Análisis Matemático I
Clase 11: trazado de gráficas. Linealización. Diferenciales. Información del Parcial 1

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2026

Trazado de gráficas de funciones

Resumen:

- **Límites:** permiten determinar:
  - Asíntotas verticales y horizontales.
  - Regiones donde la función es continua.
  - Discontinuidades y el tipo de discontinuidad.
- **Primera derivada:** permite determinar:
  - regiones donde la función crece y/o decrece.
  - máximos o mínimos locales de la función.
- **Segunda derivada:** permite detectar:
  - Concavidad hacia arriba o hacia abajo.
  - Puntos de inflexión.

Trazado de gráficas de funciones

Procedimiento para trazar la gráfica de una función $y = f(x)$:

1. Determine el dominio de f, si f es par o impar, y las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determine las asíntotas de la función (verticales, y horizontales).
3. Encuentre las discontinuidades de f y clasifíquelas.
4. Calcule la derivada primera.
5. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
6. Usando la información anterior, determine dónde f tiene máximos o mínimos locales.
7. Encuentre la derivada segunda.
8. Determine dónde $f'' = 0$ y dónde f'' no existe, y localice los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
9. Localice los puntos de inflexión de f.
10. Esboce la gráfica de f.

Trazado de gráficas de funciones

Ejemplo: aplique el procedimiento anterior para trazar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9}.$$

Análisis:

- **Dominio:** f no está definida en los x tales que:

$$x^2 - 9 = 0.$$

  Luego:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

- **Simetría:** Observar que f es par:

$$f(-x) = \frac{2((-x)^2 - 4)}{(-x)^2 - 9} = f(x).$$

- **Intersecciones con los ejes coordenados:** con el eje x:

$$\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=0,$$

así:

$$x=2, \qquad x=-2.$$

Intersecciones con el eje x: $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Con el eje y: ponemos $x=0$ y obtenemos:

$$y=\frac{8}{9}.$$

Así: la intersección con el eje y es: $(0,8/9)$.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=2.$$

- **Asíntotas Horizontales:**
  Así, $y = 2$ es una asíntota horizontal. De forma similar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = 2.$$

- **Asíntota vertical:** el denominador se anula en $x = 3$ y en $x = -3$. Analizamos el comportamiento de f en ambos puntos.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty.$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty, \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty.$$

  Así, $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales de f.

- **Discontinuidades de f:** la función es discontinua en $x = -3$ y en $x = 3$, y presenta, en ambos casos, discontinuidades esenciales.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** calculamos f':

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-9) - 2(x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}.$$

Punto crítico de f: en $x = 0$. Además incorporamos $x = 3$ y $x = -3$ por ser puntos de discontinuidad de f. Obtenemos cuatro intervalos a analizar:

$$(-\infty, -3),\ (-3, 0),\ (0, 3),\ (3, \infty).$$

Analizamos el signo de f' en cada subintervalo:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	-1	1	4
signo de f'	$+$	$+$	-	-
conclusión	creciente	creciente	decreciente	decreciente

- **Extremos relativos de f:** en base a la tabla, f tiene un máximo local en $x = 0$.
- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** determinamos la deriva segunda:

$$f''(x) = \frac{-20(x^2-9)^2 - (-20x)(2(x^2-9)2x)}{(x^2-9)^4} = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3}.$$

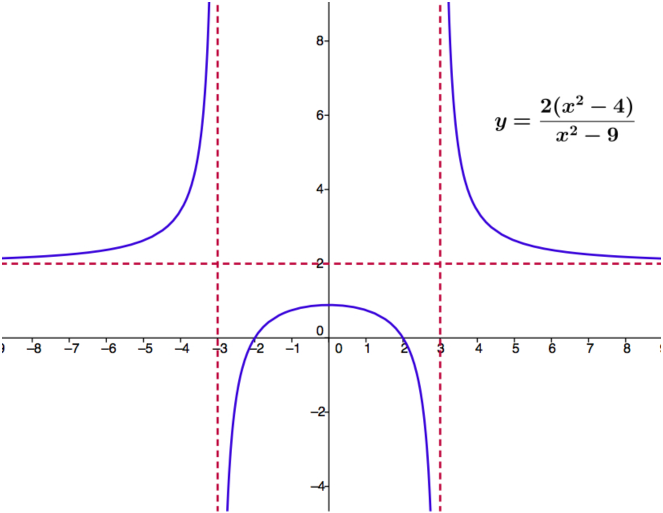
Observar que f'' no existe en $x = -3$ y $x = 3$. No hay puntos donde f'' sea cero. Luego, los intervalos a analizar son:

$$(-\infty, -3), \ (-3, 3), \ (3, \infty).$$

- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
punto muestra	-4	0	4
signo de f''	$+$	-	$+$
conclusión	cónc. arriba	conc. abajo	conc. arriba

- **Puntos de inflexión:** basados en la tabla anterior,los canditados a ser puntos de inflexión son $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$. Sin embargo, como f no está definida en -3 y en 3, concluimos que no hay puntos de inflexión.
- **Graficar**.

