x$  de  $(a, b)$ , entonces existe una constante  $C$  tal que:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

**Demostración:** sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Entonces  $h$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  (pues es una diferencia de funciones continuas) y  $h$  es derivable en  $(a, b)$  (ya que es una diferencia de funciones derivables).

# Consecuencias del Teorema del Valor Medio

Además, como por hipótesis  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ , se obtiene:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo  $x \in (a, b)$ . Por la primera consecuencia del teorema del valor medio, se tiene que  $h$  es una función constante en  $[a, b]$ . Por lo tanto, existe una constante  $C$  tal que:

$$h(x) = C$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Recordando que  $h(x) = f(x) - g(x)$ , se llega a :

$$f(x) = g(x) + C$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ .

Vamos a considerar funciones crecientes o decrecientes con desigualdades estrictas:

- Decimos que  $f$  es creciente en  $D$  si:

$$f(x) < f(y)$$

para todo  $x$  y  $y$  en  $D$  tales que:  $x < y$ .

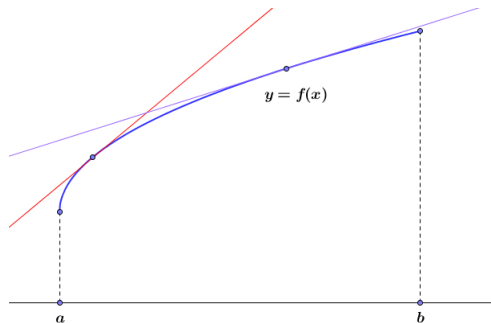
- Decimos que  $f$  es decreciente en  $D$  si:

$$f(x) > f(y)$$

para todo  $x$  y  $y$  en  $D$  tales que:  $x < y$ .

# Funciones crecientes y decrecientes

La función de la siguiente figura es creciente en  $[a, b]$ :



Observar que si trazamos las rectas tangentes en cada punto de la gráfica de  $y = f(x)$  para  $x \in (a, b)$  se tiene que las pendientes de dichas rectas son positivas. Es decir,  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Basado en esta observación, se da ahora un criterio para determinar dónde crece o decrece una función derivable en términos del signo de  $f'$ .

## Prueba de la derivada primera para funciones crecientes o decrecientes

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces:

- Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .
- Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ .

# Demostración de la prueba de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes

**Demostración:** vamos a probar el primer ítem. El segundo queda como ejercicio para el estudiante. Supongamos que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Sean  $x, y \in [a, b]$  tales que:

$$x < y.$$

Entonces  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[x, y]$  y por ende existe  $c \in (x, y)$  tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis  $f'(c) > 0$  y además  $y - x > 0$ , obtenemos que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$$

y entonces:

$$f(y) > f(x),$$

lo cual prueba que la función  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .

**Ejemplo:** determine los intervalos donde  $f(x) = x^3 - 12x - 5$  es creciente y donde es decreciente.

**Antes de resolver el problema tener en cuenta que:** para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ , vamos a determinar los intervalos donde  $f'$  es positiva y donde es negativa. Para ello, se deben distinguir los puntos donde  $f'$  cambia de signo. Estos se encuentran, en los casos que abordaremos en este curso, en:

- los puntos críticos, es decir, puntos **interiores** del dominio de  $f$  donde la derivada es cero o no existe
- los puntos de discontinuidad de  $f$ .

# Funciones crecientes y decrecientes

**Solución del ejemplo:** observar que  $f$  tiene por dominio  $\mathbb{R}$  y que es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Por ende, los únicos puntos que se deben considerar para analizar el cambio de signo de  $f'$  son los puntos críticos. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

Dado que  $f'$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ , los únicos puntos críticos son aquellos donde  $f'$  es cero. En este caso:

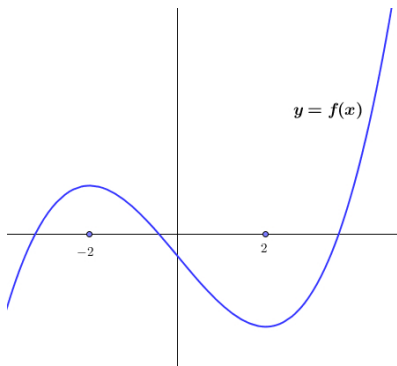
$$x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = -2.$$

Analizamos los signos de  $f'$  en los intervalos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(2, +\infty)$ .

