Análisis Matemático I
Clase 10: Criterio de la derivada primera para extremos. Concavidad. Puntos de inflexión.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2026

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f.
Solución: Recordar que para analizar los intervalos donde f crece o decrece tenemos en cuenta los puntos críticos de f y las discontinuidades. Dado que f es continua en $\mathbb{R}$, sólo resta hallar los puntos críticos. Primero calculamos la derivada de f usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3}.$$

Observar que f' no existe en $x = 0$ y que este punto pertenece al dominio de f. Luego, $x = 0$ es un punto crítico. Analizaremos si f' se anula en algún punto:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = 0$$

Multiplicamos por $x^{2/3}$ ambos miembros:

$$\frac{1}{3}(x-4)+x=0$$

$$\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=0$$

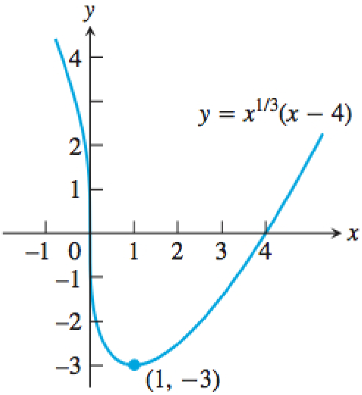
$$x=1.$$

Así, $x=1$ es también un punto crítico.
los únicos intervalos a considerar son:

$$(-\infty,0), \quad (0,1) \quad \text{y} \quad (1,\infty).$$

intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
punto de análisis	-1	$1/2$	2
signo de f'	$f'(-1)<0$	$f'(0)<0$	$f'(2)>0$
Conclusión	f es decreciente	f es decreciente	f es creciente

En base a la tabla anterior y al criterio de la derivada primera para extremos tenemos que f tiene un mínimo local en $x=1$.


y
x
4
2
1
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3
4
$y = x^{1/3}(x-4)$
(1, −3)

Uso de la primera derivada

Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

Uso de la primera derivada

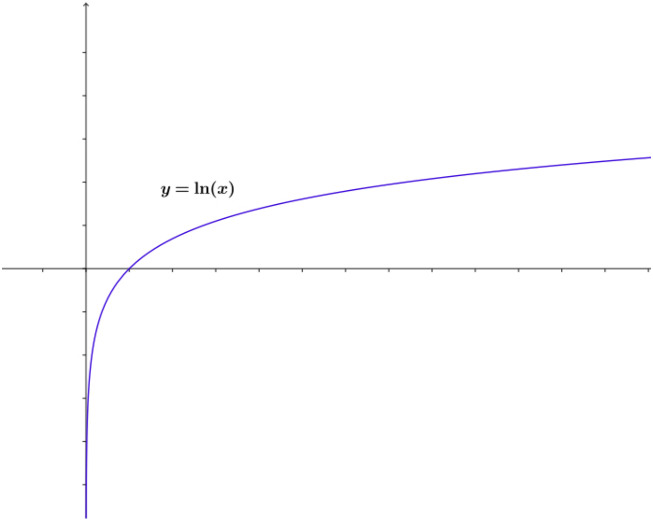
Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

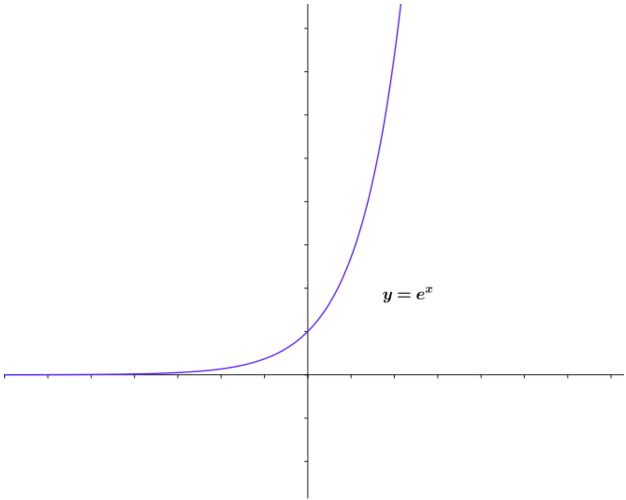
A continuación vamos a usar la segunda derivada para distinguir la *curvatura* de la gráfica de una función.

