Análisis Matemático I
Clase 15: Integral Definida: Teorema Fundamental del Cálculo. Área entre curvas.

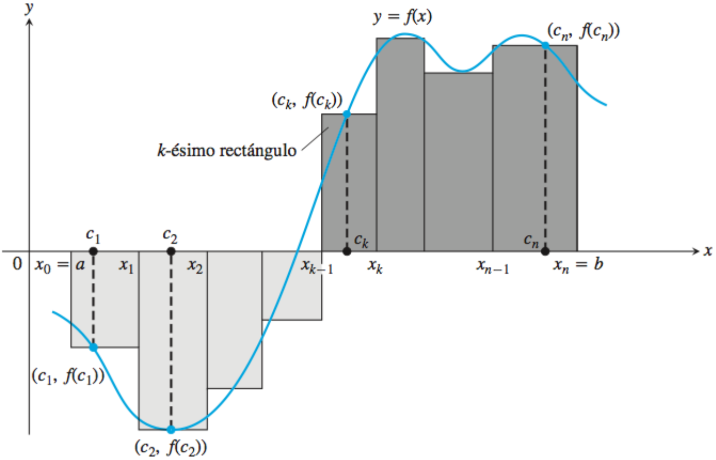
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2026

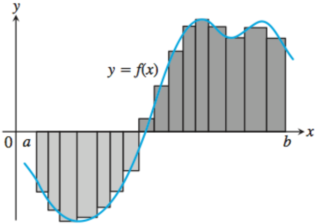
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: sumas de Riemann

La idea de Sumas de Riemann puede aplicarse para aproximar regiones más generales:



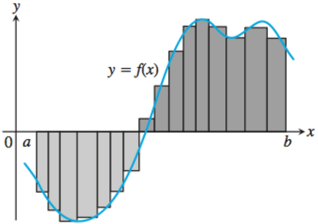
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

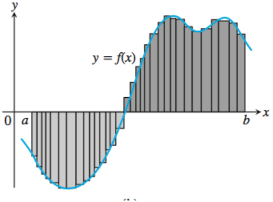
Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada



Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada





Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Comentarios importantes: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces

- las sumas de Riemann asociadas a f pueden definirse como antes, pero si la función toma valores negativos, las sumas de Riemann ya no pueden considerarse como sumas de áreas de rectángulos pues algunos de sus términos podrían ser negativos. (Ver figuras de las diapositivas anteriores)
- La integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

  puede definirse exactamente como antes, solo que ahora su valor no se puede interpretar como área de una región.

Propiedades de la integral definida

Propiedades

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$, y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b 1dx = b - a$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
- Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema del Valor Medio para integrales

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

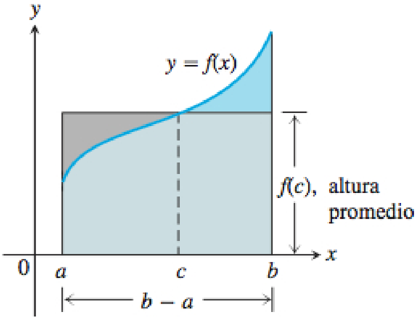
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Sin demostración.

Observación: la conclusión del teorema también se puede escribir como:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Interpretación geométrica para funciones no negativas:



Así, el Teorema del valor medio para integrales afirma que el área del rectángulo gris $f(c)(b-a)$ es igual al área de la región comprendida por el gráfico de f y el intervalo $[a, b]$:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Este teorema se utilizará en la demostración del Teorema fundamental del Cálculo.

Una aplicación del valor medio

La expresión:

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

recibe el nombre de valor medio de f en $[a, b]$. Se puede emplear en las siguientes situaciones:

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leq x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \leq x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \leq x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \leq x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo $[0, 80]$?

Una aplicación del valor medio

La expresión:

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

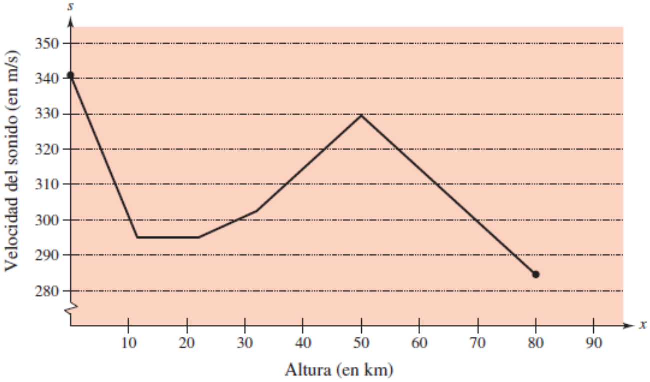
recibe el nombre de valor medio de f en $[a, b]$. Se puede emplear en las siguientes situaciones:

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leq x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \leq x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \leq x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \leq x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

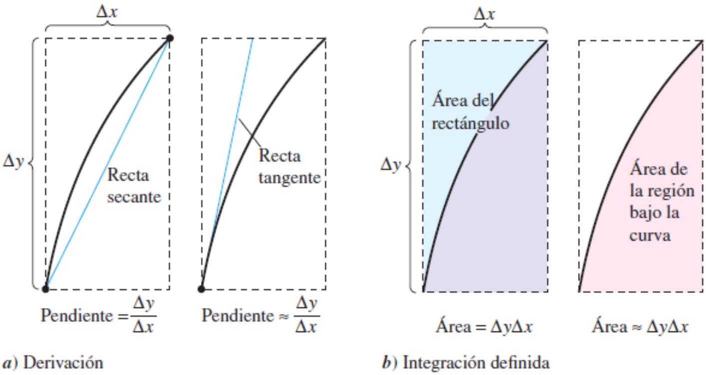
donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo $[0, 80]$?