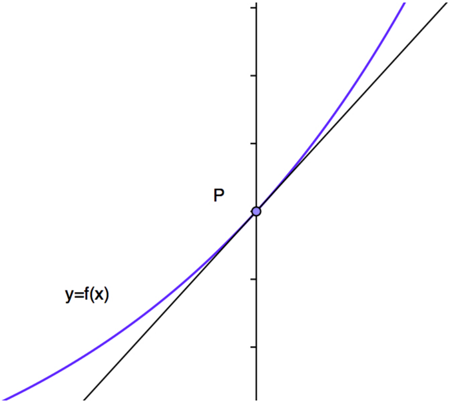


$y = \frac{2(x^2-4)}{x^2-9}$
8
6
4
2
0
-2
-4
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Aproximación de funciones mediante polinomios de grado 1

Linealización

Si realizamos un acercamiento al punto P, obtenemos la imagen:



Así, cerca del punto de tangencia, las gráficas de la función y de la recta tangente se vuelven indistinguibles. Esto implica que es posible utilizar la ecuación de la recta tangente para obtener buenas aproximaciones de la función f.

Linealización

Defínción de Linealización

Sea f una función derivable en $x = a$. Definimos la linealización de f en a como la función:

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En general, cerca del punto a, la linealización es una *buena* aproximación de la función f.

Ejemplo: determine la linealización de:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

en el punto $x = 0$.

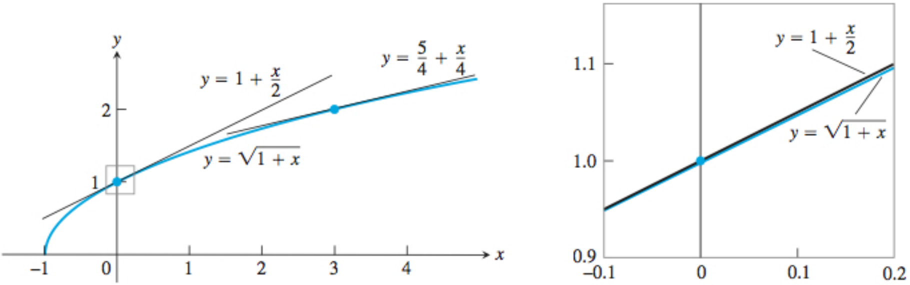
Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Además, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$. Luego la linealización de f en $x = 0$ es:

$$L(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Linealización



Linealización

La linealización de una función en un punto $x = a$ se puede utilizar para aproximar los valores de la función cerca del punto a:

Aproximación	Valor verdadero	$\lvert$Valor verdadero $-$ aproximación$\rvert$
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

En las próximas diapositivas vamos a estudiar más profundamente la aproximación que brinda la linealización a la función.

Diferenciales

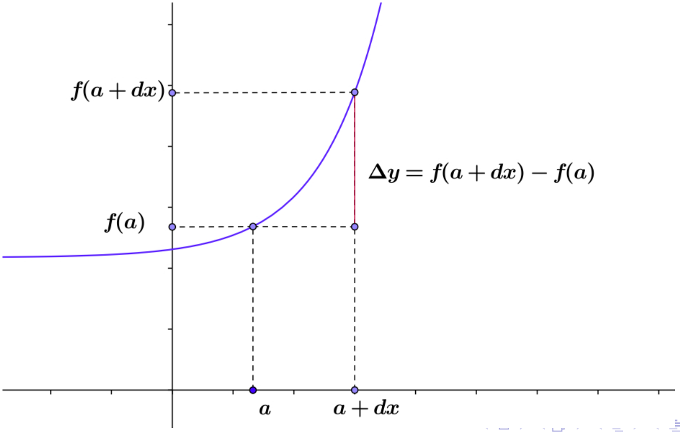
El concepto de Differencial que veremos en esta clase tiene distintos usos en Ingeniería y en Computación:

- En mediciones e instrumentos de ingeniería, se usan derivadas y diferenciales para estudiar cómo pequeños errores en las mediciones de las variables afectan el resultado final del sistema.
- En sistemas de control o en el diseño de circuitos electrónicos, si tienes una pequeña variación en la entrada, puedes calcular el cambio correspondiente en la salida utilizando diferenciales.
- Si un ingeniero está optimizando un proceso de fabricación, puede usar el diferencial para modelar cómo pequeños cambios en las condiciones del proceso (temperatura, presión, velocidad de reacción) afectan el rendimiento o el costo del proceso.
- En análisis de algoritmos, el cálculo de derivadas y el uso del diferencial puede ayudar a entender cómo cambia la complejidad temporal o espacial de un algoritmo cuando el tamaño de la entrada cambia.