Concavidad

Para introducir el concepto de concavidad de funciones, vamos a comenzar observando las siguientes gráficas:



Concavidad

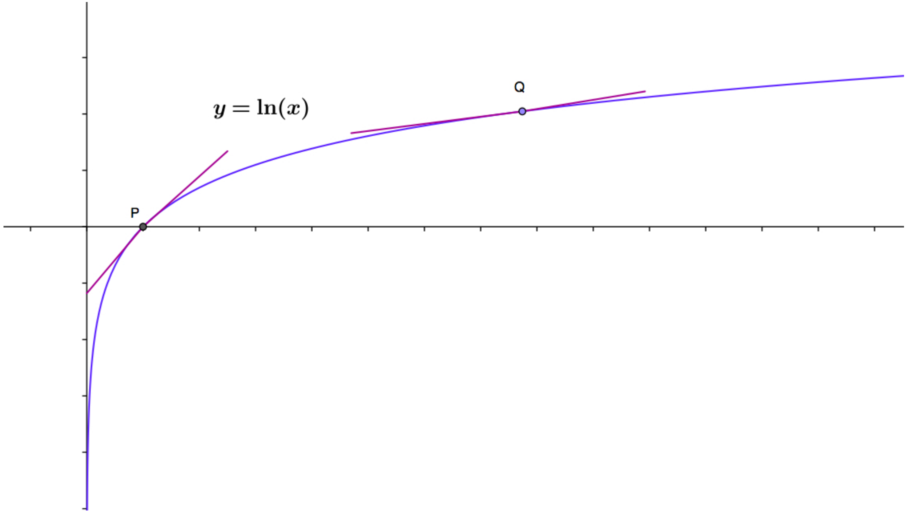


Concavidad

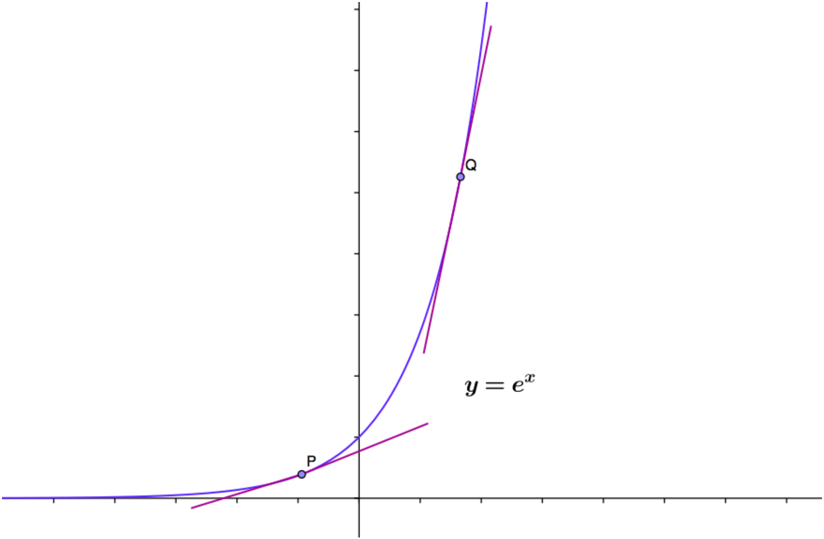
Tanto la función logarítmica como la exponencial son funciones crecientes. Sin embargo, la función $y = \ln(x)$ **desacelera** su crecimiento a medida que x aumenta, mientras que $y = e^x$ **acelera** su crecimiento cuando nos movemos en la dirección de las x positivas. En ambos casos las derivadas son positivas, pero no permiten distinguir el **ritmo** de crecimiento (o decrecimiento) de una función. Veremos que esta distinción la brinda la derivada segunda.

Comencemos trazando algunas rectas tangentes a las funciones logarítmica y exponencial.

En el caso de $y = \ln(x)$, se observa a partir de la comparación de las pendientes de las rectas tangentes en P y Q que a medida que x aumenta, la derivada de $y = \ln(x)$ decrece.



Por otro lado, en el caso de $y = e^x$, se deduce que la derivada de la función exponencial es creciente.



Concavidad

Concavidad: el comportamiento de la derivada de una función (en cuanto a si es creciente o decreciente) nos indica si la gráfica se *curva* hacia arriba o hacia abajo. Definimos entonces el concepto de concavidad como sigue:

Definición de Concavidad

Sea f una función derivable en (a, b). Tenemos:

- si f' es creciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b),
- si f' es decreciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Concavidad

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), Entonces:

- Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
- Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Observación: la notación f'' indica derivada segunda de f. Otras formas de escribir la derivada segunda son:

$$y'' \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Concavidad: ejemplo

Dado que para determinar los intervalos de concavidad de una función f se deben analizar los signos de f'', tenemos que encontrar los puntos alrededor de los cuales f'' cambia de signo. Estos puntos se localizan en:

- los puntos interiores del dominio de f donde f'' es cero o no existe;
- los puntos de discontinuidad de f;

Ejemplo: determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}.$$

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe.