El estudiante verá en la práctica que para resolver este problema, deberá calcular el valor medio o promedio de s en el intervalo $[0, 80]$.



La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.33

La integración y la derivación como operaciones invesas



De este modo, al menos en una etapa de aproximación, las operaciones de derivación y de integración parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación.

Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del Cálculo: primera parte

Sea f una función continua en $[a, b]$. Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

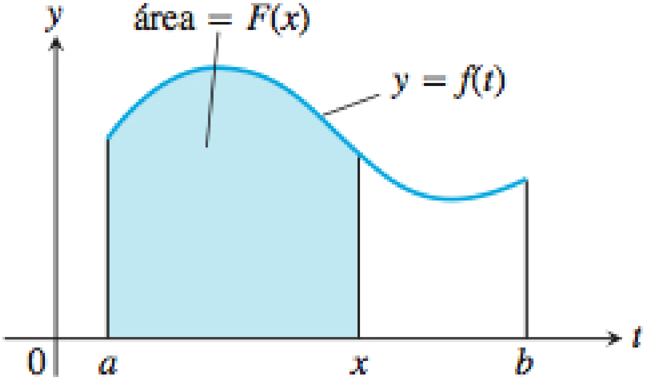
Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Observación: F es una antiderivada de f. El teorema permite construir antiderivadas o primitivas de funciones continuas a través de la integración. La demostración será dada al finalizar el semestre.

Interpretación de la función F cuando $f \geq 0$.



Teorema fundamental del Cálculo: segunda parte

Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplos. Calcule:

- $\int_0^{\pi} cos(x)dx = sen(\pi) - sen(0) = 0$
- $\int_0^2 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}16 - \frac{1}{2}4 - 0 = 2.$

Demostración del Teorema fundamental del Cálculo: segunda parte

Demostración. Sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. La parte 1 del *teorema fundamental del cálculo*, nos dice que la función:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una antiderivada de f en $[a, b]$. Así, F y G son antiderivadas de f, y entonces por la segunda consecuencia del TVM, existe una constante C tal que:

$$F(x) - G(x) = C$$

para toda $x \in [a, b]$. Por lo que $F(x) = G(x) + C$. Luego:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt - 0 = \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

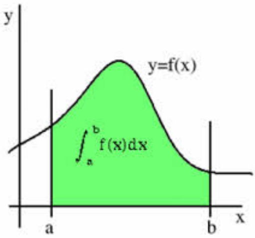
Esto termina la demostración.

Recordar:

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre el gráfico de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (\textbf{siempre que la integral exista})}.$$



Ejemplo 1: supongamos que queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$.

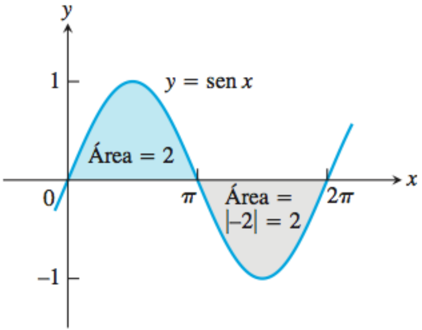
Cálculo de áreas

Ejemplo 1: supongamos que queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$.
Solución: Observar que $sen(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$. Entonces:

$$\text{Área} = \int_0^{\pi/2} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = -cos(\pi/2) - (-cos(0)) = 1.$$

Cálculo de áreas de funciones arbitrarias

Ejemplo 2: supongamos que ahora queremos calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = sen(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.



En este caso, la función asume valores positivos y negativos. Por ende, no podemos interpretar la integral de f como el área buscada.

Cálculo de áreas de funciones arbitrarias

Cálculo de área para una función arbitraria

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Para determinar el área comprendida entre el gráfico de f, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje x, procedemos como sigue:

- Determinamos las intersecciones del gráfico de f con el eje x en el intervalo $[a, b]$.
- Subdividimos $[a, b]$ usando los puntos hallados en el inciso anterior.
- Integramos f sobre cada sub-intervalo.
- Sumamos los valores absolutos de las integrales calculadas en el apartado anterior.

Solución del ejemplo 2: Observar que $y = sen(x)$ corta al eje x en $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$ en el intervalo de integración $[0, 2\pi]$. Luego, utilizando el procedimiento anterior, obtenemos:

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi} sen(x)dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)dx \right| = 4.$$

Cálculo de áreas

Ejemplo: determine el área de la región entre el eje x y la gráfica de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

en el intervalo $[-1, 2]$.