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de $f'$	+	-	+
Conclusión	$f$ es creciente	$f$ es decreciente	$f$ es creciente

Así,  $f$  es creciente en  $(-\infty, -2)$  y en  $(2, +\infty)$  y decreciente en  $(-2, 2)$  (**La respuesta se puede dar con intervalos abiertos**).

Observar que en el ejemplo anterior no se dijo que  $f$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ . De hecho, si consideramos el gráfico de  $f$ :

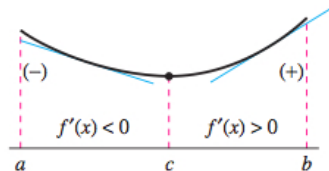


concluimos que  $f$  no es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  pues hay puntos cercanos a 2 donde  $f$  asume valores más chicos que en puntos cercanos a  $-2$ . Así, los intervalos donde una función crece o decrece deben colocarse de forma separada:

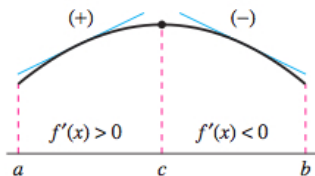
*la función  $f$  es creciente en  $(-\infty, -2)$  y en  $(2, +\infty)$ .*

# Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

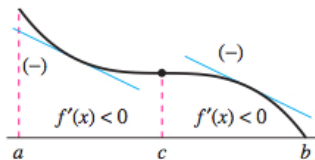
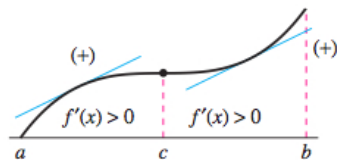
Considere los siguientes gráficos. Observe en cada situación cómo cambia el signo de  $f'$  alrededor del punto crítico  $x = c$  :



Mínimo relativo



Máximo relativo



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

## Criterio de la derivada primera para extremos

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y sea  $c \in (a, b)$  un punto crítico de  $f$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , excepto posiblemente en  $c$ . Al aumentar el valor de la variable independiente  $x$ ,

- si  $f'$  cambia de positiva a negativa alrededor de  $c$ , entonces  $f$  tiene un máximo local en  $x = c$ ,
- si  $f'$  cambia de negativa a positiva alrededor de  $c$ , entonces  $f$  tiene un mínimo local en  $x = c$ ,
- si  $f'$  no cambia de signo alrededor de  $c$ , entonces  $f$  no tiene extremo local en  $x = c$ .

## Criterio de la derivada primera para extremos

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y sea  $c \in (a, b)$  un punto crítico de  $f$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , excepto posiblemente en  $c$ . Al aumentar el valor de la variable independiente  $x$ ,

- si  $f'$  cambia de positiva a negativa alrededor de  $c$ , entonces  $f$  tiene un máximo local en  $x = c$ ,
- si  $f'$  cambia de negativa a positiva alrededor de  $c$ , entonces  $f$  tiene un mínimo local en  $x = c$ ,
- si  $f'$  no cambia de signo alrededor de  $c$ , entonces  $f$  no tiene extremo local en  $x = c$ .

**Importante:** es fundamental que el punto  $c$  esté en el dominio de  $f$ . De hecho, si tomamos  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , entonces  $f$  es discontinua en  $x = 0$  y la función pasa de ser creciente a decreciente alrededor de ese punto. Sin embargo, no hay extremo local allí.

**Ejemplo:** retomemos el ejemplo anterior donde

$$f(x) = x^3 - 12x - 5.$$

Si buscamos los extremos de  $f$ , entonces una vez armada la tabla de crecimiento y decrecimiento:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de $f'$	+	-	+
Conclusión	$f$ es creciente	$f$ es decreciente	$f$ es creciente

podemos concluir que  $f$  **tiene un máximo local en  $x = -2$  y un mínimo local en  $x = 2$** . Observar que ambos puntos son críticos y están en el dominio de  $f$ .