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe. Calculamos f'':

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x.2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

Observar que f'' siempre existe. Luego los únicos puntos de interés son aquellos donde:

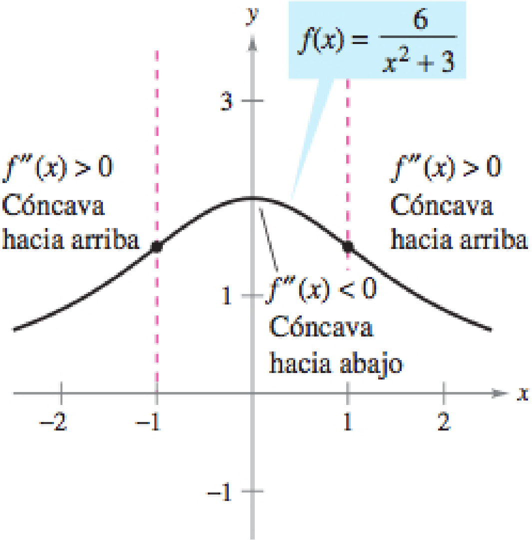
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 1, -1.$$

Construimos una tabla con los intervalos definidos por 1 y -1:

intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
punto muesta	-2	0	2
signo de f''	$+$	-	$+$
Conclusión	Conc. hacia arriba	Conc. hacia abajo	Conc. hacia arriba

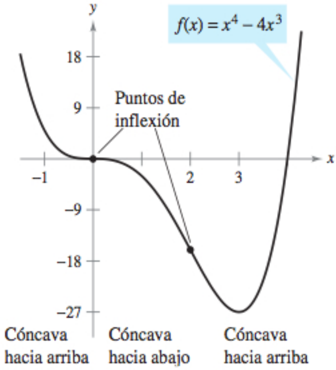
Hacer esbozos de la concavidad en cada caso, hablar de la necesidad de saber más sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, construir la tabla asociada y finalmente decidir como se comporta la curva.

Concavidad: ejemplo



Punto de inflexión

Decimos que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f si es posible trazar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$, y si la gráfica de f cambia de concavidad en $(c, f(c))$.



Punto de inflexión

El siguiente teorema nos dice dónde se deben buscar los puntos de inflexión:

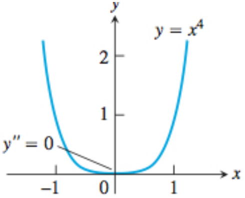
Teorema

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, o bien $f''(c)$ no existe, o bien $f''(c) = 0$.

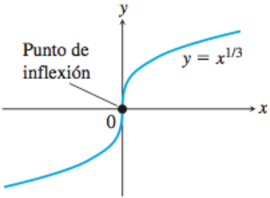
PRECAUCIÓN: NO SIEMPRE QUE $f''(c) = 0$, TENEMOS UN PUNTO DE INFLEXIÓN. TAMBIÉN, NO SIEMPRE QUE $f''(c)$ NO EXISTA HAY UN PUNTO DE INFLEXIÓN. Ver ejemplos en las próximas dos diapositivas.

Punto de inflexión

- **Un ejemplo donde $f''(0) = 0$ pero $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**

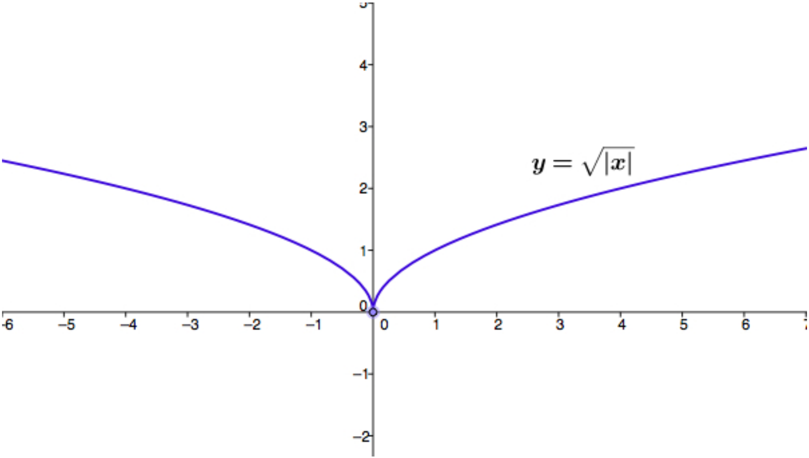


- **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ es punto de inflexión.**



Puntos de inflexión

· **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**



Puntos de inflexión

Ejemplo: $f(x) = x^{5/3}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \text{ y } f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}.$$

Observar que f'' no existe en $x = 0$. **No hay puntos donde f'' sea cero**. Así, $(0, f(0))$ es candidato a ser punto de inflexión. Observar que:

$$f''(x) < 0 \text{ cuando } x < 0 \to \; f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0).$$

$$f''(x) > 0 \text{ cuando } x > 0 \to \; f \text{ es cóncava hacia arriba en } (0, +\infty).$$

Hay cambio de concavidad en $(0, f(0))$ y además, es posible trazar la recta tangente en ese punto ya que $f'(0) = 0$. **Luego, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión.**

Puntos de inflexión