Análisis Matemático I
Clase 13: Antiderivadas. Notación Sigma. Repaso para primer parcial

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2026

Antiderivadas

Definición de antiderivada

Decimos que una función F es una antiderivada de f en (a, b) si:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Dar ejemplos.

Observación: si F es una antiderivada de f en (a, b), entonces:

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es cualquier constante, es también una antiderivada de f.

Antiderivadas

Recordar la siguiente consecuencia del teorema del valor medio:

Teorema

Si F y G son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

$$F'(x) = G'(x)$$

para toda x de (a, b), entonces existe una constante C tal que:

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo x en $[a, b]$.

Así, dos antiderivadas de una función difieren en una constante.

Notación

Sea f una función definida en (a, b). El símbolo:

$$\int f(x)dx$$

representa una antiderivada general de f en (a, b) y se denomina integral indefinida de f.

Ejemplos:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$.
- $\int cos(x)dx = sen(x) + C$
- $\int sen(x)dx = -cos(x) + C$

Antiderivadas

Propiedades de la integral indefinida

Sean f y g funciones definidas en (a, b), y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
- $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$

Ejemplos:

- $\int (x^4 + 5x - 1)dx = \int x^4 dx + 5\int xdx - \int 1dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^2}{2} - x + C.$
- $\int (sen(x) - 4cos(x))dx = -cos(x) - 4sen(x) + C$

Preparación para la integral definida: notación para sumas finitas

Sea la siguiente suma finita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Utilizamos la notación sigma para representar la suma finita:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

Finalmente, una fórmula útil es la siguiente:

$$\text{suma de los primeros } n \text{ números naturales } = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Repaso: análisis de funciones

- Obtenga la derivada de

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

  Dé la ecuación de la recta tangente en el punto $(0,0)$.

- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los extremos locales y los intervalos de concavidad de:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-4}.$$

  ¿Tiene la función puntos de inflexión?

Repaso: linealización y diferenciales

- Defina linealización de f en $x = a$ y mencione para qué se utiliza. Interpretaer geométricamente.
- Defina diferencial de f en a y explique para qué se utiliza.Interpretaer geométricamente.
- Linealizando la función $y = \sqrt{x}$ en un punto apropiado a, estime:

$$\sqrt{16.5}.$$

- Se encuentra que la medición del lado de un cuadrado es igual a 10 pulgadas, con un posible error de 0.5 pulgadas. Usar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del cuadrado. Encuentre también el error relativo porcentual.

Área máxima Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?