Diferenciales

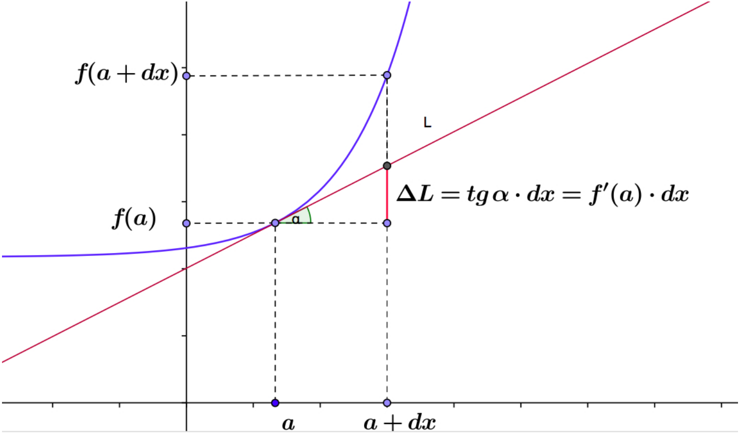
Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x = a$. Cuando nos movemos de $x = a$ al punto $x = a + dx$, la función experimenta un cambio dado por:

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$



Por otro lado, el cambio en la recta tangente L está dado por:

$$\Delta L = f'(a)dx$$



Diferenciales

Dado que la recta L representa una aproximación de f para valores cercanos a $x = a$ tenemos:

$$\Delta y \approx \Delta L.$$

Es decir:

$$f(a + dx) - f(a) \approx f'(a)dx \text{ o: } f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx.$$

Definición de Diferencial

La expresión:

$$\Delta L = f'(a)dx.$$

recibe el nombre de Diferencial de f en a y se simboliza por df o dy:

$$dy = f'(a)dx.$$

Así, el diferencial de f en $x = a$ es el cambio que experimenta la recta tangente a $(a, f(a))$ cuando x pasa de a a $a + dx$.

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: la función área en términos del radio del disco es:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Queremos estimar el cambio del área cuando r pasa de 10 cm a 10.1 cm. Entonces el cambio en la variable independiente, que llamaremos dr es:

$$dr = 10.1 - 10 = 0.1\,\text{cm}.$$

Luego, una aproximación del cambio en el área es:

$$\Delta A = A(10.1) - A(10) \approx dA = A'(10)dr = 2\pi.10\,cm.0.1\,cm = 2\pi\,cm^2.$$

Ahora el cambio real es: $A(10.1) - A(10) = 2.01\pi\,cm^2$.

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10cm$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1cm$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: la función área en términos del radio del disco es:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Queremos estimar el cambio del área cuando r pasa de 10 cm a 10.1 cm. Entonces el cambio en la variable independiente, que llamaremos dr es:

$$dr = 10.1 - 10 = 0.1\,\mathrm{cm}.$$

Luego, una aproximación del cambio en el área es:

$$\Delta A = A(10.1) - A(10) \approx dA = A'(10)dr = 2\pi.10\,cm.0.1\,cm = 2\pi\,cm^2.$$

Ahora el cambio real es: $A(10.1) - A(10) = 2.01\pi\,cm^2$.

En diversas asignaturas de las carreras profundizará el uso de estas cantidades. Veremos una aplicación en la próxima clase.

Información del Parcial 1

- Turno mañana: Jueves 23 de abril de 8 a 9:45 h en el aula que cursa.
- Turno tarde: Viernes 24 de abril de 17 a 18:45 h en el aula que cursa.
- Abarca en teoría desde clase 1 hasta clase 12 inclusive (se pueden pedir definiciones o teoremas, no se pedirán demostraciones teóricas) y en la práctica TP1-TP2 y hasta el ejercicio 21 del TP3. Los ejercicios del parcial serán del mismo nivel y dificultad que los de los prácticos.
- No se podrá usar calculadora ni celular durante el examen.
- Si es posible, llegar unos minutos antes y ubicarse.
- Se harán ejercicios de repaso los días jueves 16 y viernes 17 y un taller el día lunes 20/4 durante las clases de teoría.